

УДК 539.3

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО
ДВИЖЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ УДАРНИКОВ
В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ***

© 2013 г. **В.Л. Котов¹, А.Ю. Константинов¹, Ю.И. Кибец¹,
А.А. Тарасова¹, В.П. Власов²**

¹НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

²НИИ машиностроения им. В.В. Бахирева, Дзержинск

vkotov@inbox.ru

Поступила в редакцию 16.09.2013

Рассматриваются задачи об ударе и начальном этапе плоскопараллельного движения тел по нормали и под углом к свободной поверхности полупространства, занимаемого упругопластической средой. Силы сопротивления внедрению конических ударников заданной массы, полученные в рамках квадратичной модели локального взаимодействия, сравниваются с результатами компьютерного моделирования в полной трехмерной постановке.

Ключевые слова: удар, наклонное проникание, конический ударник, упругопластическая среда, модель локального взаимодействия, трехмерное моделирование.

В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных приближенному решению проблемы проникания жестких осесимметричных тел в упругопластические грунтовые среды по нормали [1–10] и под углом к свободной поверхности [11–13]. Проведенный в обзоре [14] анализ приближенных подходов к моделированию процесса проникания свидетельствует о формировании достаточно большого класса математических моделей, основанных на гипотезе локального взаимодействия. Данные модели локального взаимодействия (МЛВ) применялись для поиска оптимальных форм проникающих тел [15, 16], анализа устойчивости движения осесимметричных и пространственных тел [9, 13]. В работах [17–20] теоретически и экспериментально обоснованы применимость квадратичной по скорости МЛВ для определения сил сопротивления внедрению по нормали в мягкий грунт острых конических тел и нарушение условий применимости модели для затупленных тел. В настоящей статье рассматриваются процессы наклонного удара и проникания конических ударников заданной массы. Проводится сравнение сил сопротивления, полученных в рамках квадратичной модели локального взаимодействия, с результатами компьютерного моделирования в полной трехмерной постановке.

* Выполнено при частичном финансировании Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2843.2012.8) и РФФИ (12-08-33106-мол_а_вед, 13-08-00531_а, 13-08-00658_а, 12-05-01075_а, 12-01-31082мол_а).

1. Для описания плоскопараллельного движения твердого конического тела в среде рассмотрим его сечение плоскостью, проходящей через оси неподвижной прямоугольной системы координат Oxz (рис. 1а). Уравнения движения и вращения плоской фигуры вокруг центра масс C в проекциях на оси подвижной системы координат $O'r'z'$ имеют вид [21]:

$$\begin{aligned} m(\dot{v}_{r'} - \omega v_{z'}) &= F_{r'}, & m(\dot{v}_{z'} + \omega v_{r'}) &= F_{z'}, & J\dot{\omega} &= M, \\ \dot{\omega} &= \ddot{\Psi}, & M &= (r' - r_C)F_{z'} - (z' - z_C)F_{r'}, \end{aligned} \quad (1)$$

где m – масса тела; $v_{r'}, v_{z'}$ и $F_{r'}, F_{z'}$ – компоненты вектора скорости и главного вектора сил в системе осей $O'r'z'$; (r', z') и (r_C, z_C) – координаты точки приложения силы и центра масс; ω – угловая скорость; Ψ – угол поворота; J и M – момент инерции и момент сил относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр масс; θ – угол наклона тела при подходе к поверхности среды.

Компоненты вектора силы определим интегрированием контактных напряжений в системе координат, связанной с боковой поверхностью S проникающего тела и образованной главным вектором нормали \mathbf{n} и касательным вектором $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 1б):

$$F_n = \iint_S \sigma_n dS = 2 \int_{-H}^{z_2} \int_0^{\varphi_2} \sigma_n r(z) / \cos \beta d\varphi dz, \quad (2)$$

