

УДК 519.6:539.3

О ВЛИЯНИИ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ТОЧНОСТЬ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

© 2013 г.

К.А. Крутова, С.В. Спирин, Д.Т. Чекмарев

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

4ekm@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 22.11.2013

Влияние расположения элементов на численное решение известно, но практически не исследовано. Для численных схем решения трехмерных задач теории упругости на базе линейного четырехузлового конечного элемента аналитически исследуется порядок аппроксимации схем с различным разбиением гексаэдральных ячеек сетки на тетраэдры. Наряду с вариантами традиционной схемы также рассматривается ажурная схема МКЭ с одним расчетным четырехузловым элементом в гексаэдральной ячейке сетки. Осуществлен анализ точности схем. Обсуждается проблема эффективности численных схем решения трехмерных задач.

Ключевые слова: МКЭ, трехмерная задача, ажурная схема, теория упругости, порядок аппроксимации, порядок точности.

Введение

Авторам известна только одна публикация на тему влияния взаимного расположения конечных элементов (КЭ) на точность численных решений [1], где исследование проводится эмпирически на основе численных экспериментов. Аналитическое исследование такого рода методами теории КЭ весьма затруднительно, поскольку конечно-элементный анализ ограничивается, как правило, исследованием в пределах одного элемента. Путем преобразования конечно-элементных схем на равномерных сетках с периодическим расположением КЭ к конечно-разностному виду [2, 3] были построены варианты сеточных аппроксимаций системы уравнений Ламе, соответствующие различным способам разбиения базовой ячейки разностной сетки (параллелепипеда) на конечные элементы (тетраэдры). Рассмотрены варианты схем с разбиением параллелепипеда на 5 тетраэдров и на 6 тетраэдров с симметричным и несимметричным способами разбиения. Также рассмотрена ажурная схема [4, 5], в которой в каждом параллелепипеде оставлен только один центральный расчетный элемент в виде тетраэдра. Порядок аппроксимации исследовался традиционным методом теории разностных схем.

* Выполнено при частичном финансировании Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и РФФИ (грант №13-01-97052-р_поволжье_a).

1. Анализ аппроксимации

Приведение КЭ-схем к конечно-разностному виду возможно для случая равномерной или регулярной сетки. Для регулярной неравномерной сетки полученная схема будет иметь переменные коэффициенты, поэтому ограничимся случаем равномерной сетки. Под равномерной КЭ-сеткой в R^3 будем понимать сетку, в которой элементы располагаются периодически с периодом, задаваемым некоторой сеткой вида

$$\bar{x}_{ijk} = \bar{x}_0 + B_h \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (1)$$

из одинаковых параллелепипедов (не обязательно прямоугольных). Здесь B_h – невырожденная матрица, определяющая геометрию базовой ячейки (параллелепипеда) основной разностной сетки. Общий метод преобразования КЭ-схем к конечно-разностному виду описан в [2]. Рассмотрим кратко его применение к трехмерным схемам метода конечных элементов (МКЭ) решения линейных задач теории упругости на базе четырехузловых линейных КЭ. Будем считать, что все узлы КЭ принадлежат основной сетке (1), а любой элемент (тетраэдр) целиком принадлежит базовому параллелепипеду сетки (1). Способ разбиения базового параллелепипеда на тетраэдры определяется набором шаблонов элементов. Шаблон каждого элемента содержит 4 целочисленных вектора, являющихся подмножеством множества

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее рассматриваются следующие типы разбиений гексаэдра.

1. На 5 тетраэдров (рис. 1):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{M}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathcal{M}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{M}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

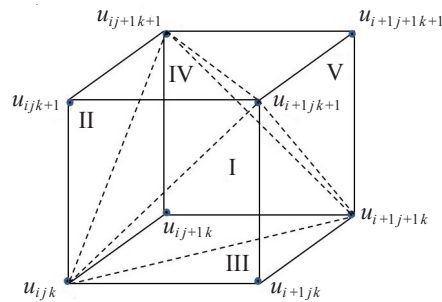


Рис. 1

2. На 6 тетраэдров с центрально-симметричным разбиением (рис. 2):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathcal{H}_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

