

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ДИНАМИЧЕСКИЙ ОТКЛИК В ВЯЗКОУПРУГИХ И ПОРОВАЗКОУПРУГИХ ТЕЛАХ*

© 2014 г. Л.А. Игумнов¹, А.А. Ипатов¹, Т.А. Сабеева²

¹НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

²Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 12.05.2014

Исследуется динамика в вязкоупругих и поровязкоупругих телах. Поровязкоупругое решение находится из пороупругого решения с помощью принципа соответствия. Для описания вязкоупругих свойств материала используются классические вязкоупругие модели (Максвелла, Кельвина – Фойгта, стандартного вязкоупругого тела). Применяется гранично-элементная методика в сочетании с интегральным преобразованием Лапласа. Численное обращение преобразования Лапласа реализовано на основе метода Дурбина. Представлены результаты численных решений.

Ключевые слова: пороупругость, классические вязкоупругие модели, поровязкоупругость, метод граничных элементов, преобразование Лапласа, метод гранично-интегральных уравнений.

Введение

В настоящее время большой научный и практический интерес вызывают исследования волновых процессов в дисперсных средах. К таким средам относятся вязкоупругие, пороупругие и поровязкоупругие материалы. Классическая теория вязкоупругости широко представлена в литературе [1, 2]. В исследованиях применяется модель Био пороупругой среды [3–5]. Теория Био является расширением классической теории упругости на случай двухфазной среды. Рассматриваемая поровязкоупругая модель – комбинация пороупругой модели и модели вязкоупругой среды, примененной к упругому скелету [6].

Универсальным численно-аналитическим подходом к решению трехмерных волновых начально-краевых задач как теории вязкоупругости, так и поровязкоупругости является применение метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) и метода граничных элементов (МГЭ) [7]. В настоящей статье МГЭ и интегральное преобразование Лапласа применяются для решения трехмерных задач динамики поровязкоупругих тел при смешанных краевых условиях.

* Выполнено в рамках Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-593.2014.8) и при поддержке РФФИ (гранты 14-08-31415-мол_а, 14-08-31410-мол_а, 14-08-00811-А, 12-08-00984-а, 13-08-97091-р_поволжье_а, 12-01-00698-а, 13-08-00658-а).

Постановка задачи

Рассмотрим кусочно-однородное тело Ω в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$. Динамическое состояние упругого тела Ω описывается следующей системой дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\mu \Delta u(x, t) + (\lambda + \mu) \text{grad div } u(x, t) = \rho \ddot{u}(x, t),$$

где $u(x, t)$ – вектор перемещений точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t , удовлетворяющий условиям $u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0$; ρ – плотность материала; λ, μ – коэффициенты Ламе.

Система дифференциальных уравнений теории Био в преобразованиях Лапласа (параметр преобразования s) для смещения \hat{u}_i и порового давления \hat{p} имеет следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} \mu \hat{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3} \mu \right) \hat{u}_{jj} - (\alpha - \beta) \hat{p}_{,i} - s^2 (\rho - \beta \rho_f) \hat{u}_i &= 0, \\ \frac{\beta}{s \rho_f} \hat{p}_{,ii} - \frac{\varphi^2 s}{R} \hat{p} - (\alpha - \beta) s \hat{u}_{ii} &= 0, \\ \beta = \frac{k \rho_f \varphi^2 s^2}{\varphi^2 s + s^2 k (\rho_a + \varphi \rho_f)}, \quad R = \frac{\varphi^2 K_f K_s^2}{K_f (K_s - K) + \varphi K_s (K_s - K_f)}, \end{aligned}$$

где μ, K, K_f, K_s – константы упругости, φ – пористость, k – проницаемость, α – эффективный коэффициент напряжений, ρ, ρ_a, ρ_f – плотности скелета, присоединенной массы и жидкой среды.

