

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТАЛИ ПО ДВУЗВЕННЫМ ЛОМАНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

© 2014 г. В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев, В.И. Гультаев

Тверской государственной технической университет

kafsm@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.02.2014

Представлены результаты теоретических расчетов процессов упругопластического деформирования стали 45 по ломаным траекториям. Использованы теория процессов сложного нагружения А.А. Ильюшина и универсальные аппроксимации функционалов процессов В.Г. Зубчанинова. Для решения основных уравнений теории процессов применялся численный метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Для оценки достоверности расчетных данных результаты сопоставлены с результатами экспериментальных исследований, полученных на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ.

Ключевые слова: упругость, пластичность, сложное нагружение, функционалы пластичности, векторные и скалярные свойства материалов, численный метод, испытательный комплекс СН-ЭВМ.

1. Модифицированная математическая модель теории процессов упругопластического деформирования

В теории процессов упругопластического деформирования тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) можно представить в виде [1, 2]:

$$(\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + \sigma(S_{ij}^*), \quad (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + \Theta(\Theta_{ij}^*), \quad (1)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_{ij}\Theta_{ij}} \quad (2)$$

– модули шаровых тензоров и девиаторов (первые и вторые инварианты соответственно);

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0, \quad S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\sigma}, \quad \Theta_{ij}^* = \frac{\Theta_{ij}}{\Theta} \quad (3)$$

– компоненты девиаторов и их направляющих тензоров соответственно.

При простом нагружении $S_{ij}^* = \Theta_{ij}^*$ и с учетом упругости объемной деформации

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\Theta}\Theta_{ij}, \quad \sigma = \Phi(\Theta) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где K – упругий модуль объемной деформации, $\Phi(\mathcal{E})$ – универсальная единая диаграмма деформирования.

При сложном нагружении $(S_{ij}^*) \neq (\mathcal{E}_{ij}^*)$, $(\dot{S}_{ij}^*) \neq (\dot{\mathcal{E}}_{ij}^*)$, и тензорам в линейном пространстве E_6 ставятся в соответствие векторы напряжений \bar{S} и деформаций $\bar{\mathcal{E}}$:

$$\begin{cases} \bar{S} = \bar{S}^0 + \bar{\sigma}, & \bar{S}^0 = S_0 \hat{i}_0, & \bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \\ \bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}^0 + \bar{\mathcal{E}}, & \bar{\mathcal{E}}^0 = \mathcal{E}_0 \hat{i}_0, & \bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5), \end{cases} \quad (5)$$

где $\{\hat{i}_k\}$ – ортонормированный неподвижный базис пятимерного подпространства E_5 ;

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, & S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, & S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{22} - S_{33}), & S_3 = \sqrt{2}S_{12}, & S_4 = \sqrt{2}S_{23}, & S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \mathcal{E}_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, & \mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathcal{E}_{11}, & \mathcal{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}_{22} - \mathcal{E}_{33}), & \mathcal{E}_3 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{12}, & \mathcal{E}_4 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{23}, & \mathcal{E}_5 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{13} \end{cases} \quad (6)$$

– компоненты (координаты) векторов напряжений и деформаций;

$$\sigma = \sqrt{S_k S_k} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_k \mathcal{E}_k} = \sqrt{\mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{ij}} \quad (7)$$

– модули векторов $\bar{\sigma}$ и $\bar{\mathcal{E}}$.

Концы векторов напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\mathcal{E}}$ описывают с течением времени в линейных координатных пятимерных подпространствах Σ_5 и E_5 траектории нагружения и деформирования, которые отображают в этих подпространствах процессы нагружения и деформирования материала при его формоизменении.

Эти процессы считаются заданными, если в каждой точке тела с координатами x_k ($k = 1, 2, 3$) в физическом пространстве напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} заданы как непрерывные функции времени t , температуры T и других нетермомеханических параметров β . Таким образом, переменные векторы напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\mathcal{E}}$, характеризующие траектории и процессы, должны зависеть от инвариантов тензоров, параметров кривизны и кручения траекторий κ_m ($m = 1, 2, 3, 4$), температуры T и параметров β .