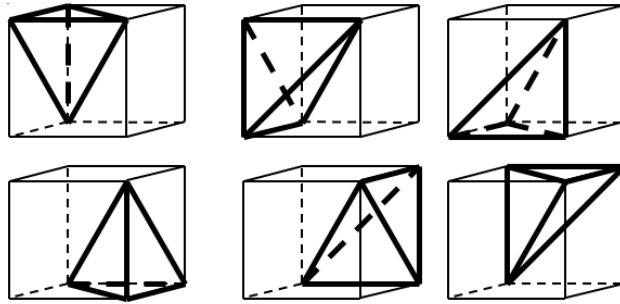


Рис. 2

3. На 6 тетраэдров с поворотно-симметричным разбиением:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathcal{H}_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4) \end{aligned}$$

4. На 6 тетраэдров с несимметричным разбиением:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathcal{H}_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

5. Ажурная схема (в каждом параллелепипеде оставляем по одному центральному тетраэдру):

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ при четной сумме } i + j + k,$$

$$\mathbb{I}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ при нечетной сумме } i + j + k. \quad (6)$$

6. «Суперажурная» схема (в каждом втором параллелепипеде оставляем по одному центральному тетраэдру:

$$\mathbb{I}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ при четной сумме } i + j + k. \quad (7)$$

«Суперажурная» схема имеет КЭ-сетку минимальной связности – в каждом внутреннем узле сходится по 4 элемента.

Построение конечно-разностной записи схем МКЭ проведем согласно методу из [2]. Неизвестные функции в линейном элементе представляются в виде

$$f(x^1, x^2, x^3) = c_0 + c_1(x^1 - x_c^1) + c_2(x^2 - x_c^2) + c_3(x^3 - x_c^3)$$

(здесь (x_c^1, x_c^2, x_c^3) – координаты центра элемента).

Коэффициенты c_0, c_1, c_2, c_3 могут быть выражены через значения функции в узлах элемента: $c_m = \sum_{k=1}^4 \beta_k^m f_k$, $m = 0, 1, 2, 3$ (здесь используется локальная нумерация узлов). В результате при переходе к глобальной нумерации узлов получаем для элемента l -го типа (соответствующего выбранному шаблону с номером l) следующие формулы:

$$c_m = d_{m,l}^+ f_{ijk} = \sum_{(p,q,r) \in \mathbb{I}_l} \beta_{p,q,r}^{m,l} f_{i+p, j+q, k+r}, \quad m = 0, 1, 2, 3. \quad (8)$$

Эта формула определяет также базисные дифференциальные операторы $d_{m,l}^+$. Коэффициенты $\beta_{p,q,r}^{m,l}$ определяются шаблоном элемента и матрицей B_h . Введем в рассмотрение взятые со знаком минус операторы, сопряженные к (8):

$$d_{m,l}^- f_{ijk} = - \sum_{(p,q,r) \in \mathbb{I}_l} \beta_{p,q,r}^{m,l} f_{i-p, j-q, k-r}, \quad m = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Запишем внутреннюю энергию линейно-упругого тела:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} d\Omega.$$

Конечно-элементная аппроксимация внутренней энергии с учетом соотношений Коши, закона Гука, постоянства напряжений и деформаций в пределах элемента запишется в виде:

$$W_h = \frac{1}{2} \Delta V \sum_{(i,j,k) \in \Omega_h} \sum_{l=1}^s \gamma_l \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle_{ijkl} \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_{ijkl} = \frac{1}{2} \Delta V \sum_{(i,j,k) \in \Omega_h} \sum_{l=1}^s \gamma_l \left\langle (\lambda \delta_{\alpha\beta} d_{m,l}^+ u_m + \mu (d_{\alpha,l}^+ u_\beta + d_{\beta,l}^+ u_\alpha)) \frac{1}{2} (d_{\alpha,l}^+ u_\beta + d_{\beta,l}^+ u_\alpha) \right\rangle_{ijkl}. \quad (10)$$

Здесь λ, μ – константы Ламе, ΔV – объем параллелепипеда основной сетки (1), коэффициент γ_l равен отношению объема l -го элемента к ΔV . При этом выполняется

