

УДК 539.3

**СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА  
ГРАНИЧНО-ВРЕМЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
С МЕТОДОМ РУНГЕ – КУТТЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ  
ДИНАМИКИ ТРЕХМЕРНЫХ УПРУГИХ И ПОРОУПРУГИХ ТЕЛ\***

© 2014 г.

**Л.А. Игумнов, Я.Ю. Ратаушко**

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского*

*igumnov@mech.unn.ru*

*Поступила в редакцию 20.12.2013*

Рассматривается развитие шаговых по времени гранично-элементных схем компьютерного моделирования решений краевых задач трехмерной динамики упругости и пороупругости. Гранично-элементная схема опирается на шаговый по времени метод численного обращения преобразования Лапласа на узлах схемы Рунге – Кутты. Применяется шаговая схема с ключом, возникающая на основе интегрирования сильно осциллирующих функций. Общий подход продемонстрирован на численных примерах.

*Ключевые слова:* метод граничных элементов, шаговая схема, схема Рунге – Кутты, интегрирование сильно осциллирующих функций, трехмерная динамика, упругость, пороупругость.

**Введение**

В работах [1–3] предложен оригинальный подход к построению шаговых по времени схем метода граничных элементов (МГЭ). В работах [4–6] использована схема МГЭ, опирающаяся на шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа. В работах [4, 7] формулируется модификация метода с переменным шагом интегрирования при подсчете весовых множителей квадратурной суммы. Иное расширение гранично-элементной схемы представлено в статьях [8, 9], предлагающих совместное использование МГЭ с методами Рунге – Кутты. Вслед за [10] в этой статье рассматривается совместное применение шаговой схемы на узлах методов Рунге – Кутты с МГЭ для решения трехмерных упругих и пороупругих задач.

**Модели упругой и пороупругой сред**

Формальное применение преобразования Лапласа (параметр  $s$ ) к системе дифференциальных уравнений Ламе для изотропной упругой среды сводит ее к следующей задаче эллиптического типа относительно изображения перемещения  $\tilde{y}_i$ :

---

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (гранты 14-08-31415-мол\_а, 14-08-00811-а, 12-08-00984-а, 13-08-97091-р\_поволжье\_а) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-593.2014.8).

$$\begin{aligned}L_{ik}^0 \tilde{u}_k(x, s) + \tilde{f}_i &= \rho s^2 \tilde{u}_i, \\ \tilde{u}(x, s) &= \bar{u}(x, s) \text{ на } S^u, \\ \tilde{t}_n(x, s) &= \bar{t}_n(x, s) \text{ на } S^t,\end{aligned}$$

где  $L_{ik}^0 = G\Delta + (K + G/3)\text{grad div}$  – эллиптический оператор изотропной упругой статики,  $\rho$  – плотность материала,  $\tilde{f}_i$  – объемная сила,  $G, K$  – константы упругости.

Краевая задача для полной модели Био пороупругой среды в преобразованиях Лапласа для смещения  $\tilde{u}_i$  и порового давления  $\tilde{p}$  имеет вид [3]:

$$\begin{aligned}G\tilde{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\tilde{u}_{j,ij} - (\alpha - \beta)\tilde{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\tilde{u}_i &= -\tilde{F}_i, \\ \frac{\beta}{s\rho_f}\tilde{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{R}\tilde{p} - (\alpha - \beta)s\tilde{u}_{i,i} &= -\tilde{a}, \\ \beta &= \frac{\kappa\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2\kappa(\rho_a + \phi\rho_f)},\end{aligned}$$

$$\tilde{t}_l(x, s) = g_l(x, s), \quad l = \overline{1,3}, \quad \tilde{t}_4 = \tilde{q}, \quad x \in S^t \cap S,$$

$$\tilde{u}_l(x, s) = f_l(x, s), \quad l = \overline{1,3}, \quad \tilde{u}_4 = \tilde{p}, \quad x \in S^u \cap S,$$

где  $\phi$  – пористость;  $\kappa$  – проницаемость;  $\alpha$  и  $R$  – коэффициенты, описывающие взаимодействие упругого скелета с наполнителем;  $\rho, \rho_a, \rho_f$  – плотности материала, присоединенной массы и жидкого наполнителя соответственно;  $\tilde{F}_i, \tilde{a}$  – объемные силы.