В основу математической модели положена нелокальная форма определяющего соотношения для напряжений и деформаций [1, 2]:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N_1 \hat{p}_1 + N_\sigma \hat{\sigma} + N_\mathcal{E} \hat{\mathcal{E}}, \quad (8)$$

где

$$\hat{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 (\cos \vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin \vartheta_2 \hat{p}_3) \quad (9)$$

– единичный вектор напряжений, ϑ_1, ϑ_2 – его полярные сферические координаты (углы сближения и депланации) в репере Френе $\{\hat{p}_k\}$ ($k = 1, 2, 3$);

$$\begin{cases} N_\sigma = \frac{d\sigma}{ds} - N_1 \cos \vartheta_1 - N_\mathcal{E} \cos \alpha, \\ N_1, N_\mathcal{E} = f\{\varepsilon_0, \mathcal{E}, \kappa_1, \kappa_2, T, \beta\}_{s(t)}; \end{cases} \quad (10)$$

κ_1, κ_2 – параметры кривизны и кручения, характеризующие сложность траектории с длиной дуги $s(t)$; $\cos \alpha = \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathcal{E}}$.

Для определения углов ϑ_1 и ϑ_2 используются дифференциальные уравнения [1]:

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\sigma} [-M_1 \sin \vartheta_1 + M_2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2], \\ \sin \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + \kappa_2 \right) = \kappa_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_2}{\sigma} \cos \vartheta_2. \end{cases} \quad (11)$$

В (11) величины M_1, M_2 определяются через $N_1, N_\sigma, N_\varepsilon$ по известным зависимостям [1].

Для случая плоских траекторий ($\vartheta_2 = 0, \kappa_2 = 0$) определяющие соотношения приведены к системе уравнений задачи Коши, которая без учета \mathcal{E}_2 -эффекта имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{ds} = N_1 \frac{d\mathcal{E}_k}{ds} + N_\sigma \frac{S_k}{\sigma} \quad (k=1, 3), \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} = -\left(\frac{N_1}{\sigma} \sin \vartheta_1 + \kappa_1 \right). \end{cases} \quad (12)$$

Для конкретизации функционалов при моделировании процессов сложного деформирования используются аппроксимации В.Г. Зубчанинова [1]:

$$\begin{cases} N_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q, \\ N_\sigma = \frac{d\sigma}{ds} - N_1 \cos \vartheta_1, \end{cases} \quad (13)$$

где $f = (1 - \cos \vartheta_1)/2$; G, G_p – упругий и пластический модули сдвига для начально-изотропного материала. Здесь и далее индекс «нолик» относится к величинам в точке K излома траектории.

При простом (пропорциональном) нагружении в условиях сложного напряженно-деформированного состояния (НДС) используется закон единой универсальной кривой упрочнения Роша и Эйхингера $\sigma = \Phi(\mathcal{E})$. Этот закон может быть получен в опыте на простое растяжение. При сложных нагружениях, близких к простому, по траекториям малой и средней кривизны используется приближенный закон упрочнения Одквиста – Ильюшина

$$\sigma = \Phi(s), \quad (14)$$

где s – длина дуги траектории деформирования, которая является одним из параметров сложного деформирования, всегда $s \geq \mathcal{E}$. При этом достаточно малые значения параметров кривизны κ_1 и кручения κ_2 слабо влияют на процессы сложного нагружения и ими пренебрегают. Для аппроксимации диаграммы прослеживания процесса Одквиста – Ильюшина для траекторий деформирования малой и средней кривизны используется выражение [1]:

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \frac{2G}{\alpha} (1 - e^{-\alpha s}) \quad \text{при } 0 \leq s \leq s^T, \\ \sigma^T + 2G_*(s - s^T) + \sigma_*(1 - e^{-\beta(s-s^T)}) \quad \text{при } s > s^T, \end{cases} \quad (15)$$

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 2G_* + \sigma_* \beta e^{-\beta(s-s^T)} \quad \text{при } s > s^T,$$

где $\sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_T$, σ_T – предел текучести при растяжении; $G_*, \alpha, \beta, \sigma_*$ – параметры, экспериментально определяемые из базовых опытов при простом нагружении. Ме-

тодика определения указанных выше параметров приведена в монографиях [1, 2].

