

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ ДАВЛЕНИЯ ВНУТРИ ПОЛОСТИ В ПОРОУПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ*

© 2014 г. С.Ю. Литвинчук¹, А.Н. Петров¹, Т.А. Сабаева²¹НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского²Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 12.05.2014

На основе гранично-элементного подхода в сочетании с шаговым методом обращения преобразования Лапласа решена задача о действии скачка давления внутри полости, расположенной в пороупругом полупространстве. Исследование проводилось в рамках модели Био с четырьмя базовыми функциями описания поведения среды: перемещениями упругого скелета и поровым давлением. Приведено сравнение решений с решениями для дренированной и недренированной моделей.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, шаговый метод, пороупругое полупространство, граничный элемент.

Использование теории Био – Френкеля в сочетании с обобщенными формулами Грина – Бетти – Сомильяны и интегральным преобразованием Лапласа позволяет строить шаговые гранично-элементные схемы решения начально-краевых задач трехмерной теории пороупругости. В основу получения шаговых схем положен шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа, который опирается на квадратурные формулы для интеграла, получаемого из теоремы операционного исчисления об интегрировании оригинала.

Математическая модель

Система дифференциальных уравнений в преобразованиях Лапласа для смещения \hat{u}_i и порового давления \hat{p} имеет следующий вид [1]:

$$G\hat{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\hat{u}_{j,ij} - (\alpha - \beta)\hat{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\hat{u}_i = -\hat{F}_i,$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f}\hat{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{R}\hat{p} - (\alpha - \beta)s\hat{u}_{i,i} = -\hat{a}, \quad i, j = \overline{1, 3},$$

$$\beta = \frac{k\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 k(\rho_a + \phi\rho_f)},$$

* Выполнено при частичном финансировании Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-593.2014.8) и РФФИ (гранты 14-08-31415-мол_а, 13-08-00658-а, 12-01-00698-а).

$$R = \frac{\phi^2 K^f K^{s2}}{K^f (K^s - K) + \phi K^s (K^s - K^f)},$$

где G, K, K^s, K^f – константы упругости; ϕ – пористость; k – проницаемость; α – эффективный коэффициент напряжений; ρ, ρ_a, ρ_f – плотности скелета, присоединенной массы и жидкой среды; \hat{F}_i, \hat{a} – объемные силы; s – параметр преобразования Лапласа.

Приведенную систему уравнений запишем в символической матричной форме [1]:

$$B^*(\partial)\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = [u, p]^T,$$

где

$$B^* = \begin{bmatrix} A + B\partial_{11} & B\partial_{12} & B\partial_{13} & sC\partial_1 \\ B\partial_{12} & A + B\partial_{22} & B\partial_{23} & sC\partial_2 \\ B\partial_{13} & B\partial_{23} & A + B\partial_{33} & sC\partial_3 \\ C\partial_1 & C\partial_2 & C\partial_3 & D \end{bmatrix},$$

$$A = G\nabla^2 - s^2(\rho - \beta\rho_f), \quad B = K + \frac{1}{3}G, \quad C = \alpha - \beta, \quad D = \frac{\beta}{\rho\rho_f}\nabla^2 - \frac{\phi^2 s}{R}.$$

Фундаментальное решение находим из следующего операторного соотношения [2]:

$$B(\partial)U + I\delta(x - y) = 0,$$

где I – единичная матрица, δ – дельта-функция Дирака, $x, y \in R^3$,

$$U = \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^s & \hat{U}_i^f \\ \hat{P}_j^s & \hat{P}^f \end{bmatrix} = \frac{s\rho_f}{G\beta(K + (4/3)G)} \begin{bmatrix} (F\nabla^2 + AD)\delta_{ij} - F\partial_{ij} & -ACs\partial_i \\ -AC\partial_i & (B\nabla^2 + A)A \end{bmatrix} \Psi,$$