### Граничные интегральные уравнения

Формально решение краевых задач может быть сведено к решению граничного интегрального уравнения вида

$$\begin{aligned}\alpha_\Omega u_k(x, s) + \int_\Gamma (T_{ik}(x, y, s)u_i(y, s) - T_{ik}^0(x, y, s)u_i(x, s) - U_{ik}(x, y, s)t_i(y, s))d\Gamma &= 0, \\ (x \in \partial\Gamma), \quad t &= [t_1, t_2, t_3, \gamma q]^T, \quad u = [u_1, u_2, u_3, \gamma p]^T, \\ U(x, t) &= L_{t \rightarrow s}^{-1}(U(x, s)), \quad T(x, t) = L_{t \rightarrow s}^{-1}(T(x, s)),\end{aligned}$$

где

$$U(x, s) = \begin{bmatrix} U_{ij}^s(x, y, s) & -P_j^s(x, y, s) \\ U_i^f(x, y, s) & -P^f(x, y, s) \end{bmatrix}, \quad T(x, s) = \begin{bmatrix} T_{ij}^s(x, y, s) & Q_j^s(x, y, s) \\ T_i^f(x, y, s) & Q^f(x, y, s) \end{bmatrix}$$

– соответственно фундаментальные и сингулярные решения системы дифференциальных уравнений в частных производных трехмерной теории пороупругости [3, 11]. Параметр  $\gamma$  здесь определяет принадлежность уравнения к теории пороупругости ( $\gamma = 1$ ) или упругости ( $\gamma = 0$ ). В упругой постановке  $U(x, s) = U^s(x, y, s)$ ,  $T(x, s) = T^s(x, y, s)$ .

Выделение особенностей ГИУ позволяет провести регуляризацию и построить гранично-элементную схему [3, 12].

## Обращение преобразования Лапласа: шаговая схема на узлах метода Рунге – Кутты

Для интегрального преобразования Лапласа

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

рассмотрим шаговую схему численного обращения на узлах метода Рунге – Кутты, имеющего следующий вид (нотация в виде таблицы Бутчера):

$$\frac{c|A^T}{b^T}, \quad A \in R^{m \times m}, \quad b, c \in R^m.$$

Опираясь на [9], можем записать систему выражений для значений оригинала функции на шагах  $0, \dots, N$ :

$$f_0 = 0, \quad f_n = b^T A^{-1} \sum_{k=1}^n \omega_k(\Delta t), \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{f}(s) s e^{-in\varphi}, \quad s = \frac{\gamma(z)}{\Delta t}, \quad z = R e^{i\varphi}, \quad \varphi = l \frac{2\pi}{L},$$

$$\gamma(z) = A^{-1} - z A^{-1} [1] b^T A^{-1}.$$

В качестве конкретного примера схемы Рунге – Кутты, удовлетворяющей всем необходимым условиям, выберем схему Радо [9].

Модификация формулы для вычисления  $\omega_n$  с переменным шагом интегрирования и линейной аппроксимацией функции выглядит следующим образом:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=0}^{L-1} [\tilde{f}(s_k) s_k e^{-in\varphi_k} + \tilde{f}(s_{k+1}) s_{k+1} e^{-in\varphi_{k+1}}] \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2}, \quad s_k = \frac{\gamma(z_k)}{\Delta t}.$$

Для случая когда  $\tilde{f}(s)/e^{in\varphi}$  – сильно осциллирующая функция, целесообразно использовать комбинированную формулу, учитывающую специфику интегрирования таких функций [4, 7]:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} e^{-in \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}} [D_1(w) \tilde{f}(s_k) s_k + D_2(w) \tilde{f}(s_{k+1}) s_{k+1}], \quad s_k = \frac{\gamma(z_k)}{\Delta t},$$

$$w = -n \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2},$$

$$D_{1,2}(w) = \begin{cases} \frac{\sin w}{w} \pm \frac{w \cos w - \sin w}{w^2} i & \text{при } |w| > w_*, \\ e^{\mp wi} & \text{при } |w| \leq w_*, \end{cases}$$

где  $w_*$  – ключ для интегрирования сильно осциллирующих функций (в данном случае  $w_* = 3$ ).

## Задача об упругом призматическом теле

Рассматривается задача о действии торцевой силы на однородное упругое призматическое тело с жестко закрепленным концом. Краевая задача приведена на рис. 1.