равенство $\sum_{l=1}^s \gamma_l = 1$. В зависимости от способа разбиения параллелепипеда на тетраэдры $s = 5$ или 6 (для ажурной схемы $s = 1$, $\gamma_1 = 1$). Приравнивая вариацию внутренней энергии виртуальной работе внешних сил (включая силы инерции), получаем сеточное вариационное уравнение

$$\begin{aligned} \Delta V \sum_{(i,j,k) \in \Omega_h} \sum_{l=1}^s \gamma_l \left\langle (\lambda \delta_{\alpha\beta} d_{m,l}^+ u_m + \mu (d_{\alpha,l}^+ u_\beta + d_{\beta,l}^+ u_\alpha)) \frac{1}{2} (d_{\alpha,l}^+ \delta u_\beta + d_{\beta,l}^+ \delta u_\alpha) \right\rangle_{ijkl} = \\ = \Delta V \sum_{(i,j,k) \in \Omega_h} \langle \rho (F_\alpha - \ddot{u}_\alpha) \delta u_\alpha \rangle_{ijk}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь не учтены внешние поверхностные силы, поскольку граничные условия в данном случае нас не интересуют.

Выполняя сеточное интегрирование по частям (см. [2]) левой части уравнения (11), приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях и заменяя производную по времени сеточным оператором, получим для внутренних узлов сеточной области представление конечно-элементной схемы в традиционном конечно-разностном виде:

$$(\lambda + \mu) \begin{vmatrix} D_{11}u_1 + D_{12}u_2 + D_{13}u_3 \\ D_{21}u_1 + D_{22}u_2 + D_{23}u_3 \\ D_{31}u_1 + D_{32}u_2 + D_{33}u_3 \end{vmatrix} + \mu D_\Delta \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} + \rho \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \rho D_{tt} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}, \quad (12)$$

аналогичном системе уравнений Ламе

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } u + \mu \Delta u + \rho F = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (13)$$

где операторы D_{ij} аппроксимируют производные второго порядка соответственно по i -й и j -й координатам, $D_{tt}f = (f(t + \tau) - 2f(t) + f(t - \tau)) / \tau^2$ аппроксимирует вторую производную по времени, $D_\Delta = D_{11} + D_{22} + D_{33}$ – сеточный оператор Лапласа. Операторы D_{ij} имеют конкретный вид в зависимости от варианта исследуемой схемы и могут иметь либо первый, либо второй порядок аппроксимации. Для схем линейного КЭ имеем $D_{ij} = \sum_{l=1}^s \gamma_l d_{i,l}^+ d_{j,l}^-$, где $s = 5$, $\gamma_1 = 1/3$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 1/6$ для схемы (2) с разбиением параллелепипеда на 5 тетраэдров; $s = 6$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 1/6$ для схем (3)–(5) с разбиением параллелепипеда на 6 тетраэдров. Для ажурной схемы имеем $D_{ij} = (d_{i,1}^+ d_{j,1}^- + d_{i,1}^- d_{j,1}^+) / 2$, для «суперажурной» – $D_{ij} = d_{i,1}^+ d_{j,1}^-$.

Приведем вид некоторых операторов $d_{i,l}^+$, $d_{j,l}^-$, D_{ij} для случая ортогональной сетки с диагональной матрицей

$$B_h = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix}$$

(координаты узлов сетки равны $x_{ijk}^1 = x_0^1 + h_1 i$, $x_{ijk}^2 = x_0^2 + h_2 j$, $x_{ijk}^3 = x_0^3 + h_3 k$).

Для первого шаблона сеток (2), (6), (7) базисные операторы имеют вид:

$$(d_1^+ f)_{ijk} = \frac{1}{2h_1} (f_{i+1,j+1,k} + f_{i+1,j,k+1} - f_{i,j+1,k+1} - f_{i,j,k}),$$

$$\begin{aligned}
(d_2^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_2}(f_{i+1,j+1,k} + f_{i,j+1,k+1} - f_{i+1,j,k+1} - f_{i,j,k}), \\
(d_3^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_3}(f_{i+1,j,k+1} + f_{i,j+1,k+1} - f_{i+1,j+1,k} - f_{i,j,k})
\end{aligned} \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned}
(d_1^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_1}(-f_{i-1,j-1,k} - f_{i-1,j,k-1} + f_{i,j-1,k-1} + f_{i,j,k}), \\
(d_2^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_2}(-f_{i-1,j-1,k} - f_{i,j-1,k-1} + f_{i-1,j,k-1} + f_{i,j,k}), \\
(d_3^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_3}(-f_{i-1,j,k-1} - f_{i,j-1,k-1} + f_{i-1,j-1,k} + f_{i,j,k}).
\end{aligned} \tag{15}$$