где $r(z)$ – радиус окружности, получаемой в сечении конуса плоскостью $z = \text{const}$, Ψ – угол, образованный $r(z)$ с положительным направлением оси r' в поперечном сечении конического ударника с углом раствора 2β . Величины φ_2 , $r(z)$ и z_2 определяются аналогично [22] по формулам:

$$r(z) = (H + z) \text{tg } \beta, \quad \varphi_2 = \arccos \frac{z - z_0}{r(z)} \text{ctg } \theta, \quad z_2 = \frac{z_0 + H \text{tg } \beta \text{tg } \theta}{1 - \text{tg } \beta \text{tg } \theta},$$

где z_0 – координата точки пересечения поверхности среды с осью z' . Эти формулы применяются при $z < 0$ (до полного погружения миделя тела в среду), при $z \geq 0$ полагаем $\varphi_2 = \pi$, $z_2 = 0$.

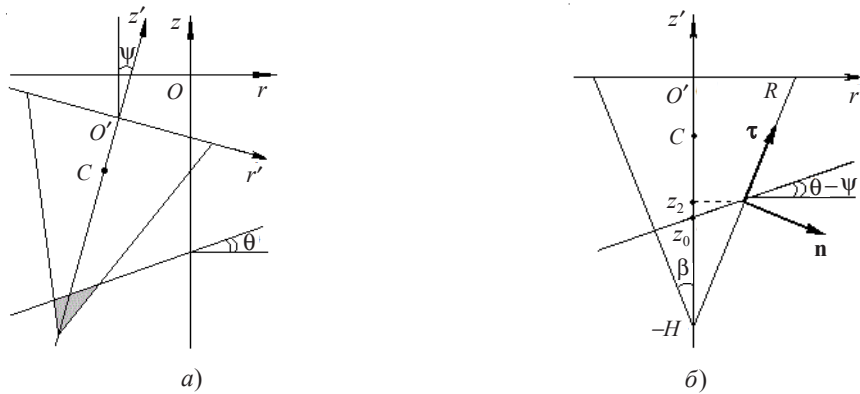


Рис. 1

В соответствии с моделью локального взаимодействия предполагаем, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела; также примем, что нормальное напряжение может быть представлено в виде квадратичной зависимости

$$\frac{\sigma_n}{\rho_0} = -(Av_n^2 + Bv_n + C), \quad (3)$$

где A , B и C – постоянные коэффициенты, зависящие от физико-механических свойств среды, формы ударника и других составляющих; ρ_0 – начальная плотность среды; v_n – нормальная компонента вектора скорости внедрения, определяемая по формуле

$$v_n = (v_{r'} - (z' - z_c)\omega)\cos\varphi\cos\beta - (v_{z'} + (r' - r_c)\omega\cos\varphi)\sin\beta.$$

Если $v_n < 0$, то $\sigma_n = 0$, что соответствует отрыву среды от тела.

После момента полного погружения тела и в случае его безотрывного обтекания потоком среды интеграл в (2) может быть вычислен аналитически. Выражения для компонент вектора силы сопротивления в проекциях на оси подвижной системы координат $O'r'z'$ и момента сил, входящих в (1), записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{F_{r'}}{S_0} &= f_{r'}^0 + \omega f_{r'}^\omega, & \frac{F_{z'}}{S_0} &= f_{z'}^0 + \omega f_{z'}^\omega, & \frac{M}{S_0} &= \mu^0 + \omega \mu^\omega, \\ f_{r'}^0 &= v_{r'} \cos^2 \beta \gamma_1, & f_{r'}^\omega &= \left(\frac{1}{2}H - H \sin^2 \beta + z_c \cos^2 \beta \right) \gamma_1, \\ f_{z'}^0 &= \left(C - Bv_{z'} \sin \beta + Av_{z'}^2 \sin^2 \beta + \frac{1}{2}Av_{r'}^2 \cos^2 \beta \right), \\ f_{z'}^\omega &= A \left(\frac{1}{2}\gamma_2 H^2 \omega - \frac{2}{3}H - (H \cos^2 \beta - z_c \cos^2 \beta) \left(\frac{1}{2}\omega z_c + v_{r'} \right) \right), \\ \mu^0 &= v_{r'} \left(-\frac{2}{3}H + (z_c + H) \cos^2 \beta \right) \gamma_1, \\ \mu^\omega &= \left(\gamma_2 H^2 - \frac{4}{3}z_c H + 2z_c H \cos^2 \beta + z_c^2 \cos^2 \beta \right) \gamma_1, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_1 = Av_{z'} - \frac{1}{2} \frac{B}{\sin \beta}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \sin^2 \beta \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{1}{3} \sin^2 \beta + \frac{1}{6} \cos^2 \beta,$$

$S_0 = \pi R^2$ – площадь основания тела.