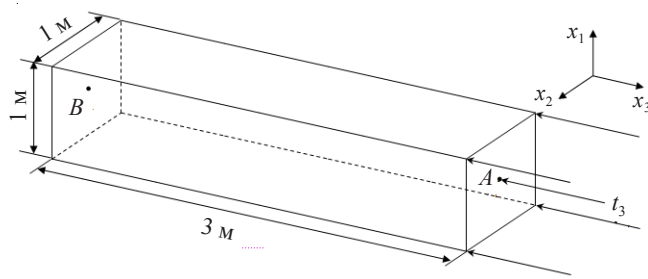


Рис. 1

Граничные условия на торцах:

$x_3 = 0$ :

– известные:  $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$ ,

– неизвестные:  $t_1, t_2, t_3$ ;

$x_3 = l$ :

– известные:  $t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 1 \text{ Н/м}^2$ ,

– неизвестные:  $u_1, u_2, u_3$ ;

на боковой поверхности:

– известные:  $t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 0$ ,

– неизвестные:  $u_1, u_2, u_3$ .

Отклики перемещений, вызванные силой  $F = 1 \text{ Н/м}^2$ , наблюдаются в точке  $A$  консоли длиной  $l = 3 \text{ м}$ . Для расчетов взяты следующие параметры материала:  $E = 2,11 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ;  $\nu = 0$ ;  $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$  ( $c = 5184,5 \text{ м/с}$ ).

Результаты вычислений при  $N = \mathcal{L}/2 = 500$ ,  $N = \mathcal{L}/2 = 1000$  представлены на рис. 2, 3 соответственно, где  $N$  – количество шагов по времени,  $\mathcal{L}$  – общее количество узлов по углу  $\varphi$  (с учетом двукратного использования узлов). Используются модификации шагового метода обращения преобразования Лапласа на основе метода Эйлера и на основе схемы Радо. Для интегрирования по углу  $\varphi$  с переменным шагом рассмотрена кусочно-однородная сетка на промежутках  $[0, \pi/2]$ ,  $[\pi/2, 3\pi/2]$ ,  $[3\pi/2, 2\pi]$  с процентным распределением узлов 47,5; 5; 47,5. Гранично-элементная сетка содержит 224 квадратных элемента. На рис. 2 и 3 обозначено:

- шаговый метод на основе метода Эйлера, переменный шаг;
- шаговый метод на основе схемы Радо, постоянный шаг;
- шаговый метод на основе схемы Радо, переменный шаг;
- — — аналитическое решение.