$$F = \left(k + \frac{1}{3}G\right)D - (\alpha - \beta)^2 s,$$

$$\Psi = \frac{1}{4\pi r} \left[\frac{e^{-\lambda_1 r}}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)} + \frac{e^{-\lambda_2 r}}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} + \frac{e^{-\lambda_3 r}}{(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \right],$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\phi^2 s^2 \rho_f}{\beta R} + \frac{s^2(\rho - \beta\rho_f)}{K + (4/3)G} + \frac{s^2 \rho_f (\alpha - \beta)^2}{\beta(K + (4/3)G)} \right] \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\phi^2 s^2 \rho_f}{\beta R} + \frac{s^2(\rho - \beta\rho_f)}{K + (4/3)G} + \frac{s^2 \rho_f (\alpha - \beta)^2}{\beta(K + (4/3)G)} \right)^2 - 4 \frac{s^4 \phi^2 \rho_f (\rho - \beta\rho_f)}{\beta R (K + (4/3)G)}},$$

$$\lambda_3^2 = \frac{s^2(\rho - \beta\rho_f)}{G}.$$

Интегральное представление прямого подхода имеет следующий вид [2]:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_j \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^s & -\hat{P}_j^s \\ \hat{U}_i^f & -\hat{P}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_i \\ \hat{q} \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^s & -\hat{Q}_j^s \\ \hat{T}_i^f & -\hat{Q}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p} \end{bmatrix} d\Gamma,$$

где

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^s & -\hat{P}_j^s \\ \hat{U}_i^f & -\hat{P}^f \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^s & -\hat{Q}_j^s \\ \hat{T}_i^f & -\hat{Q}^f \end{bmatrix}$$

– матрицы фундаментальных и сингулярных пороупругих решений соответственно, компоненты матриц приведены в [3], \hat{q} – поток, \hat{t} – поверхностная сила.

Итоговая система граничных интегральных уравнений (ГИУ) примет вид [4]:

$$\begin{bmatrix} c_{ij}(y) & 0 \\ 0 & c(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i(s, x) \\ \hat{p}(s, x) \end{bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^s(s, y, x) & \hat{Q}_j^s(s, y, x) \\ \hat{T}_i^f(s, y, x) & \hat{Q}^f(s, y, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i(s, x) \\ \hat{p}(s, x) \end{bmatrix} d\Gamma d\tau = \\ = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^s(s, y, x) & -\hat{P}_j^s(s, y, x) \\ \hat{U}_i^f(s, y, x) & -\hat{P}^f(s, y, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_i(s, x) \\ \hat{q}(s, x) \end{bmatrix} d\Gamma d\tau.$$

Гранично-элементная дискретизация

Чтобы ввести граничную элементную дискретизацию (ГЭ-дискретизацию), рассмотрим регуляризованное уравнение [2, 4, 5].

Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы, каждый из которых отображается на контрольный элемент Δ_e (каждый Δ_e – это либо квадрат $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$, либо треугольник $0 \leq \xi_1 + \xi_2 \leq 1, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$).

Неизвестные граничные поля (v, \tilde{t}) определяются через узловые значения $v^k = v(z^k)$ и $\tilde{t}^k = \tilde{t}(z^k)$ в интерполяционных узлах. При этом для расчетного значения параметра s будем иметь следующие выражения граничных перемещений и поверхностных сил внутри элемента S_k :

$$v_i(y) = \sum_{l=1}^4 R^l(\xi) v_i^{\chi(k,l)}, \quad \tilde{t}_i(y) = \tilde{t}_i^{\chi(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3; \quad y \in S_k.$$

Здесь $R^l(\xi)$ – функции формы для линейного четырехугольного элемента.

Для получения дискретного аналога ГИУ применим метод коллокации. В качестве узлов коллокации y^m выбираем узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируется система линейных алгебраических уравнений.

Для решения ГИУ по времени использован следующий алгоритм [1]. Пусть имеет место интеграл:

$$y = \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

тогда можно построить квадратурную формулу:

$$y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t), \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ \omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{f} \left(\gamma \frac{Re^{il2\pi L^{-1}}}{\Delta t} \right) e^{-inl2\pi L^{-1}}, \\ \gamma(z) = \frac{3}{2} - 2z + \frac{z^2}{2},$$

где \tilde{f} – изображение по Лапласу функции f . При условии того, что функция $\tilde{f}(s)$ в уравнении вычисляется с некоторой погрешностью ε , выбор $L = 2N$ и $R^N = \sqrt{\varepsilon}$ допускает погрешность вычисления ω_n порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$.