Для завершения описания движения необходимо конкретизировать способ задания параметров модели локального взаимодействия (3) и модели среды проникания. Параметры МЛВ в соответствии с известным подходом [23] определим на основе приближенного решения задачи о расширении сферической полости [24, 25]. Среда проникания считается упругопластической, с линейной зависимостью предела текучести σ_T от давления p : $\sigma_T = Y + kp$. Сжимаемость среды характеризуется ударной адиабатой $c = a + \lambda U$, которая представлена линейной зависимостью скорости ударной волны c от массовой скорости U за ее фронтом. Константа a характеризует скорость распространения волны сжатия в грунте при малых давлениях, λ – предельную сжимаемость, Y и k определяют сцепление и внутреннее трение грунта.

Решение задачи о расширении полости записывается следующим образом [19]:

$$\sigma = \rho c^2 s, \quad \rho = \frac{\rho_0}{1 - \varepsilon^3}, \quad \varepsilon = \frac{U}{c}, \quad c = \lambda^{1/3} U + \frac{a}{3},$$

$$s = \left(\frac{3}{(\mu-2)(2\mu-1)} + \frac{2\mu+1}{2\mu-1} \varepsilon^{1-2\mu} - \frac{\mu-1}{\mu-2} \varepsilon^{4-2\mu} \right) \varepsilon^2 - (1 + \varepsilon^{-2\mu}) \frac{Y}{\mu},$$

$$\mu \neq 0, \quad \mu \neq 0,5, \quad \mu = \frac{\kappa}{1 + (2/3)\kappa}, \quad (4)$$

где σ – напряжение на границе полости, U – скорость расширения полости, ρ – плотность за фронтом ударной волны, распространяющейся со скоростью c . Аналитическое решение (4), полученное в предположении несжимаемости среды за фронтом ударной волны, учитывает динамическую сжимаемость и сопротивление сдвигу грунта. Для применения решения (4) в расчетах необходимо положить в формуле (3) $\sigma_n = \sigma$, $v_n = U$. Коэффициенты A , B и C определяются методом наименьших квадратов в заданном диапазоне изменения скоростей.

Таким образом, движение тела во времени описывается решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) относительно величин $v_{r'}$, $v_{z'}$, ω и ψ при следующих начальных условиях ($t = 0$):

$$v_{r'} = 0, \quad v_{z'} = -V_0, \quad \omega = 0, \quad \psi = 0. \quad (5)$$

2. Задача Коши (1), (5) решалась численно методом Эйлера на интервале времени $[0, T]$ с постоянным шагом Δt . В каждый момент времени кратный интеграл (2) вычислялся последовательным интегрированием по переменным φ и z с применением составной формулы Симпсона. Подынтегральные выражения в (2) для определения величин силы сопротивления и момента сил в подвижной системе координат $O'r'z'$ в момент полного погружения тела в грунт представляются полиномами от переменных φ и z степени не выше третьей. Таким образом, формулы интегрирования четвертого порядка позволяют точно определить силовые характеристики в каждый момент времени при отсутствии отрыва потока среды от поверхности тела. Полученные аналитические выражения для компонент вектора силы и момента использовались для тестирования численной методики, но могут использоваться и для повышения эффективности решения задачи Коши за счет применения методов более высокого порядка точности. Отметим также, что явные выражения для силы сопротивления и момента применимы только при полном погружении тела до начала отрыва среды от тела. Выделение этих ситуаций в процессе расчета несколько усложняет алгоритм вычислений.