Вязкоупругое и поровязкоупругое решения строятся на основе принципа соответствия упругого и пороупругого решений:

$$\begin{aligned} \hat{K}(s) = s \frac{K_0}{s + \gamma_1}, \quad \hat{\mu}(s) = s \frac{\mu_0}{s + \gamma_1} \quad \text{для модели Максвелла,} \\ \hat{K}(s) = K_\infty \left[1 + \frac{s}{\gamma_2} \right], \quad \hat{\mu}(s) = \mu_\infty \left[1 + \frac{s}{\gamma_2} \right] \quad \text{для модели Кельвина – Фойгта,} \\ \hat{K}(s) = K_\infty \left[\left(\frac{1}{w^2} - 1 \right) \frac{s}{s + \gamma_1} + 1 \right], \quad \hat{\mu}(s) = \mu_\infty \left[\left(\frac{1}{w^2} - 1 \right) \frac{s}{s + \gamma_1} + 1 \right] \quad \text{для модели стандартного вязкоупругого тела,} \end{aligned}$$

где γ_1, γ_2 – величины, обратные соответствующим характерным временам релаксации и ползучести, индексами ∞ и 0 обозначены длительные и мгновенные модули соответственно, причем справедливо $K_\infty = K_0 w^2, \mu_\infty = \mu_0 w^2$.

Гранично-элементная методика

Численная схема основана на прямом подходе с использованием формулы Грина – Бетти – Сомильяны. Для применения гранично-элементной (ГЭ) дискретизации рассмотрим регуляризованное ГИУ [2]. Будем аппроксимировать границу области совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырож-

денные четырехугольные элементы. Для аппроксимации обобщенных граничных перемещений применим билинейные элементы, а для аппроксимации обобщенных поверхностных сил – постоянные элементы. Такая согласованность аппроксимаций границы области, граничных перемещений и поверхностных сил выбрана из тех соображений, что напряжения определяются через производные от перемещений, а перемещения зависят не только от координат точки, но и от конфигурации границы в окрестности этой точки. В качестве проекционного метода применим метод коллокации.

Численные эксперименты

Рассмотрим задачу о торцевом ударе силой $P(t) = P_0 f(t)$ ($P_0 = 1 \text{ Н/м}^2$, $f(t) = H(t)$ – функция Хевисайда) составного призматического тела с жестко закрепленным концом (рис. 1). Рассмотрим подобласти с одинаковыми параметрами материала: $E = 2,11 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $\nu = 0$; $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$. Задача решается в безразмерных величинах.

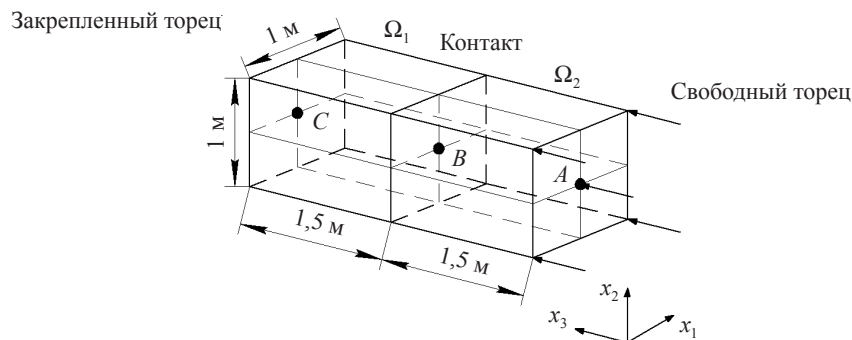


Рис. 1

Гранично-элементная сетка представлена на рис. 2. Каждая из подобластей содержит по 72 элемента и 88 точек на четверти сетки; таким образом, вся геометрическая модель содержит 576 элементов.

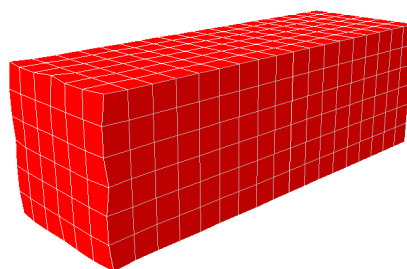


Рис. 2

На рис. 3 приведены перемещения u_2 в точке B для модели Максвелла при различных значениях параметра вязкости (кривая 1 – упругое ГЭ-решение, кривая 2 – $\gamma = 0,01$, кривая 3 – $\gamma = 0,1$, кривая 4 – $\gamma = 1$, кривая 5 – $\gamma = 10$).