Для второго шаблона сетки (2) базисные операторы имеют вид:

$$\begin{aligned}
(d_1^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{h_1}(f_{i+1,j,k+1} - f_{i,j,k+1}), \quad (d_2^+ f)_{ijk} = \frac{1}{h_2}(f_{i,j+1,k+1} - f_{i,j,k+1}), \\
(d_3^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_3}(f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k})
\end{aligned} \tag{16}$$

и

$$\begin{aligned}
(d_1^- f)_{ijk} &= \frac{1}{h_1}(f_{i,j,k-1} - f_{i-1,j,k-1}), \quad (d_2^- f)_{ijk} = \frac{1}{h_2}(f_{i,j,k-1} - f_{i,j-1,k-1}), \\
(d_3^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_3}(f_{i,j,k} - f_{i,j,k-1}).
\end{aligned} \tag{17}$$

Из операторов D_{ij} ограничимся типичными представителями D_{11} и D_{12} с указанием порядка аппроксимации ими производных относительно $h = \min(h_1, h_2, h_3)$. Остальные строятся аналогично и имеют те же порядки аппроксимации (соответственно для вторых производных по одной координате и вторых смешанных производных).

Для схемы с разбиением параллелепипеда на 5 тетраэдров (2):

$$\begin{aligned}
(D_{11} u)_{ijk} &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4h_1^2} (u_{i+1,j+1,k} + u_{i+1,j-1,k} + u_{i+1,j,k+1} + u_{i+1,j,k-1} - u_{i,j+1,k+1} - u_{i,j-1,k-1} - \right. \\
&\quad \left. - u_{i,j+1,k-1} - u_{i,j-1,k-1} - 4u_{i,j,k} + u_{i-1,j+1,k} + u_{i-1,j-1,k} + u_{i-1,j,k+1} + u_{i-1,j,k-1}) \right] + \\
&\quad + \frac{2}{3} \frac{1}{h_1^2} (u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}) = \frac{\partial^2 u}{\partial (x^1)^2} + O(h^2), \\
(D_{12} u)_{ijk} &= \frac{1}{4h_1 h_2} (u_{i+1,j+1,k} + u_{i-1,j-1,k} - u_{i+1,j-1,k} + u_{i-1,j+1,k}) + \frac{1}{12h_1 h_2} \times \\
&\quad \times (u_{i+1,j,k+1} + u_{i-1,j,k+1} - u_{i,j+1,k+1} - u_{i,j-1,k+1} - u_{i+1,j,k-1} - u_{i-1,j,k-1} + u_{i,j+1,k-1} + u_{i,j-1,k-1}) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} + O(h).$$

Для схемы с центрально-симметричным разбиением на 6 тетраэдров (3):

$$\begin{aligned} (D_{11}u)_{ijk} &= \frac{1}{h_1^2} (u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}) = \frac{\partial^2 u}{\partial (x^1)^2} + O(h^2), \\ (D_{12}u)_{ijk} &= \frac{1}{6h_1 h_2} [(u_{i+1,j,k+1} + u_{i,j-1,k+1} - u_{i+1,j-1,k+1} - u_{i,j,k+1}) + \\ &+ 2(u_{i+1,j,k+1} + u_{i,j-1,k+1} - u_{i+1,j-1,k+1} - 2u_{i,j,k} - u_{i-1,j+1,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i-1,j,k}) + \\ &+ (u_{i,j+1,k-1} + u_{i-1,j,k-1} - u_{i,j,k-1} - u_{i-1,j+1,k-1})] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} + O(h^2). \end{aligned}$$

Для схемы с поворотно-симметричным разбиением на 6 тетраэдров (4):

$$\begin{aligned} (D_{11}u)_{ijk} &= \frac{1}{h_1^2} (u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}) = \frac{\partial^2 u}{\partial (x^1)^2} + O(h^2), \\ (D_{12}u)_{ijk} &= \frac{1}{6h_1 h_2} [(u_{i+1,j,k+1} + u_{i,j-1,k+1} - u_{i+1,j-1,k+1} - u_{i,j,k+1}) + \\ &+ 2(u_{i+1,j+1,k} + u_{i,j-1,k} - u_{i,j+1,k-1} - u_{i+1,j-1,k}) + \\ &+ (u_{i+1,j+1,k-1} + u_{i,j,k-1} - u_{i,j+1,k-1} - u_{i+1,j,k-1})] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} + O(h). \end{aligned}$$