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $a = 516,4$ м/с, $\lambda = 0,5$, $\rho_0 = 2000$ кг/м³, $Y = 0,5$ МПа, $\kappa = 1$, $V_0 = 150$ м/с. Принятая модель среды соответствует рассмотренной ранее линейной модели [12, 17]. Значения коэффициентов трехчленной МЛВ (3) при изменении скорости v_n в диапазоне от 30 м/с до 100 м/с составили $A = 1,2$, $B = 0,95V_0$ и $C = 0,034V_0$.

Для проверки работоспособности изложенной методики задача о проникании конического ударника в упругопластическую среду решалась в полной трехмерной постановке с использованием коммерческого программного продукта LS-DYNA. Ударник моделировался недеформируемым жестким телом (*MAT_RIGID), среда проникания принималась упругопластической, зависимость предела текучести от давления описывалась в рамках модели *MAT_SOIL_AND_FOAM [26]:

$$\sigma_T = [3(a_0 + a_1 p + a_2 p^2)]^{1/2}, \quad p = Ke,$$

где e – объемная деформация, модуль объемного сжатия $K = 320$ МПа. Полагая $a_0 =$

$= Y^2/3, a_1 = 2\kappa Y/3, a_2 = \kappa^2/3$, получим для предела текучести линейную зависимость $\sigma_T = Y + \kappa p$.

Решение проводилось в постановке FSI (Fluid Structure Interaction), при которой уравнения движения ударника интегрировались в лагранжевой системе координат, а уравнения для среды проникания решались на неподвижной эйлеровой сетке. В силу особенностей метода расчетная область для среды должна содержать ячейки, заполненные материалом (область 1 на рис. 2), а также пустые ячейки (область 2), в которые материал перетекает в процессе деформирования. Взаимодействие ударника 3 и упругопластической среды осуществлялось с использованием специального типа контакта (CONSTRAINED_LAGRANGE_IN_SOLID).

В качестве тестов рассмотрены задачи проникания конусов с радиусом основания $R = 1$ см, массой 40 г, с углами полураствора 30° и 60° по нормали и под углом 30° к поверхности среды, с начальной скоростью $V_0 = 150$ м/с.

На рис. 2 показаны расчетные сетки для задач удара по нормали (а) и под углом (б) в начальный момент времени ($t = 0$).

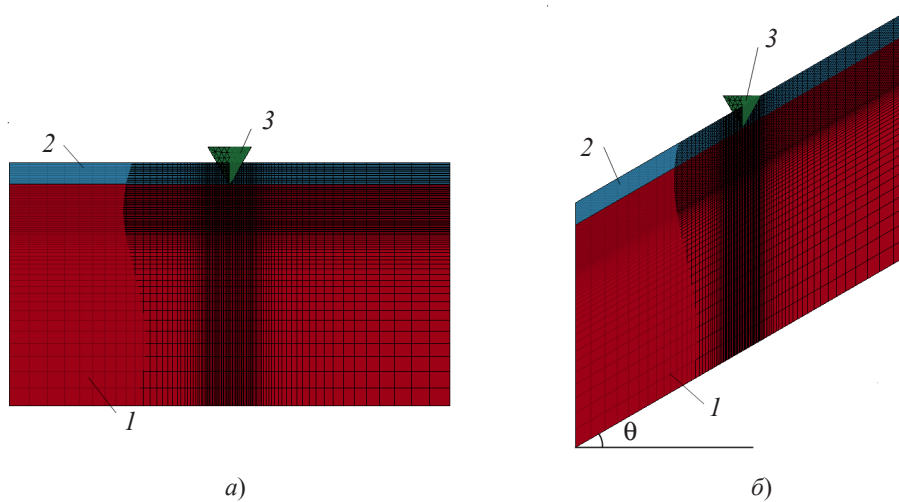


Рис. 2

На рис. 3 представлены результаты моделирования удара и проникания по нормали ударников с углами полураствора 30° (а) и 60° (б) на моменты окончания расчетов ($t = 200$ и 300 мкс), что соответствует погружению ударников на глубину $h = 3R$. Падение величины осевой компоненты вектора скорости тела (в неподвижной системе координат) от начального значения V_0 на данной глубине внедрения составило 20% и 60% для конусов с углом полураствора 30° и 60° соответственно. На рис. 3в, г представлены результаты расчетов проникания тех же ударников под углом 30° к свободной поверхности грунта. Появляется отрицательная радиальная компонента вектора скорости тела, отсутствующая при нормальном внедрении, по величине составившая 2% и 8% от V_0 . Отмечается нормализация (вращение против часовой стрелки) положения ударников в процессе развитого проникания при существенно большем вращательном движении конуса 60° (см. рис. 3г), повернувшегося вокруг центра масс на угол $\psi = 17^\circ$ (для конуса 30° $\psi = 4^\circ$).

