

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ*

© 2014 г.

Л.А. Игумнов, И.П. Марков

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 07.12.2013

Представлена гранично-элементная схема численного моделирования динамики трехмерных анизотропных упругих тел. Применяется прямой вариант метода граничных интегральных уравнений в сочетании с интегральным преобразованием Лапласа по времени. Ядра граничных интегральных уравнений строятся на основе смешанного интерполяционно-прямого вычисления. Гранично-элементная модель использует согласованную аппроксимацию и метод коллокации. Приводятся примеры гранично-элементных расчетов в сравнении с результатами других авторов.

Ключевые слова: граничный элемент, трехмерные задачи, динамика, анизотропия, упругость.

Введение

Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) успешно применяется к решению краевых задач динамики трехмерной изотропной теории упругости [1]. Состоянием вопроса можно ознакомиться в [2–5]. Соответствующие задачи анизотропной теории упругости имеют свою существенную специфику, поэтому имеются единичные работы, посвященные использованию метода граничных элементов (МГЭ) для решения трехмерных динамических задач анизотропной упругости на основе точных ГИУ. Отсутствие явных выражений для фундаментальных решений усложняет формулировку МГЭ для анизотропных материалов по сравнению с изотропным случаем. Сложности с численной реализацией традиционных схем МГЭ породили приближенный подход – метод двойного применения теоремы взаимности [6, 7]. В [8–10] для построения динамических матриц Грина для анизотропной среды использовано интегральное преобразование Радона, которое позволяет выразить фундаментальные решения в виде интеграла по единичной сфере и полусфере. В статье представлена гранично-элементная схема с применением таких выражений для матрицы фундаментальных решений, полученной на основе преобразования Радона. Используется точное граничное интегральное уравнение, для решения которого применяется гранично-элементная методика, возможности кото-

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (гранты 13-08-00658-а, 14-08-31410-мол_а, 14-08-00811-а, 12-08-00984-а, 12-01-00698-а, 13-08-97091-р_поволжье_а) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-593.2014.8).

рой продемонстрированы на численных примерах в сравнении с результатами, полученными другими авторами.

1. Математическая модель

Система уравнений движения Ламе анизотропного упругого тела $\Omega \subset R^3$ с границей Γ имеет вид [11]:

$$L_{ik}^0 u_k = \rho \ddot{u}_i, \quad \Omega \subset R^3; \quad i, k = \overline{1,3}; \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \tilde{u} \text{ на } \Gamma^u, \quad t_i(\mathbf{x}, t) = \tilde{t}_i \text{ на } \Gamma^t, \quad u_i(t=0) = u_i^0 \text{ в } \Omega, \quad \dot{u}_i(t=0) = 0 \text{ в } \Omega,$$

где $L_{ik}^0 = C_{ijkl} \partial_l \partial_j$ ($l, j = \overline{1,3}$) – эллиптический оператор анизотропной упругой статистики, u_i, t_i – компоненты векторов перемещений и усилий, ρ – плотность материала, Γ^u – граница Дирихле, Γ^t – граница Неймана.

Применение преобразования Лапласа по времени в задаче (1) сводит ее к задаче эллиптического типа:

$$L_{ik}^0 \hat{u}_k(x, s) = \rho s^2 \hat{u}_i, \quad \Omega \subset R^3; \quad i, k = \overline{1,3};$$

$$\hat{u}(\mathbf{x}, s) = \tilde{u} \text{ на } \Gamma^u, \quad \hat{t}_i(\mathbf{x}, s) = \tilde{t}_i \text{ на } \Gamma^t,$$

где $s = \alpha + i\omega$ – параметр преобразования Лапласа.

В качестве метода решения поставленной задачи используется прямой вариант метода граничных элементов. Интегральные представления амплитуд перемещений на границе тела $\Gamma = \partial\Omega$ имеют вид:

$$c_{kj} u_j(\mathbf{x}, s) = \int_{\Gamma} (\hat{U}_{kj}(\mathbf{x}, \xi, s) t_j(\xi, s) - \hat{T}_{kj}(\mathbf{x}, \xi, s) u_j(\xi, s)) dS(\xi), \quad k, j = \overline{1,3}, \quad (2)$$

$$c_{kj} = \delta_{kj} + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r} \hat{T}_{kj} dS,$$

где δ_{kj} – дельта Кронекера; \hat{U}_{kj} и \hat{T}_{kj} – соответственно компоненты матриц Грина и Неймана.

2. Гранично-элементная схема

Для решения начально-краевых задач применяются регуляризованные ГИУ прямого подхода и согласованная гранично-элементная модель [11]. Граница области аппроксимируется совокупностью четырехугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. Для аппроксимации граничных перемещений используются билинейные элементы, для поверхностных усилий – постоянные элементы. В качестве проекционного метода для получения дискретного аналога ГИУ используется метод коллокации. Узлы коллокации совпадают с узлами аппроксимации исходных граничных функций. Основным вопросом гранично-элементной схемы является вычисление ядер (2).