Численные результаты

Рассмотрим задачу о действии нагрузки внутри полости, расположенной в пороупругом полупространстве. Сила $P(t) = P_0 f(t)$ действует по нормали к поверхности сферической полости. Исследуются перемещения в точках A, B, C сферы, отмеченных на рис. 1.

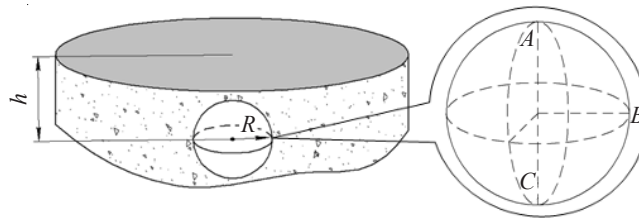


Рис. 1. Модель со сферической полостью

На рис. 2–4 представлены численные расчеты для нагружения $P_0 = 1 \text{ Н/м}^2$ ($f(t) = H(t)$ – функция Хевисайда) по дренированной и недренированной моделям материала соответственно в точках A, B, C сферы. В качестве пороупругого материала выбрана скальная порода с параметрами: $K = 8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $G = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\rho = 2458 \text{ кг/м}^3$, $\phi = 0,19$, $K_s = 3,6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $K_f = 3,3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $k = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$. Все расчеты выполнены при следующих параметрах шагового метода: $N = 1000$, $L = 1000$, $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}$. На всех рисунках черная линия соответствует пороупругой модели, красная – дренированной, зеленая – недренированной модели.

Из графиков видно, что максимальные перемещения возникли в точке A , самой близкой к дневной поверхности полупространства, причем перемещения, возникающие в точках сферической полости, идентичны перемещениям, возникающим в сферической полости в пространстве, до того момента, как волны достигают дневной поверхности полупространства. Отмеченное справедливо для результатов, полученных по дренированной и недренированной моделям материала.