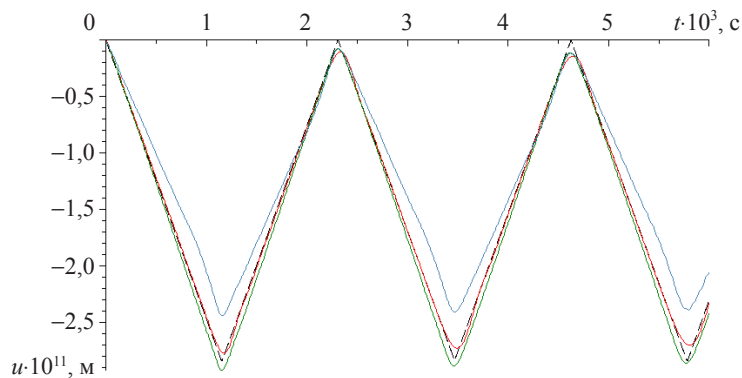


Рис. 2

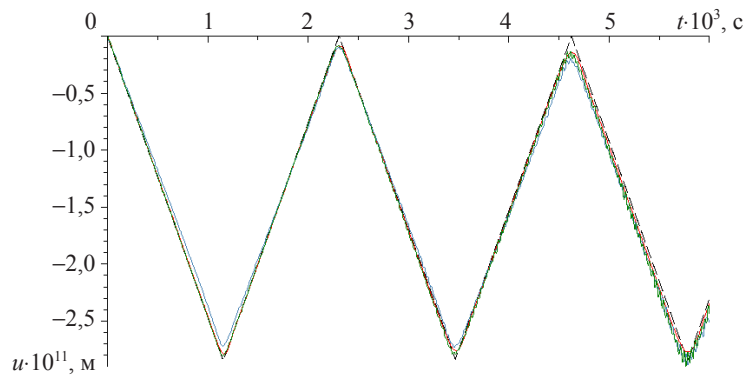


Рис. 3

Подход, основанный на схеме Радо, независимо от числа узлов аппроксимации дает меньшее запаздывание и в целом близок по точности аппроксимации решения к традиционному шаговому методу. На сетке  $N = \mathcal{L}/2 = 500$  отчетливо виден выигрыш от использования переменного шага интегрирования. Однако на сетке  $N = \mathcal{L}/2 = 1000$  решения, полученные с помощью схемы Радо, начиная примерно с середины рассмотренного промежутка времени, искажены нарастающими осцилляциями. Это объясняется численной ошибкой, внесенной при расчетах значений обращаемой функции и обусловленной достаточно большим шагом пространственной сетки и достаточно малым – временной. На рис. 4 представлено сравнение решения, полученного с использованием схемы на основе метода Эйлера, с аналогичными результатами ( $\mathcal{L}/2 = 1000$ ) при меньшем числе шагов по времени для схемы на основе метода Радо. На рис. 4 обозначено:

- шаговой метод на основе метода Эйлера,  $N = 1000$ ;
- шаговой метод на основе схемы Радо,  $N = 800$ ;
- шаговой метод на основе схемы Радо,  $N = 500$ ;
- — — аналитическое решение.

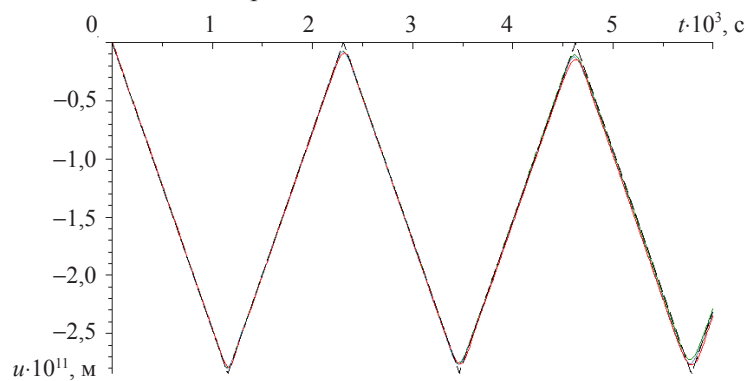


Рис. 4

Видно, что схема на основе метода Радо позволяет добиться гладкости графика за счет увеличения шага по времени, при этом не проигрывая в точности аппроксимации решения по сравнению с решением, полученным по традиционному шаговому методу. На сетке из 896 граничных элементов шаговая схема на основе метода Радо также дает лучшие результаты (рис. 5).

На рис. 5 обозначено:

- шаговой метод на основе метода Эйлера,  $N = 1000$ ;
- шаговой метод на основе схемы Радо,  $N = 1000$ ;
- — — аналитическое решение.

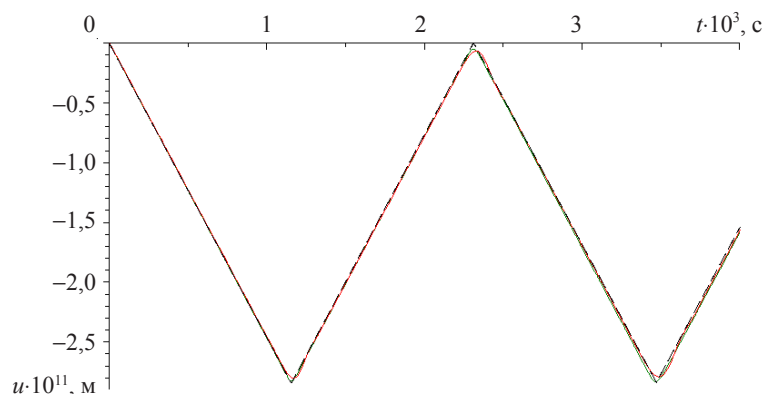


Рис. 5

### Задача о пороупругом призматическом теле

Рассматривается задача о действии торцевой силы на пороупругое призматическое тело с жестко закрепленным концом (см. рис. 1). Отклики перемещения  $u_3$  и порового давления  $p$ , вызванные силой  $f(t) = 1 \text{ Н/м}^2$ , наблюдаются соответственно в точках  $A$  и  $B$  консоли длиной  $l = 3 \text{ м}$ . Для расчетов взяты следующие параметры материала:  $K = 4,8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $G = 7,2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho = 2458 \text{ кг/м}^3$ ,  $\phi = 0,19$ ,  $K_s = 3,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $K_f = 3,3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\kappa = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$ .