При сложной разгрузке материала для описания нырка напряжений, начиная с некоторой точки K , и последующего сложного активного нагружения принимаются универсальные выражения

$$\sigma(s) = \Phi(s) + Af_0^p \Omega(\Delta s), \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} + Af_0^p \frac{d\Omega}{ds}, \quad (16)$$

где

$$\Omega(s) = -[\gamma \Delta s e^{-\gamma \Delta s} + b(1 - e^{-\gamma \Delta s})] \quad (17)$$

– функция, описывающая нырок напряжений;

$$\frac{d\Omega}{ds} = -\gamma e^{-\gamma \Delta s} (1 + b - \gamma \Delta s); \quad (18)$$

$$f_0^p = \left(\frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2} \right)^p; \quad A = \frac{1}{\gamma(1+b)} \left(\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G \right); \quad (19)$$

$$\Delta s = s - s_K^T; \quad \frac{d\Phi_0}{ds} = 2G_* + \beta \sigma_* e^{-\beta} (s_K^T - s^T).$$

Тогда для производной $d\sigma/ds$ имеем выражение

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} - \left(\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G \right) f_0^p \left(1 - \frac{\gamma \Delta s}{1+b} \right) e^{-\gamma \Delta s}. \quad (20)$$

Параметры b, γ, A, p, q для универсальных аппроксимаций (16)–(20) при сложной разгрузке на нырке напряжений и последующего активного упругопластического деформирования определяются на основе базовых опытов типа веера двузвенных траекторий. Методика их определения описана в монографии [1]. Эти опыты позволяют также найти необходимые для расчетов вторичные пределы текучести на нырке напряжений в зависимости от угла излома ϑ_1^0 траекторий деформирования.

Определяющие соотношения (12) при известных аппроксимациях могут быть проинтегрированы численно при известных начальных условиях задачи Коши для каждого участка траектории деформирования.

2. Моделирование процессов деформирования по плоской ломаной двузвенной траектории

По рассмотренной математической модели были проведены численные расчеты и экспериментальные исследования процесса упругопластического деформирования трубчатого образца из стали 45 по двузвенной ломаной траектории с углом излома 135° . Экспериментальные исследования были проведены на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ им. А.А. Ильюшина в лаборатории механических испытаний кафедры «Сопrotивление материалов, теория упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета. Программа испытаний в пространстве деформаций А.А. Ильюшина приведена на рис. 1.

На первом прямолинейном участке программы испытаний реализовывалось кручение до значения $\vartheta_3 = 2,5\%$, на втором участке производился излом траектории на угол $\varphi = 135^\circ$ и реализовывалось пропорциональное растяжение с кручением до значений компонент $\vartheta_1 = 2,5\%$ и $\vartheta_3 = 0$.

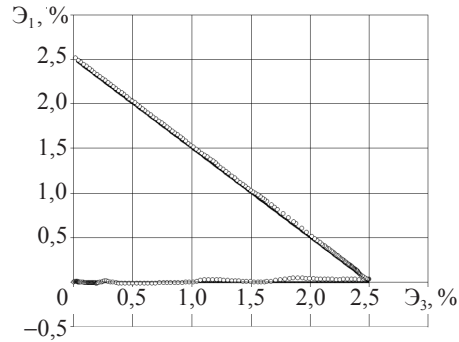


Рис. 1

Для проведения численных расчетов программа плоской ломаной траектории деформирования задавалась в виде

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_1^* + \Delta s \sin \varphi, \\ \Delta_3 = \Delta_3^* + \Delta s \cos \varphi, \end{cases} \quad (21)$$

где за параметр прослеживания процесса принималась длина дуги траектории деформирования s , $\varphi = \text{const}$. Производные от компонент вектора деформаций равны:

$$\frac{d\Delta_1}{ds} = \sin \varphi, \quad \frac{d\Delta_3}{ds} = \cos \varphi. \quad (22)$$

Расчеты были проведены методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности с помощью программного комплекса MathWorks Matlab с шагом по длине дуги траектории деформирования $h = 0,0001 = 0,01\%$. Алгоритм программы по применению метода Рунге – Кутты приведен в монографии [3].