На рис. 4 приведены перемещения u_2 в точке B для модели Кельвина – Фойгта при различных значениях параметра вязкости (кривая 1 – упругое ГЭ-решение, кривая 2 – $\beta = 100$, кривая 3 – $\beta = 10$).

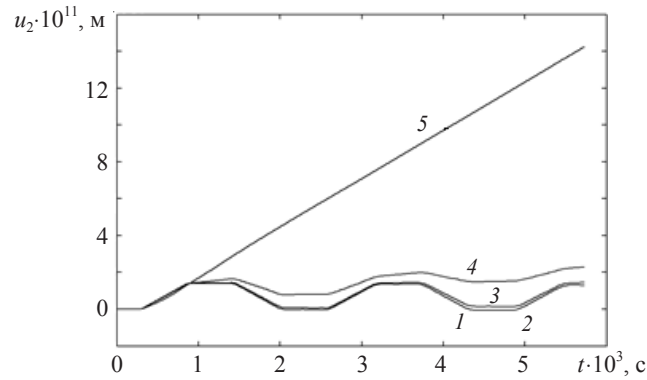


Рис. 3

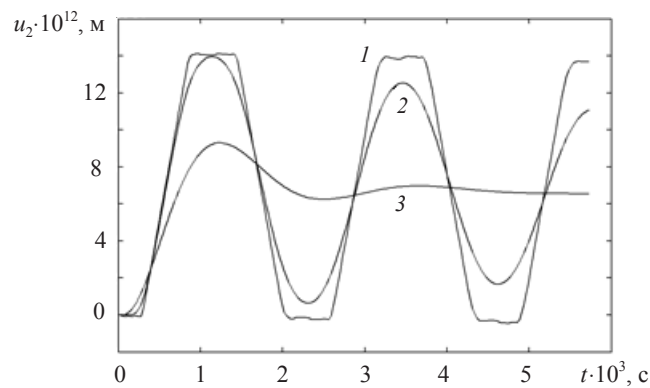


Рис. 4

На рис. 5 приведены перемещения u_2 в точке B для модели стандартного вязкоупругого тела при различных значениях параметра вязкости (кривая 1 – упругое ГЭ-решение, кривая 2 – $\gamma = 200$, кривая 3 – $\gamma = 50$, кривая 4 – $\gamma = 1$).

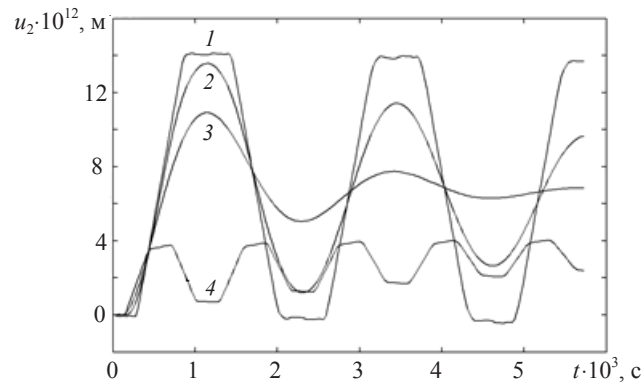


Рис. 5

Рассмотрим гранично-элементные решения задачи о действии торцевой силы $f(t) = 1 \text{ Н/м}^2$ на призматическое поровязкоупругое тело (рис. 6). В качестве пористого материала рассматривается песчаник Berea [6], насыщенный водой. Параметры пороупругого материала: $K = 4,8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $G = 7,2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\rho = 2458 \text{ кг/м}^3$, $\varphi = 0,19$, $K_s = 3,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $K_f = 3,3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $k = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/(\text{Н}\cdot\text{с})$, $\nu = 0$. Длина поровязкоупругой консоли равна 9 м.