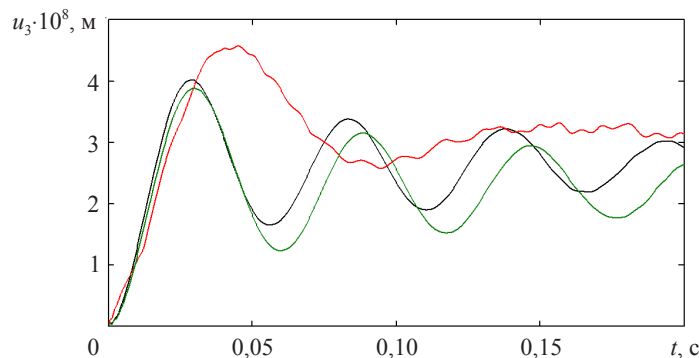


Рис. 2. ГЭ-решения в точке A

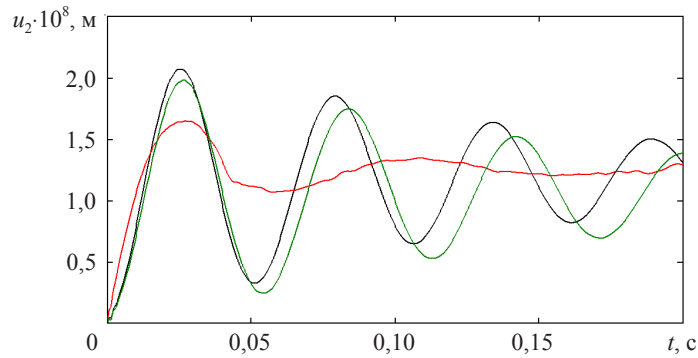


Рис. 3. ГЭ-решения в точке B

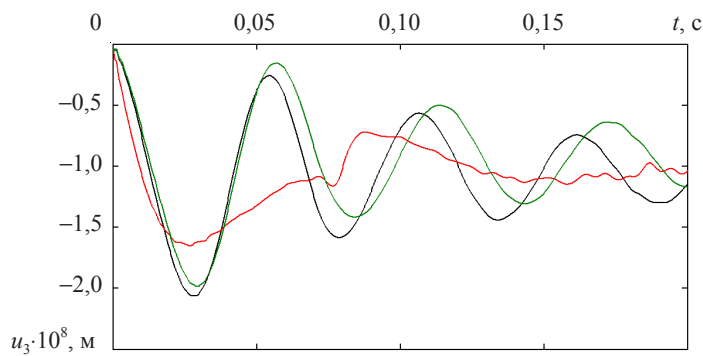


Рис. 4. ГЭ-решения в точке C

Рассмотрим задачу, когда сила $P(t) = P_0 f(t)$ действует внутри кубической полости. Сила действует по нормали к поверхности кубической полости с длиной ребра 10 м (рис. 5).

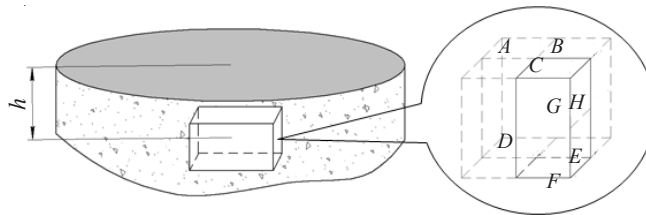


Рис. 5. Модель с кубической полостью

На рис. 6–13 представлены численные расчеты для нагружения $P_0 = 1 \text{ Н/м}^2$, $f(t) = H(t)$ соответственно в точках A, B, C, D, E, F, G, H куба.

Результаты показали, что максимальные перемещения возникают в ближайшей точке к дневной поверхности полупространства. Кроме того, сравнение двух задач – полости в полупространстве из дренированного или недренированного материала и полости в упругом пространстве – показало, что перемещения совпадают до момента времени, когда волны достигнут поверхности полупространства.