В процессе счета также анализировались ускорения ударника как жесткого це-

лого, а также компоненты интегральной силы взаимодействия ударника с грунтом в неподвижной системе координат Oxz .

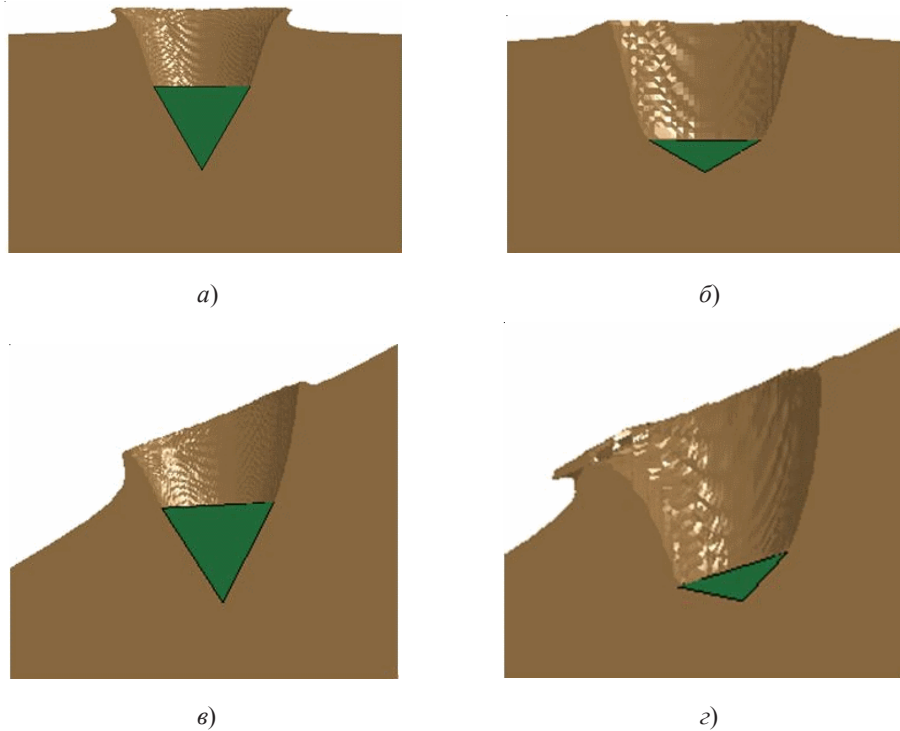


Рис. 3

На рис. 4а, б представлены компоненты главного вектора силы сопротивления внедрению конуса с углом полураствора 30° по нормали (а) и под углом 30° (б) к поверхности грунта. Сплошные линии соответствуют результатам, полученным в трехмерных расчетах, штриховые – полученным в рамках МЛВ. Отмечается хорошее соответствие осевых компонент F_z вектора силы при ударе по нормали (см. рис. 4а) и несколько большее отличие при наклонном ударе (б). На рис. 4б представлены также радиальные компоненты F_r вектора силы (обозначения аналогичны рис. 4а). Результаты, полученные в рамках МЛВ, качественно близки к решению в трехмерной постановке, отличие максимальных значений не превышает 25%. На стадии развитого проникания, где радиальная компонента меняет знак, отличия уменьшаются.