Для схемы с несимметричным разбиением параллелепипеда на 6 тетраэдров (5):

$$\begin{aligned} (D_{11}u)_{ijk} &= \frac{1}{6h_1^2} (5u_{i+1,j,k} - 14u_{i,j,k} + 5u_{i-1,j,k} - u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1} - u_{i,j-1,k} - u_{i,j+1,k} + u_{i+1,j,k+1} + \\ &+ u_{i-1,j,k-1} - u_{i,j+1,k+1} - u_{i,j-1,k-1} + u_{i-1,j+1,k} + u_{i+1,j-1,k} + u_{i+1,j-1,k+1} + \\ &+ u_{i-1,j+1,k-1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial (x^1)^2} + O(h^2), \\ (D_{12}u)_{ijk} &= \frac{1}{6h_1 h_2} [(u_{i+1,j,k+1} + u_{i,j-1,k+1} - u_{i+1,j-1,k+1} - u_{i,j,k+1}) + \\ &+ 2(u_{i+1,j,k} - u_{i+1,j-1,k} - 3u_{i,j,k} - u_{i-1,j+1,k} + u_{i-1,j,k}) + 3u_{i,j+1,k} + 3u_{i,j-1,k} + \\ &+ (u_{i-1,j,k-1} + u_{i,j,k-1} - u_{i,j-1,k-1} - u_{i-1,j+1,k-1})] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} + O(h). \end{aligned}$$

Для ажурной схемы (6):

$$\begin{aligned} (D_{11}u)_{ijk} &= \frac{1}{4h_1^2} (u_{i+1,j+1,k} + u_{i+1,j-1,k} + u_{i+1,j,k+1} + u_{i+1,j,k-1} - u_{i,j+1,k+1} - u_{i,j-1,k-1} - u_{i,j+1,k-1} - \\ &- u_{i,j-1,k-1} - 4u_{i,j,k} + u_{i-1,j+1,k} + u_{i-1,j-1,k} + u_{i-1,j,k+1} + u_{i-1,j,k-1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial (x^1)^2} + O(h^2), \end{aligned}$$

$$(D_{12}u)_{ijk} = \frac{1}{4h_1h_2}(u_{i+1,j+1,k} + u_{i-1,j-1,k} - u_{i+1,j-1,k} + u_{i-1,j+1,k}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} + O(h^2).$$

Для «суперажурной» схемы (7):

$$(D_{11}u)_{ijk} = \frac{1}{4h_1^2}(u_{i+1,j+1,k} + u_{i+1,j-1,k} + u_{i+1,j,k+1} + u_{i+1,j,k-1} - u_{i,j+1,k+1} - u_{i,j-1,k-1} - u_{i,j+1,k-1} - u_{i,j-1,k+1} - 4u_{i,j,k} + u_{i-1,j+1,k} + u_{i-1,j-1,k} + u_{i-1,j,k+1} + u_{i-1,j,k-1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial (x^1)^2} + O(h^2),$$

$$(D_{12}u)_{ijk} = \frac{1}{4h_1h_2}(u_{i+1,j+1,k} + u_{i-1,j-1,k} - u_{i+1,j-1,k} + u_{i-1,j+1,k}) + \frac{1}{4h_1h_2} \times$$

$$\times (u_{i+1,j,k+1} + u_{i-1,j,k+1} - u_{i,j+1,k+1} - u_{i,j-1,k+1} - u_{i+1,j,k-1} - u_{i-1,j,k-1} + u_{i,j+1,k-1} + u_{i,j-1,k-1}) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} + O(h).$$

По результатам анализа можно сделать вывод: ажурная схема и схема с центрально-симметричным разбиением на 6 тетраэдров имеют 2-й порядок аппроксимации, остальные схемы – 1-й порядок.