Используя преобразование Лапласа во времени, получим следующие представления изображений матриц Грина [9–13]:

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{r}, s) = \int_0^{\infty} U_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-st} dt = \hat{U}_{ij}^S(\mathbf{r}) + \hat{U}_{ij}^R(\mathbf{r}, s),$$

$$\hat{U}_{ij}^S(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{|\mathbf{n}|=1} \Gamma_{ij}^{-1}(\mathbf{n}) dL(\mathbf{n}),$$

$$dL(\mathbf{n}) \in D^S = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$\hat{U}_{ij}^R(\mathbf{r}, s) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\substack{|\mathbf{n}|=1 \\ |\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}| > 0}} \sum_{m=1}^3 \frac{k_m E_{im} E_{jm}}{\rho c_m^2} e^{-k_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|} dS(\mathbf{n}),$$

$$dS(\mathbf{n}) \in D^R = \{0 \leq b \leq 1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$c_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\rho}}, \quad k_m = \frac{s}{c_m},$$

где $\hat{U}_{ij}^S(\mathbf{r})$ и $\hat{U}_{ij}^R(\mathbf{r}, s)$ представляют собой статическую и динамическую части фундаментального решения; λ_m и E_{pm} – собственные числа и соответствующие собственные векторы матрицы Кристоффеля $\Gamma_{ij}(\mathbf{n}) = C_{iklj} n_k n_j$; c_m и k_m – фазовые скорости и волновые числа соответственно, $r = |\mathbf{r}|$ (рис. 1).

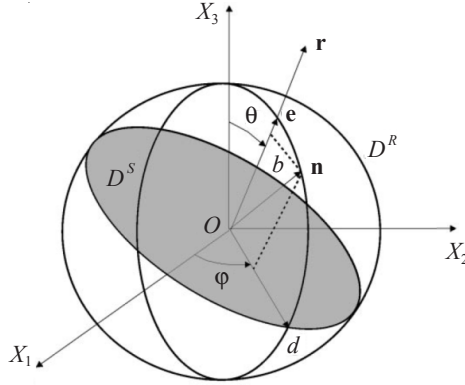


Рис. 1

Матрица Неймана строится на основе выражения:

$$\hat{T}_{ij}(\mathbf{r}, s) = -\hat{U}_{iq,r}(\mathbf{r}, s) C_{jpqr} n_p(\mathbf{r}).$$

Для получения оригинала решения применяется метод Дурбина численного преобразования Лапласа с линейной аппроксимацией трансформанты [11]:

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \bar{f}(s) e^{st} ds,$$

$$f(0) \approx \sum_{k=1}^n \left[\frac{(F_{k+1} - F_k) \Delta_k}{2\pi} \right],$$

$$f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{\pi t^2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{F_{k+1} - F_k}{\Delta_k} (\cos(\omega_{k+1} t) - \cos(\omega_k t)) + \frac{G_{k+1} - G_k}{\Delta_k} (\sin(\omega_{k+1} t) - \sin(\omega_k t)) \right],$$

где

$$\Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k, \quad \tau_k = (\omega_{k+1} + \omega_k)/2, \quad F_k = \text{Re}[\bar{f}(\alpha + i\tau_k)], \quad G_k = \text{Im}[\bar{f}(\alpha + i\tau_k)].$$

3. Численные эксперименты

Рассмотрена задача (рис. 2) о действии нагрузки величиной $\hat{t}_1 = -1 \cdot 10^5$ Па в виде функции Хевисайда по времени на анизотропное упругое тело.

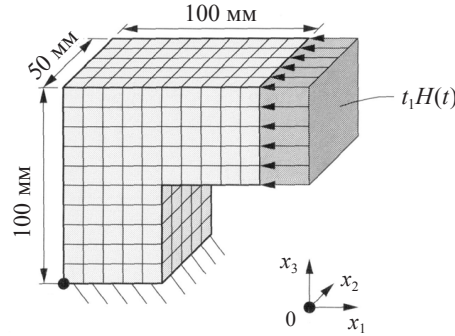


Рис. 2

Упругие модули материалов в таблице 1 указаны в ГПа, плотность в кг/м^3 .