На рис. 4в, г представлены аналогичные результаты для случая внедрения конуса с углом полураствора 60° . Как отмечалось ранее [17, 20], с ростом угла раствора конуса ошибка применимости МЛВ к расчету силы сопротивления внедрению по нормали растет, что видно на рис. 4в. Похожее отличие осевых компонент F_z вектора силы сохраняется и при наклонном проникании (рис. 4г). Радиальная компонента вектора силы описывается вполне удовлетворительно, за исключением начальной стадии удара, где ошибка достигает 30%.

Полученные результаты показывают, что квадратичная по скорости модель локального взаимодействия, удовлетворительно описывающая процесс внедрения конического ударника по нормали к поверхности грунта, с несколько большей погрешностью применима и при наклонном внедрении.

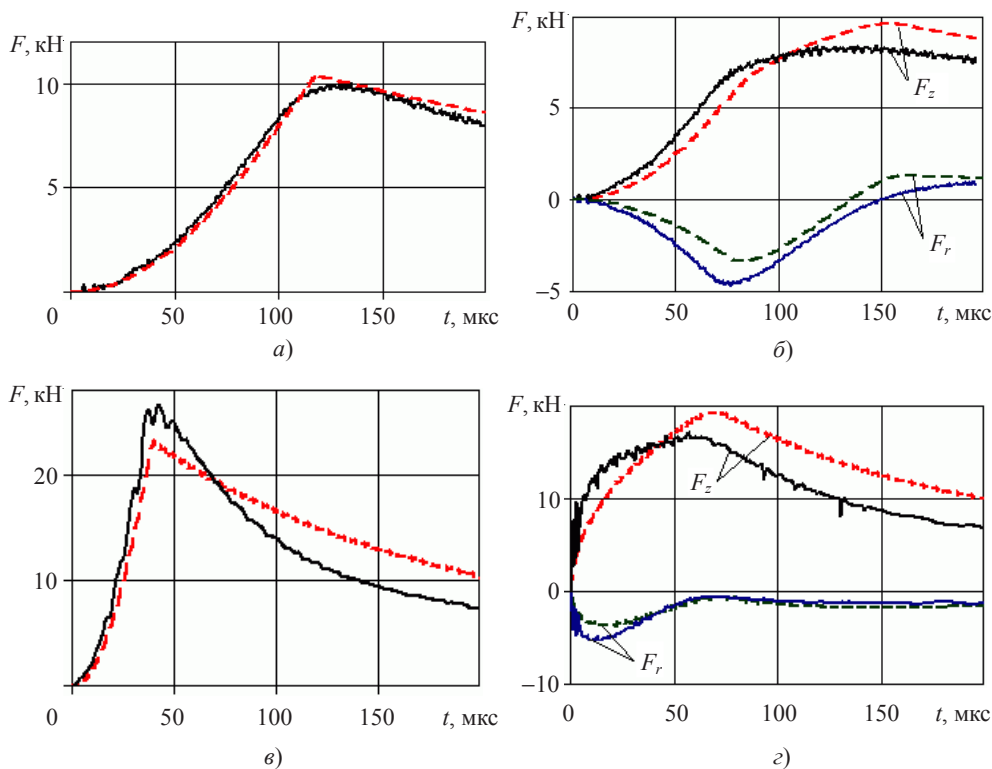


Рис. 4

Список литературы

1. Сагомонян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
2. Григорян С.С. Приближенное решение задачи о проникании тела в грунт // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 4. С. 18–24.
3. Демьяшин Д.А., Крылов С.В. Численное моделирование процессов нормального проникания жестких тел в пористые грунты // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб. / Н. Новгород: Изд-во ННГУ. 1991. С. 103–106.
4. Осипенко К.Ю., Симонов И.В. Модель пространственной динамики тела вращения при взаимодействии с малопрочной средой и несимметричной кавитации // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. №1. С. 143–153.
5. Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт / В.Г. Баженов, А.М. Брагов, В.Л. Котов, А.В. Кочетков // Прикладная математика и механика. 2003. № 6. С. 686–697.
6. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Localized interaction models with non-constant friction for rigid penetrating impactors // International Journal of Solids and Structures. 2007. V. 44. P. 2593–2607.
7. Осипенко К.Ю. Проникание тела вращения в упругопластическую среду // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. №2. С. 169–180.
8. Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии / В.А. Велданов, В.А. Марков, В.И. Пусев и др. // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып. 7. С. 97–104.
9. Якунина Г.Е. Особенности высокоскоростного движения тел в плотных средах // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 3. С. 429–449.
10. Линник Е.Ю. Численное исследование волнового механизма формирования силы

сопротивления внедрению тел вращения в грунтовые среды // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. №1(1). С. 164–169.