Для вычисления отклика перемещения (порового давления) выбрана гранично-элементная сетка из  $X = 224$  элементов,  $N = 500$  (125) шагов по времени; распределение  $\mathcal{L}$  узлов по углу  $\phi$  кусочно-равномерное на промежутках  $[0, 1/2]$ ,  $[1/2, \pi]$  ( $[0, \pi/2]$ ,  $[\pi/2, \pi]$ ) в отношении 95% / 5%. На рис. 6, 7 представлено соответственно сравнение откликов перемещения и давления, полученных с помощью шаговой схемы на основе метода Радо при разных значениях  $\mathcal{L}$ , с результатами шаговой схемы на основе метода Эйлера при  $N = \mathcal{L} = 2000$  [6]. Увеличение  $\mathcal{L}$  свыше 500 для перемещений и 1000 для давлений не приводит к дальнейшему уточнению результатов.

Видно, что для получения результата с помощью шагового метода на узлах схемы Радо достаточно меньшего числа как шагов по времени, так и расчетных узлов по углу  $\phi$ . Это позволяет значительно сократить вычислительные затраты, получая при этом лучшее решение. Для исследования сходимости схемы при измельчении пространственной сетки рассмотрены сетки из  $X = 224$ ,  $X = 504$  и  $X = 896$  граничных элементов. На рис. 8, 9 приведено соответственно сравнение кривых перемещения и давления, полученных с помощью шаговой схемы на основе метода Радо на разных гранично-элементных сетках, и результатов шаговой схемы на основе метода Эйлера при  $N = \mathcal{L} = 2000$  [6].

На рис. 6 обозначено:

- $\mathcal{L} = N = 500$ , —  $\mathcal{L} = 2N = 1000$ , —  $\mathcal{L} = 4N = 2000$ ,
- — — решение [6], — — — аналитическое решение.

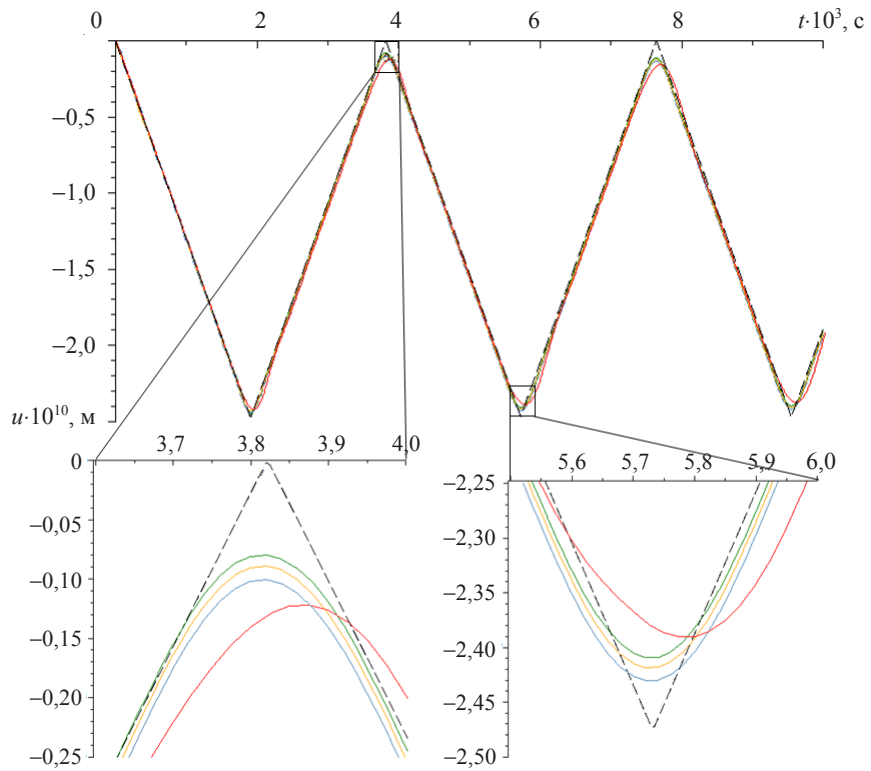


Рис. 6

На рис. 7 обозначено:

—  $\xi = 4N = 500$ , 
 —  $\xi = 8N = 1000$ , 
 —  $\xi = 16N = 2000$ ,  
— решение [6], 
 - - - аналитическое решение.