Таблица 1

| c_{11} | c_{12} | c_{13} | c_{16} | c_{22} | c_{23} | c_{26} | c_{33} | c_{36} | c_{44} | c_{45} | c_{55} | c_{66} | ρ |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------|
| Трансверсально изотропный пьезокерамик PZT | | | | | | | | | | | | | |
| 107,6 | 63,1 | 63,9 | 0 | 107,6 | 63,9 | 0 | 100,4 | 0 | 19,6 | 0 | 19,6 | 22,2 | 7800 |
| Моноклинный графитэпоксид | | | | | | | | | | | | | |
| 95,5 | 28,9 | 4,03 | 44,7 | 25,9 | 4,65 | 15,6 | 16,3 | 0,54 | 4,40 | -1,78 | 6,45 | 32,7 | 1600 |

Исследовался отклик перемещений u_1 во времени в точке $(0; 0; 100)$. Для пьезокерамика сравнение полученных результатов с результатами из [7] приведено на рис. 3, для графитэпоксида – на рис. 4. Количество элементов на рабочей ГЭ-сетке 686.

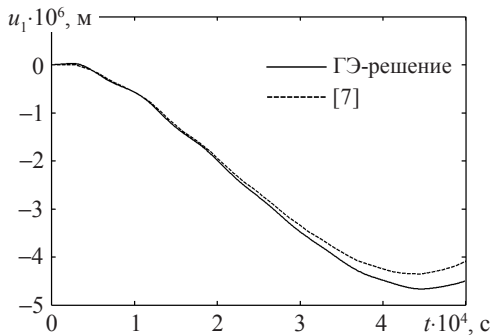


Рис. 3

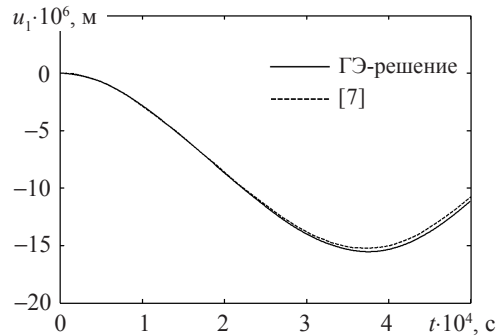


Рис. 4

Заключение

Представлена гранично-элементная схема решения трехмерных динамических задач анизотропной линейной теории упругости. Применен прямой вариант метода ГИУ в сочетании с методом Дурбина численного обращения интегрального преобразования Лапласа. Используется прямое вычисление ядер граничных интегральных уравнений. Работоспособность метода продемонстрирована на численном решении задач и сравнении с результатами других авторов.

Список литературы

1. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во КГУ, 1986. 296 с.
2. *Beskos DE*. Boundary element methods in dynamical analysis // *Appl. Mech. Rev.* 1987. 40(1). P. 1–23.
3. *Beskos DE*. Boundary element methods in dynamical analysis. Part II (1986–1996) // *Appl. Mech. Rev.* 1997. 50(3). P. 149–197.
4. *Chudinovich I*. Boundary equations in dynamic problems of the theory of elasticity // *Acta Appl. Math.* 2001. 65. P. 169–183.
5. *Costabel M*. Time-dependent problems with the boundary integral equation method // *Encyclopedia of Computational Mechanics*. Vol. 1. New York – Chister – Weinheim: John Wiley & Sons, 2005 [Chapter 25].
6. *Nardini D., Brebbia C.A.* A new approach to free vibration analysis using boundary elements // In: *Brebbia C.A.* (Ed.) *Boundary element methods in engineering*. Berlin: Springer, 1982. P. 313–326.
7. *Gaul L., Kogl M., Wagner M.* *Boundary element methods for engineers and scientists*. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 2003. 488 p.
8. *Wang C.Y., Achenbach J.D.* Elastodynamic fundamental solution for anisotropic solids // *Geophys. J. Int.* 1994. 118. P. 384–392.
9. *Budreck D.E.* The elastic wave Green's function // *Q. Jl. Mech. Appl. Math.* 1993. Vol. 46. P. 1–26.
10. *Norris A.N.* Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1994. 447. P.175–188.
11. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
12. *Dravinski M., Zheng T.* Numerical evaluation of three-dimensional time-harmonic Green's functions for a non isotropic full-space // *Wave Motion*. 2000. 32(2). P. 141–151.
13. *Furukawa A., Takahiro S., Sohichi H.* Convolution quadrature time-domain boundary element method for 2D and 3D elastodynamic analyses in general anisotropic elastic solids // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2014. 39. P. 64–74.

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ANALYZING THE DYNAMICS OF ANISOTROPIC ELASTIC BODIES

L.A. Igumnov, I.P. Markov

A boundary-element scheme for numerically modeling the dynamics of 3-D anisotropic elastic bodies is presented. A direct version of the boundary integral equation method is used in combination with the time integral Laplace transform. Kernels of boundary integral equations are constructed using combined interpolation-direct computation. The boundary-element model uses a matched approximation and the collocation method. Examples of boundary-element analyses are presented and compared with the results of other authors.

Keywords: boundary element, three-dimensional problems, dynamics, anisotropy, elasticity.