На рис. 2 представлена опытная диаграмма процесса деформирования материала, отмеченная кружочками, и ее аппроксимация по формуле (15), положенная в основу численных расчетов. В расчетах для $\sigma = \Phi(s)$ было принято $\sigma^T = 285$ МПа, $s_*^T = 9 \cdot 10^{-3}$, $2G = 1,57 \cdot 10^5$ МПа, $\beta = 70$, $\alpha = 900$, $\sigma_* = 78,8$ МПа, $2G_* = 1619$ МПа. Для описания нырка напряжений по соответствующей методике [1] были определены значения параметров $b = 0,2$, $\gamma = 400$, $p = 1$, $q = 0,8$. Начальные условия для точки K излома траектории $s_K^T = 25 \cdot 10^{-3}$, $\sigma_K^T = 364$ МПа, $\vartheta_1^0 = 135^\circ$.

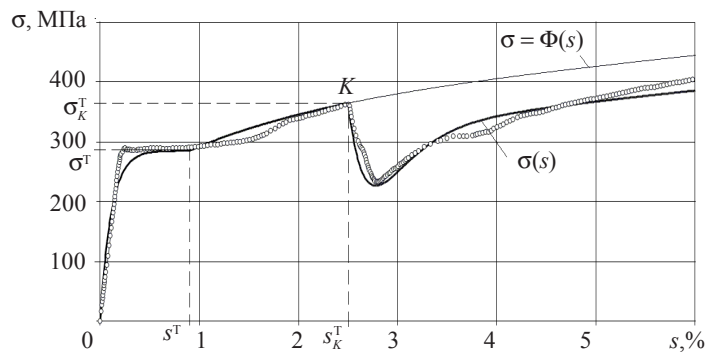


Рис. 2

На рис. 3–6 приведены результаты эксперимента и численных расчетов по программе испытаний, представленной на рис. 1. Отклик в пространстве напряжений S_1 – S_3 показан на рис. 3, на рис. 4 приведена диаграмма процесса деформирования σ – Δ . Локальные диаграммы деформирования S_1 – Δ_1 , S_3 – Δ_3 приведены на рис. 5а,б,

а на рис. 6 изображена диаграмма зависимости угла сближения ϑ_1 от длины дуги траектории деформирования s после излома, характеризующая векторные свойства материала.

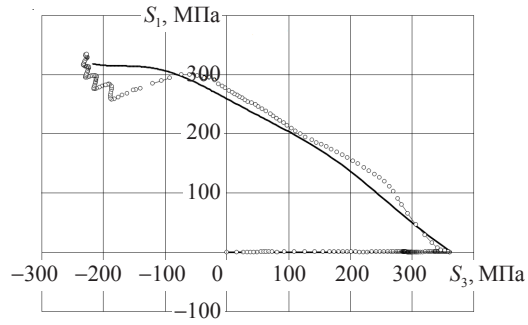


Рис. 3

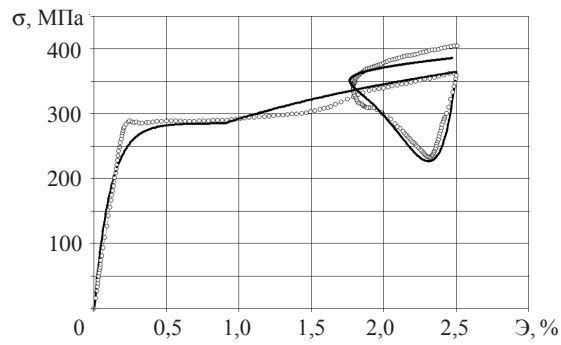
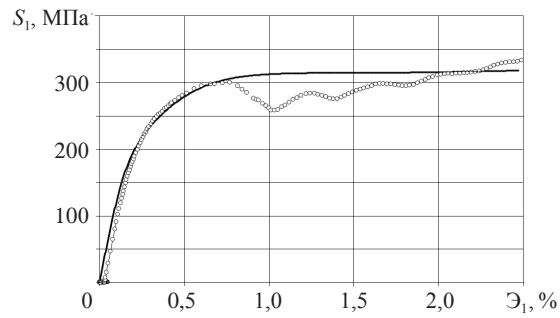
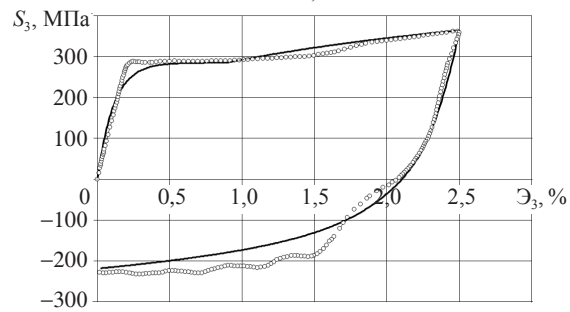