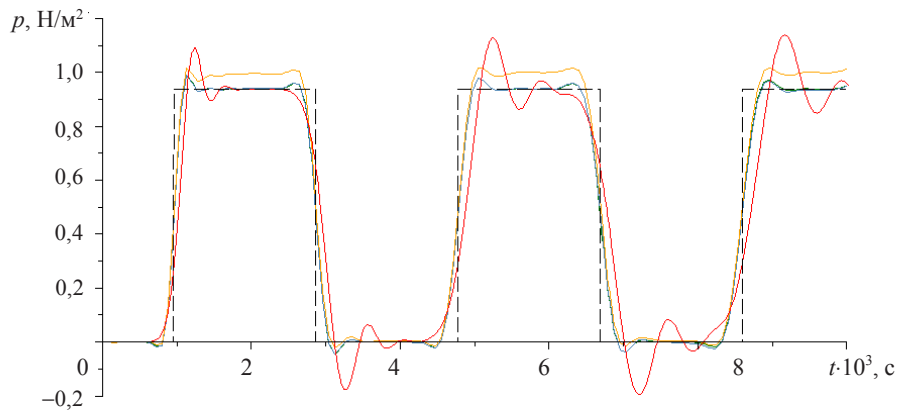


Рис. 7

На рис. 8 обозначено:  
 —  $L = N = 500, X = 224$ ; —  $L = N = 500, X = 504$ ; —  $L = N = 500, X = 896$ ;  
 — решение [6]; — аналитическое решение.

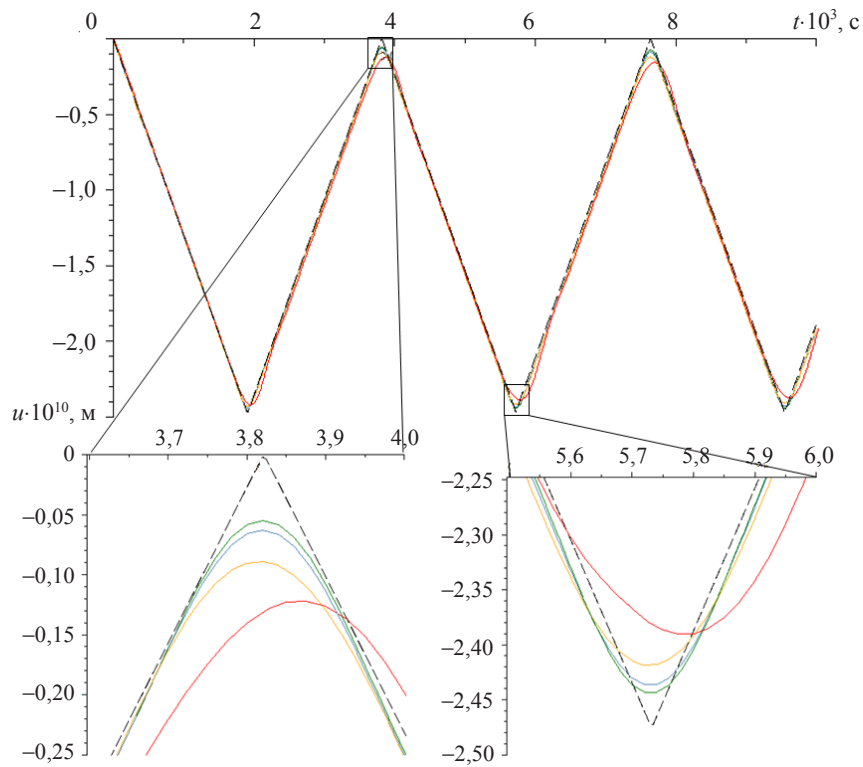


Рис. 8

На рис. 9 обозначено:  
 —  $L = N = 1000, X = 224$ ; —  $L = N = 1000, X = 504$ ; —  $L = N = 1000, X = 896$ ;  
 — решение [6]; — аналитическое решение.