2. Численные результаты

Проведена серия расчетов колебаний бруса квадратного сечения, закрепленного на торцах, нагруженного внезапно приложенным давлением на части поверхности. Расчетная схема задачи приведена на рис. 3. Здесь $L = 10$ см, $H_1 = H_2 = 1$ см, $p = 0,17$ ГПа на участке поверхности $4 < x < 6$, $0 < y < 1$, $z = 0$. Свойства материала: $\rho_0 = 7,8$ г/см³, $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

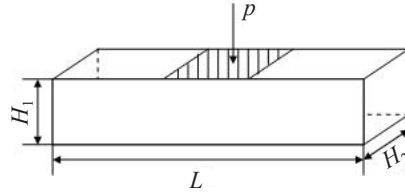


Рис. 3

Брус зашпелен на торцах. Давление $p = 0,17$ ГПа равномерно распределено на заштрихованном участке поверхности $4 < x^1 < 6$, $0 < x^2 < 1$, $x^3 = 0$ (ось x^3 направлена вниз), приложено мгновенно и постоянно по времени. Была проведена серия расчетов на сетках из $40 \times 4 \times 4$, $80 \times 8 \times 8$ и $160 \times 16 \times 16$ шестигранных ячеек с разбиениями на конечные элементы согласно соотношениям (2)–(7). Расчеты велись до 2000 мкс. На рис. 4 и 5 приведены зависимости скорости V_3 от времени для точки с координатами (5,0; 0,5; 1,0) (в центре грани, противоположной нагруженной), полученные на сетках $40 \times 4 \times 4$ и $80 \times 8 \times 8$. На рис. 4 – результаты расчетов для ажурной схемы (6), на рис. 5 – результаты для схемы (4).

Вычисления были выполнены с помощью разных вариантов одной программы, поэтому была возможность сравнить их по реальной эффективности (времени расчетов). В таблице 1 приведены временные затраты на решение каждой задачи.

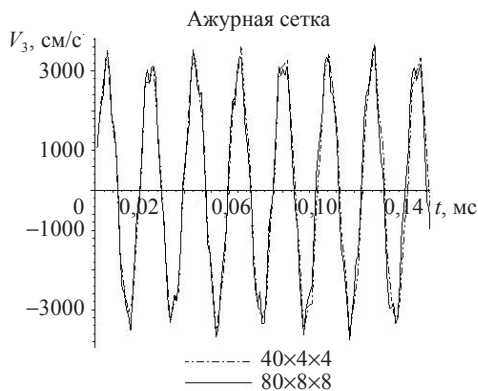


Рис. 4

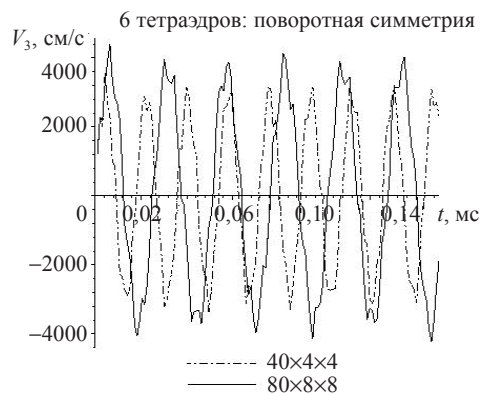


Рис. 5

Таблица 1

Схема	Время счета, час:мин:сек			Эффективность, $t/t_{аж}$
	40×4×4	80×8×8	160×16×16	
Ажурная	0:00:18	0:05:02	0:34:15	1
«Суперажурная»	0:00:14	0:03:26	0:21:21	0,70
5 тетраэдров	0:01:20	0:21:21	5:39:16	6,19
6 тетраэдров	0:01:35	0:25:22	7:04:34	7,57

В таблице 2 приведены периоды колебаний, полученные на сетках 40×4×4, 80×8×8 и 160×16×16. Шаг по координате измельчался соответственно в 2 раза. Пусть при разбиении 40×4×4 с шагом h период колебаний равен T_1 , при разбиении 80×8×8 с шагом $h/2$ – T_2 , а при разбиении 160×16×16 с шагом $h/4$ – T_4 . Тогда практический порядок точности k схемы можно оценить по формуле:

$$T_2 - T_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^k (T_1 - T_2).$$

На основе численных результатов сделан вывод о порядке точности схем.