Рис. 4



а)



б)

Рис. 5

Численные расчеты с использованием метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности по модифицированной математической модели теории процессов достаточно хорошо соответствуют экспериментальным данным как по скалярным (см. рис. 3–5), так и по векторным свойствам (рис. 6).

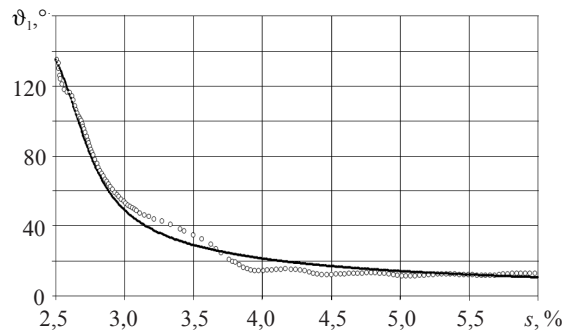
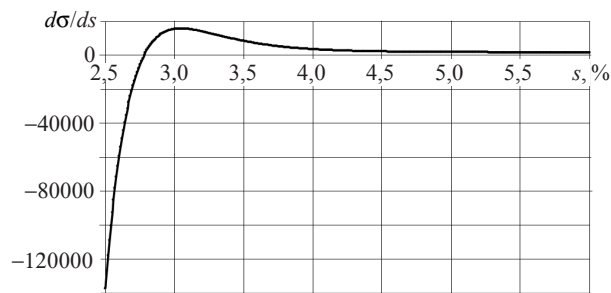
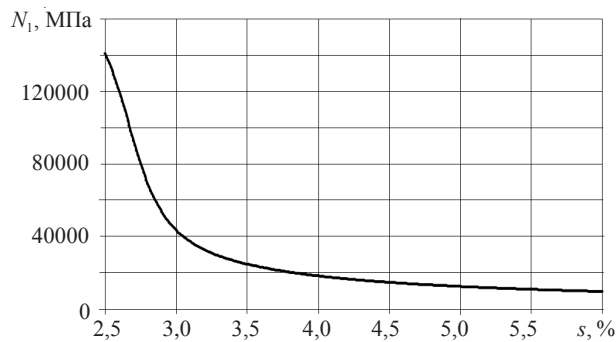


Рис. 6

На рис. 7а,б приведены расчетные зависимости функционалов процесса $d\sigma/ds$ (рис. 7а) и N_1 (рис. 7б) от длины дуги траектории деформирования.



а)



б)

Рис. 7

Использование в модели аппроксимаций выражений (16)–(20) позволило достоверно описать процесс упругопластического деформирования стали 45 для ломаных траекторий с большими углами излома.

Список литературы

1. *Зубчанинов В.Г.* Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
2. *Зубчанинов В.Г.* Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность. М.: Физматлит, 2008. 336 с.
3. *Турчак Л.И., Плотников П.В.* Основы численных методов. М.: Физматлит, 2003. 304 с.

**NUMERICAL SIMULATION A PROCESSES OF COMPLEX ELASTOPLASTIC
DEFORMATION STEEL ON TWO-LINK BROKEN TRAJECTORIES**

V.G. Zubchaninov, A.A. Alekseev, V.I. Gulyaev

Results of the theoretical calculations in processes of elastic-plastic deformation of steel 45 on broken trajectories are presented. The theory of processes in complex loading by A.A. Ilyushin and universal approximations of functions of processes by V.G. Zubchaninov is used. To solve the basic equations of the theory of processes was used numerical method of Runge – Kutta fourth-order accuracy solution. To assess the reliability of calculated data obtained results are compared with the experimental research on the automated SN-EVM test complex.

Keywords: elasticity, plasticity, complex loading, plasticity functionals, vector and scalar properties of materials, numerical method, SN-EVM test complex.