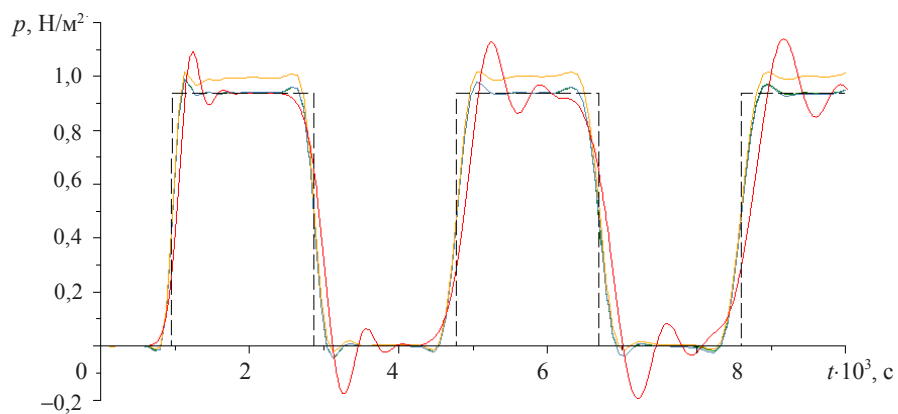


Рис. 9

Графики показывают, что решения, полученные при  $X = 504$  и  $X = 896$ , ближе к аналитическому решению, чем решения, полученные на самой крупной из сеток.



Решение, построенное с помощью шагового метода на основе схемы Эйлера, заметно уступает в приближении как отклика перемещения, так и отклика порового давления шаговому методу на узлах схемы Радо.

В целом шаговая по времени гранично-элементная схема с численным обращением преобразования Лапласа методом на основе схемы Радо чувствительнее к погрешностям вычислений  $\tilde{f}(s)$ , чем схема на основе метода Эйлера, вследствие чего необходимо проявлять большую осторожность при расчетах. Тем не менее, при надлежащем выборе параметров она позволяет получать более точные результаты при ошутимом сокращении вычислительных затрат.

#### Список литературы

1. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. I // Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 129–145.
2. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. II // Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 413–425.
3. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
4. Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А. Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2009. 180 с.
5. Гранично-элементное моделирование на основе квадратур сверток динамического состояния составных упругих тел / А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук // Вычислительная механика сплошных сред. Пермь: Изд-во ИМСС УрО РАН, 2008. Т. 1, №3. С. 5–14.
6. Петров А.Н. Моделирование динамики составных пороупругих тел на основе метода гранично-временных элементов: Дис... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2013. 135 с.
7. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Гранично-элементная методика на основе модифицированного метода квадратур сверток в динамических задачах упругих тел // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2008. Вып. 70. С. 150–158.
8. Banjai L. Multistep and multistage convolution quadrature for the wave equation: Algorithms and experiments // SIAM J. Sci. Comput. 2010. 32 P. 2964–2994.
9. Banjai L., Messner M., Schanz M. Runge – Kutta convolution quadrature for the boundary element method // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2012. P. 90–101.
10. Игумнов Л.А., Ратаушко Я.Ю. Шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа на узлах схемы Рунге – Кутты с использованием переменного шага интегрирования // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2013. №75(4). С. 280–287.
11. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости / А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2009. №71. С. 164–171.
12. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

#### APPLICATION OF TIME-STEPPING BOUNDARY ELEMENT SCHEME COMBINED WITH RUNGE – KUTTA METHOD IN 3D ELASTIC AND POROELASTIC BODY DYNAMICS RESEARCH

L.A. Igumnov, Ya.Yu. Rataushko

The paper is dedicated to the development of time-stepping boundary element schemes for computer modeling of 3D elastic and poroelastic dynamic boundary problems solutions. Boundary element scheme is based on the time-step method for numerical inversion of Laplace transformation, in its

turn built on Runge – Kutta scheme nodes. Time-stepping scheme with a key, derived from highly oscillatory integration conditions, is applied. The overall approach is demonstrated in some numerical examples.

*Keywords:* boundary element method, time-stepping scheme, Runge – Kutta scheme, highly oscillatory quadrature, 3D dynamics, elasticity, poroelasticity.