Будем исследовать перемещение и давление в направлении оси x_3 в точке, удаленной на 1,5 м от нагруженного торца. Для исследования динамических откликов в точке A тело разбивается на две подобласти с помощью фиктивной границы (красная линия) на расстоянии 1,5 м от нагруженного торца (рис. 7), гранично-элементная сетка на каждой из подобластей состоит из 408 и 168 элементов соответственно.

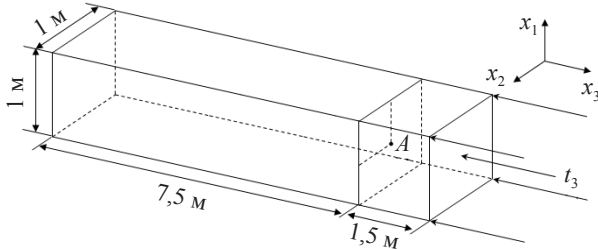


Рис. 6

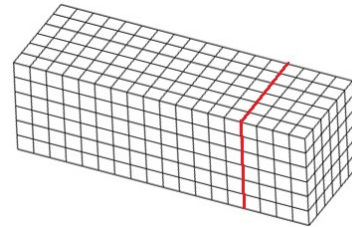


Рис. 7

Численные решения для перемещений u и поровых давлений p трехмерной динамической поровязкоупругости в случае модели Максвелла, где в качестве длительных модулей были взяты параметры упругого скелета пороупругой среды, представлены на рис. 8 и рис. 9 соответственно. Рассматриваются различные значения параметра вязкоупругого материала.

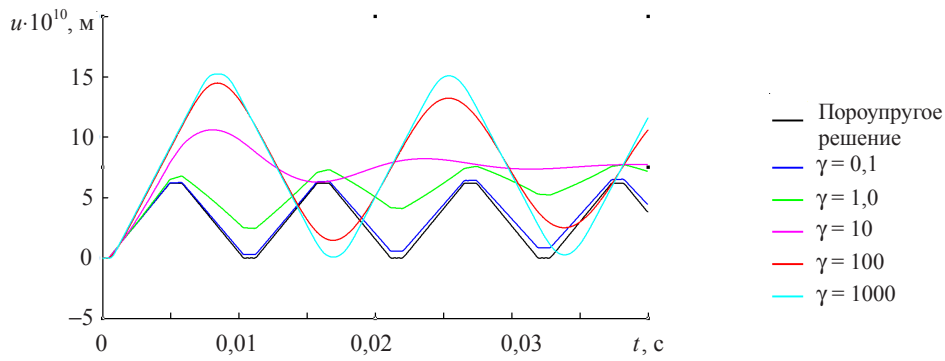


Рис. 8

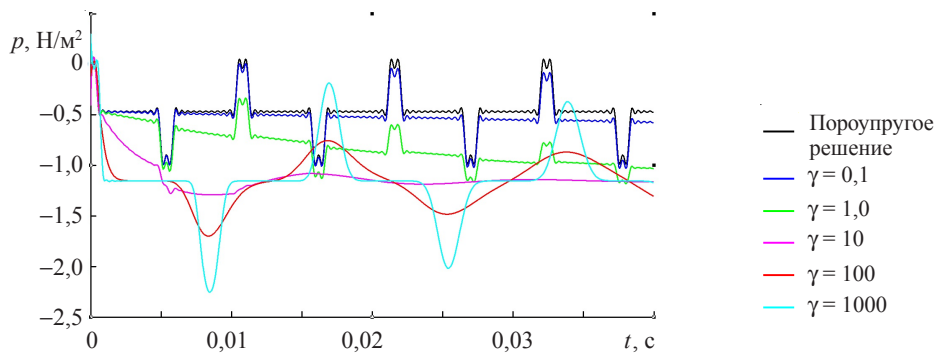


Рис. 9

Численные решения для перемещений u и поровых давлений p трехмерной динамической поровязкоупругости в случае модели Кельвина – Фойгта, где в качестве длительных модулей были взяты параметры упругого скелета пороупругой сре-

ды, представлены на рис. 10 и рис. 11 соответственно. Рассматриваются различные значения параметра γ вязкоупругого материала.