11. *Roisman I.V., Yarin A.L., Rubin M.B.* Oblique penetration of a rigid projectile into an elastic-plastic target // *International Journal of Impact Engineering*. 1997. V. 19, No 9–10. P. 769–795.

12. *Баженов В.Г., Котов В.Л.* Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе моделей локального взаимодействия // *Прикладная математика и механика*. 2010. Т. 74. Вып. 3. С. 391–402.

13. *Осипенко К.Ю.* Об устойчивости пространственного движения тела вращения в упругопластической среде // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2012. №2. С. 68–77.

14. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Ballistic impact: recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics: A review // *Applied Mechanics Reviews*. 2005. V. 58. P. 355–371.

15. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Shape optimization of high-speed penetrators: A review // *Central European Journal Engineering*. 2012. No 2(4) P. 473–482.

16. *Крайко А.Н., Якунина Г.Е.* К построению оптимальных тел в рамках моделей локального взаимодействия // *Прикладная математика и механика*. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 41–53.

17. *Котов В.Л.* Исследование применимости автомоделного решения задачи о расширении сферической полости в сжимаемой среде для определения давления на поверхности контакта «ударник – грунт» // *Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т*. 2008. Вып. 70. 2008. С. 123–131.

18. О применимости модели локального взаимодействия для определения сил сопротивления внедрению сферы в нелинейно-сжимаемый грунт / В.Л. Котов, Вл.В. Баландин, Е.Ю. Линник, Вл.Вл. Баландин // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2012. Т. 5, №4. С. 135–142.

19. *Баженов В.Г., Котов В.Л., Линник Е.Ю.* О моделях расчета форм осесимметричных тел минимального сопротивления при движении в грунтовых средах // *Докл. РАН*. 2013. Т. 449, №2. С. 156–159.

20. Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт / В.Л. Котов, Вл.В. Баландин, А.М. Брагов, Е.Ю. Линник, Вл.Вл. Баландин // *Прикладная механика и техническая физика*. 2013. Т. 54, №4. С. 114–125.

21. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1983. 640 с.

22. *Колесников В.А.* Об изменении траектории метеорита при входе в грунт // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1981. №4. С. 99–104.

23. *Forrestal M.J., Luk V.K.* Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid // *Journal of Applied Mechanics*. 1988. V. 55, No. 2. P. 275-279.

24. Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде / В.Л. Котов, Е.Ю. Линник, А.А. Тарасова, А.А. Макарова // *Проблемы прочности и пластичности / Нижегород. ун-т*. 2011. Вып. 73. С. 58–63.

25. Решение задачи о расширении сферической полости в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны / Е.Ю. Линник, В.Л. Котов, А.А. Тарасова, Е.Г. Гоник // *Проблемы прочности и пластичности / Нижегород. ун-т*. 2012. Вып. 74. С. 49–58.

26. *Kreig R.D.* A simple constitutive description for cellular concrete / *Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, Rept. SC-DR-72-0883*, 1972.

**NUMERICALLY MODELING PLANE-PARALLEL DISPLACEMENT
OF CONICAL STRIKERS IN AN ELASTOPLASTIC MEDIUM**

V.L. Kotov, A.Yu. Konstantinov, Yu.I. Kibets, A.A. Tarasova, V.P. Vlasov

The problems of an impact and the initial stage of plane-parallel displacement of bodies normal or oblique to the surface of the free half-space taken by the elastoplastic medium are considered. The forces resisting the penetration of conical strikers of an assigned mass calculated using the quadratic model of local interaction are compared with the results of computer modeling in a full 3D formulation.

Keywords: impact, oblique penetration, conical striker, elastoplastic medium, local interaction model, 3D modeling.