Таблица 2

Схема	Период при разбиении 40×4×4 T_1 , мкс	Период при разбиении 80×8×8 T_2 , мкс	Период при разбиении 160×16×16 T_4 , мкс	Порядок точности
Ажурная	99,60	99,30	99,30	2
«Суперажурная»	99,48	99,66	99,66	2
5 тетраэдров	93,91	97,90	98,83	2
6 тетраэдров, центральная симметрия	88,48	95,45	97,16	2
6 тетраэдров, поворотная симметрия	87,83	94,25	97,16	1
6 тетраэдров, несимметричное разбиение	89,87	95,45	97,16	2

При интерполяции экспериментально полученных периодов квадратичными полиномами Лагранжа получим зависимости периода колебаний от пространственного шага для разных схем (рис 6).

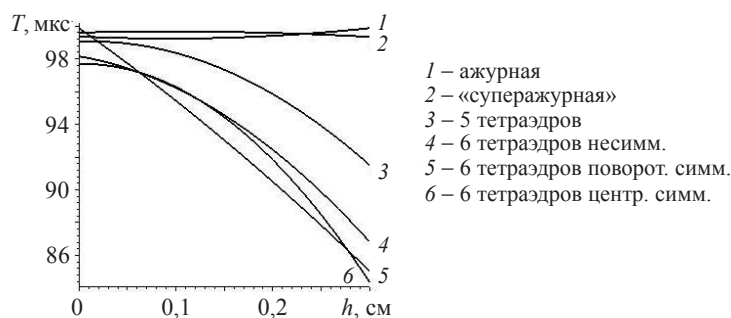


Рис. 6

Заключение

По приведенным результатам можно сделать следующие выводы.

Взаимное расположение элементов может оказывать заметное влияние на точность численных решений, что показывают аналитические исследования порядка аппроксимации и численные эксперименты на тестовой задаче. Те же выводы сделаны в [1].

Результаты теоретического анализа порядка аппроксимации и практического порядка точности могут различаться (все схемы с первым порядком аппроксимации, кроме одной, показали на тестовой задаче второй порядок точности). Это можно объяснить наличием неучтенных свойств численных схем (см. [6, 7]).

Наилучшую сходимость численных решений тестовой задачи показали ажурная и «суперажурная» схемы, что в совокупности с большей экономичностью демонстрирует их более высокую эффективность по сравнению с традиционными схемами на основе линейного четырехузлового КЭ.

Список литературы

1. Горельский В.А., Зелепугин С.А., Смолин А.Ю. Исследование влияния дискретизации при расчете методом конечных элементов трехмерных задач высокоскоростного удара // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37, №6. С. 742–750.
2. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом: Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2000. 118 с.
3. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Об индексной коммутативности численного дифференцирования // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, №5. С. 662–674.
4. Чекмарев Д.Т. Численные схемы метода конечного элемента на «ажурных» сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 49–54.
5. Решение нестационарных трехмерных задач теории упругости на основе ажурной схемы МКЭ / Д.Т. Чекмарев, А.В. Жидков, С.В. Зефилов, К.А. Кастальская, С.В. Спиринов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011. № 4 (4). С. 1480–1482.
6. Бондаренко Ю.А. Скрытая точность в вариационных разностных схемах повышенного порядка аппроксимации для линейных уравнений с переменными коэффициентами // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 2. С. 39–44.
7. Бондаренко Ю.А. Сохранение фазового объема и каноничности в конечно-разностных

схемах газовой динамики // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. Науч.-исслед. издание. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. Вып. 18. С. 124–133.

**ON THE EFFECT OF THE ARRANGEMENT OF FINITE ELEMENTS RELATIVE
TO EACH OTHER ON THE ACCURACY OF THE FE-ANALYSIS
OF ELASTICITY PROBLEMS**

K.A. Krutova, S.V. Spirin, D.T. Chekmarev

The effect of FE arrangement on the numerical analysis is commonly recognized but has not practically been studied. For numerical schemes of analyzing three-dimensional problems of plasticity using a linear 4-node finite element, the order of approximation of schemes with various types of subdivision of hexahedral meshes of the FE-net into tetrahedrons is analytically studied. Alongside with the versions of the traditional schemes, an «open-work» FE-scheme with a single 4-node element in a hexahedral mesh of the net is also considered. The accuracy of the schemes is also analyzed by solving a benchmark problem. The effectiveness of numerical schemes for analyzing 3D problems is discussed.

Keywords: FEM, 3D problem, open-work scheme, theory of elasticity, approximation order, order of accuracy.