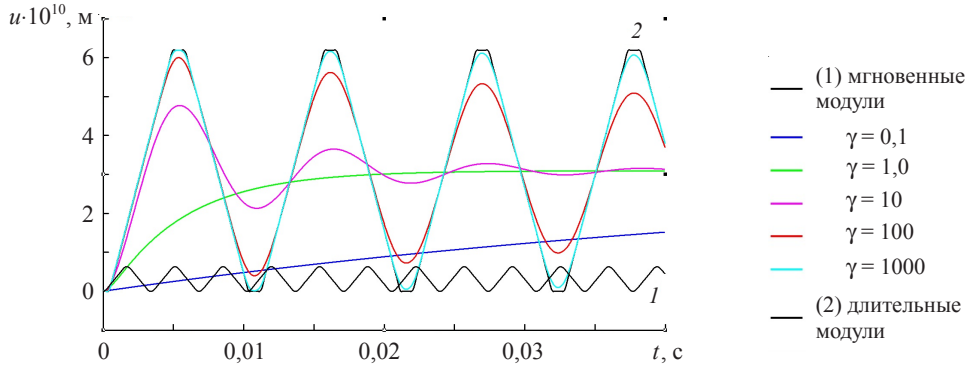


Рис. 10

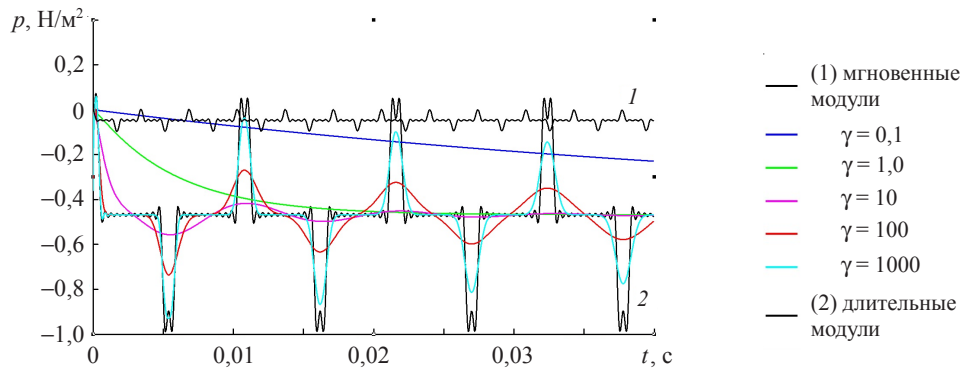


Рис. 11

Численные решения для перемещений u и поровых давлений p трехмерной динамической поровязкоупругости в случае модели стандартного вязкоупругого тела, где в качестве длительных модулей были взяты параметры упругого скелета порупругой среды, представлены на рис. 12 и рис. 13 соответственно. Рассматриваются различные значения параметра γ вязкоупругого материала.