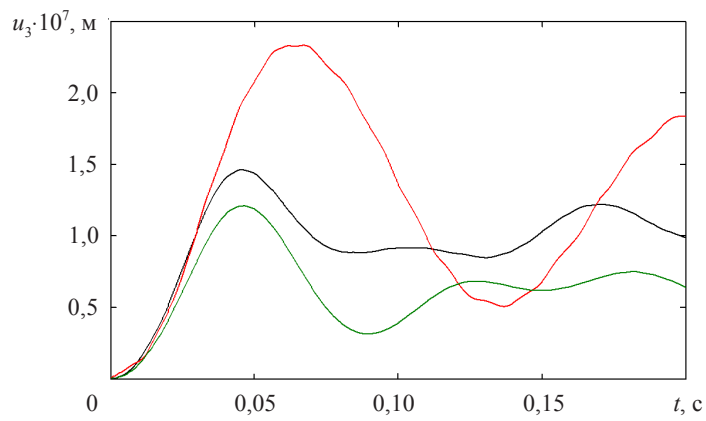


Рис. 6. ГЭ-решения в точке A

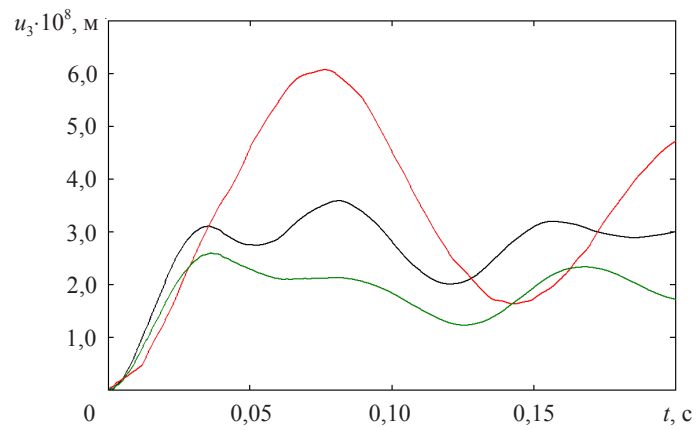


Рис. 7. ГЭ-решения в точке B

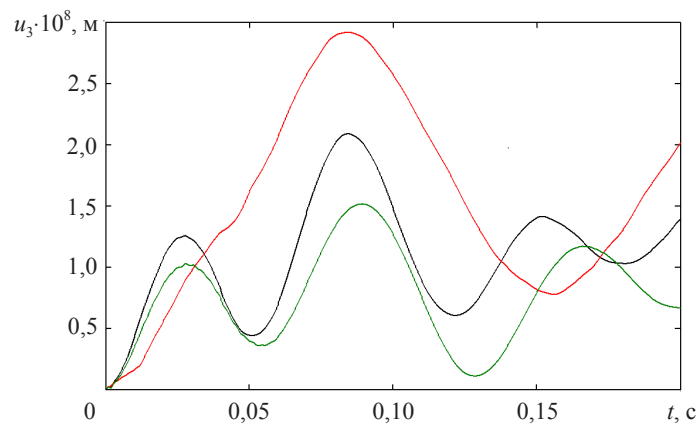


Рис. 8. ГЭ-решения в точке C

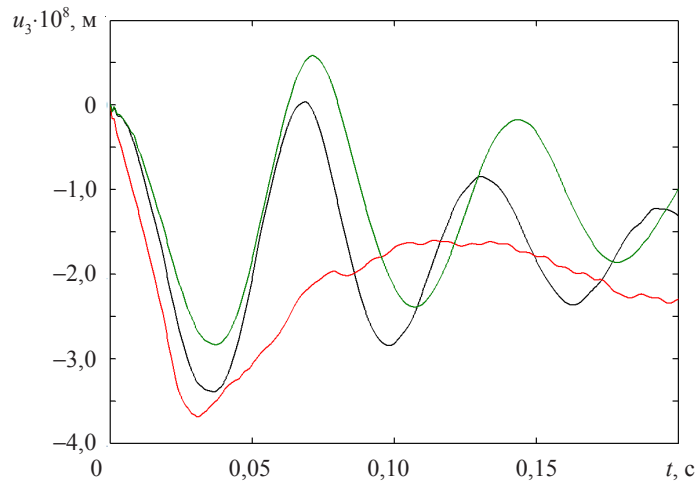


Рис. 9. ГЭ-решения в точке D

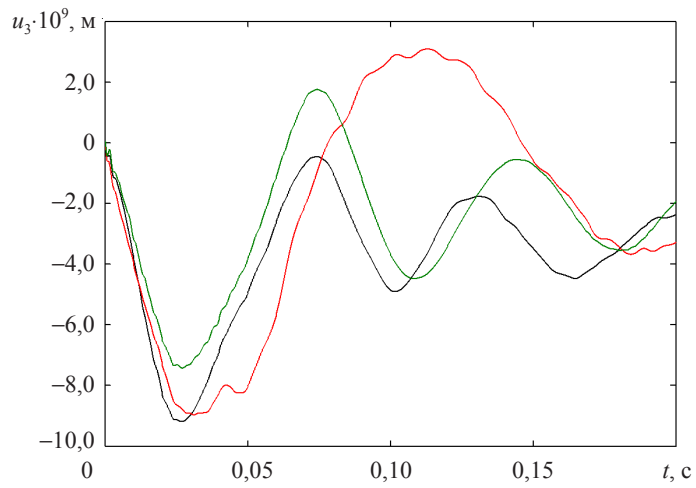


Рис. 10. ГЭ-решения в точке E

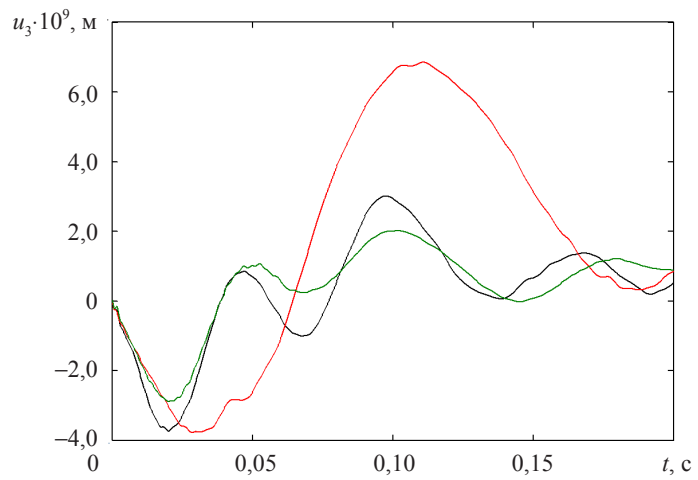


Рис. 11. ГЭ-решения в точке F

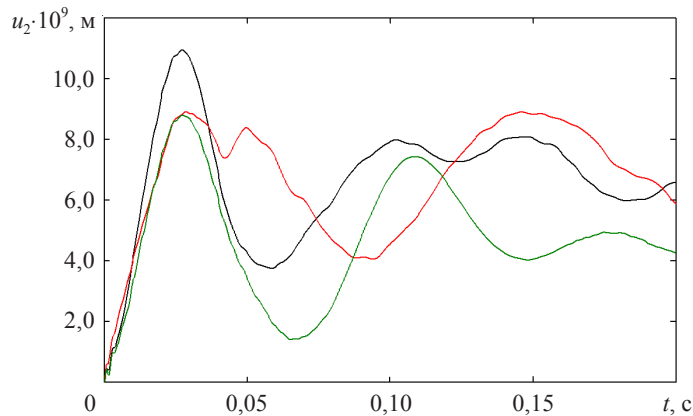


Рис. 12. ГЭ-решения в точке G

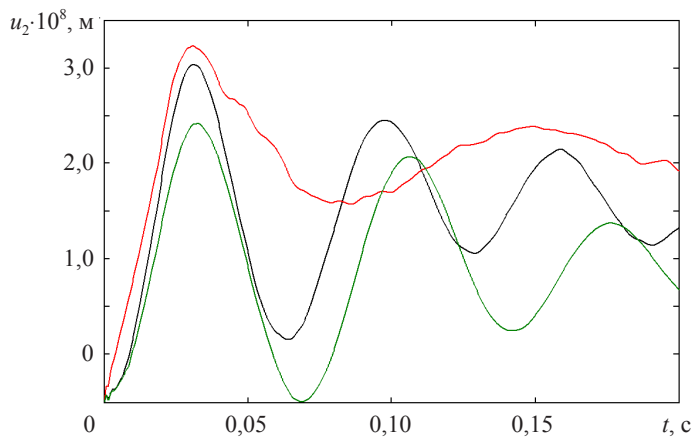


Рис. 13. ГЭ-решения в точке H

Заключение

Исследования показали, что максимальные перемещения возникли в точках, самых близких к дневной поверхности полупространства. Было проведено сравнение с соответствующими численными решениями задач о полостях по дренированной и недренированной моделям материала. Результаты гранично-элементных решений в точках сферической полости ведут себя аналогично граничным перемещениям для задачи о полости в упругом пространстве до того момента, как волны достигают дневной поверхности полупространства. Показано, что пороупругие решения могут отличаться от результатов, полученных по дренированной и недренированной моделям материала.

Список литературы

1. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
2. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости / А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2009. Вып. 71. С. 164–171.

3. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

4. *Аменицкий А.В., Игумнов Л.А., Карелин И.С.* Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2008. Вып. 70. С. 71–78.

5. Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости / А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин, С.Ю. Литвинчук // Труды МАИ: Электрон. журнал. 2010. Вып. № 40. С. 1–20.

ANALYZING THE PROBLEM OF PRESSURE ACTING INSIDE A CAVITY IN A POROELASTIC HALF-SPACE

S.Yu. Litvinchuk, A.N. Petrov, T.A. Sabaeva

Using the boundary-element approach in combination with stepped inversion of Laplace transform, the problem of a pressure jump inside a cavity situated in a poroelastic half-space has been solved. The problem was analyzed in the framework of Biot's model with four basic functions describing the behavior of the medium: displacement of the elastic skeleton and pore pressure. The solutions obtained are compared with solutions for the drained and non-drained models.

Keywords: Laplace transform, stepped method, poroelastic half-space, boundary element.