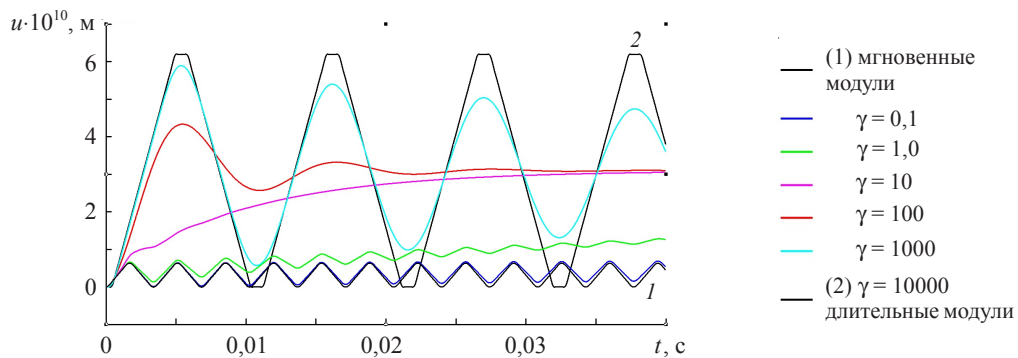


Рис. 12

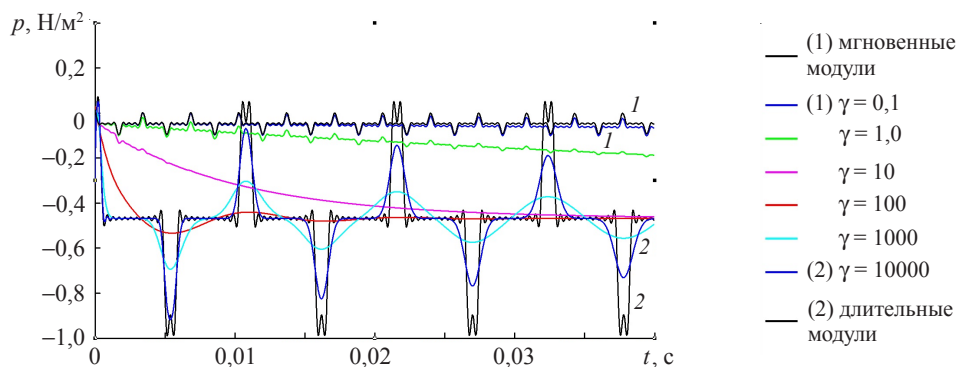


Рис. 13

Результаты численных экспериментов, приведенные на рис. 5, 12, 13, демонстрируют эффект перестройки волновых полей внутренних перемещений, когда свойства вязкоупругого материала модели стандартного вязкоупругого тела изменяются с мгновенных модулей на длительные.

В откликах перемещений изменялись (увеличивались) амплитуда и период искомой функции. Эффект перестройки граничных полей численно описан ранее в [7, 8]. На рис. 10–13 можно наблюдать схожее поведение динамических откликов в случае модели Кельвина – Фойгта и модели стандартного вязкоупругого тела.

Заключение

Проведено сравнение вязкоупругих и поровязкоупругих решений с различными параметрами вязкости. Продемонстрирована перестройка волновых полей. Отмечено сходство поведения откликов перемещений и давлений модели Кельвина – Фойгта и модели стандартного вязкоупругого тела при некоторых значениях параметра вязкости. Оригиналы решения задачи построены на основе метода Дурбина численного обращения преобразования Лапласа.

Список литературы

1. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
2. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во КГУ, 1986. 296 с.
3. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 1941. 12(2). P. 155–164.
4. Biot M.A. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid // J. Appl. Phys. 1956. 27(5). P. 459–467.
5. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // J. Appl. Phys. 1955. 26(2). P. 182–185.
6. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
7. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
8. Игумнов Л.А., Белов А.А., Литвинчук С.Ю. Об исследовании влияния вязкости материала на волновые поля перемещений и напряжений методом граничных элементов // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2006. Вып. 68. С. 161–169.

**MATERIAL VISCOSITY EFFECT ON DYNAMIC RESPON
IN VISCOELASTIC AND POROVISCOELASTIC SOLIDS**

L.A. Igumnov, A.A. Ipatov, T.A. Sabaeva

Dynamics of viscoelastic and poroviscoelastic solids is investigated. Poroviscoelastic solutions are evaluated from poroelastic with the help of the correspondence principle. Classical viscoelastic models, such as Maxwell model, Kelvin – Voigt model and standard linear solid model are used to describe viscoelastic properties. Boundary element method and integral Laplace transform are used. Numerical inversion of Laplace transform is based on Durbin's method. Results of numerical experiments are given.

Keywords: poroelasticity, classical viscoelastic models, poroviscoelasticity, boundary element method, Laplace transformation, boundary integral equations.