

УДК 539.3

**ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ФОРМЫ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ  
МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЮ  
В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ В РАМКАХ МОДЕЛИ  
ЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ\***

© 2013 г.

**В.Л. Котов, Е.Ю. Линник**

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского*

*vkotov@inbox.ru*

*Поступила в редакцию 19.09.2013*

Приводится алгоритм и метод численного решения задачи оптимизации формы осесимметричного ударника, обеспечивающей минимальное полное сопротивление внедрению в грунтовую среду, в рамках известного метода локальных вариаций. Образующая тела вращения задается кусочно-линейной кривой, давление на поверхности тела определяется в соответствии с трехчленной квадратичной моделью локального взаимодействия. Исследуется сходимость последовательных приближений при численном расчете формы оптимального тела и погрешность определения силы сопротивления в зависимости от числа узлов образующей.

*Ключевые слова:* грунтовая среда, оптимизация формы, тело вращения, минимальное полное сопротивление, модель локального взаимодействия, метод локальных вариаций.

**Введение**

Комплексное исследование процессов контактного взаимодействия жесткого тела с грунтовой средой при ударе и проникании, как и большинство других важных проблем теории удара, необходимо содержит экспериментальные и теоретические методы. Обзор теоретических работ в этом направлении [1, 2] свидетельствует, что большинство из них, и особенно посвященных решению задач оптимизации [3–13], основано на применении различных модификаций моделей локального взаимодействия (МЛВ). Важным результатом этих и предшествующих работ является определение класса абсолютно оптимальных тел [3, 4], сопротивление которых при заданной площади основания не зависит от длины тел и определяется лишь скоростью их движения и свойствами среды. В достаточно общей постановке разработаны [7] методы построения пространственных форм тел, оптимальных по сопротивлению и/или глубине проникания [4, 5]. Показано [6], что в классе пространственных конфигураций задача поиска образующей тела с заданными значе-

---

\* Выполнено в рамках Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2843.2012.8) и РФФИ (12-08-33106-мол\_а\_вед, 13-08-00531\_а, 13-08-00658\_а).

ниями площади основания и максимально допустимой длины может иметь бесконечно много решений. Все такие тела являются коническими, то есть нормаль к поверхности тела составляет с направлением движения постоянный оптимальный угол, определяемый скоростью тела и характеристиками грунта. В работах [13–15] показано, что погрешность определения силы сопротивления внедрению в мягкий грунт острых конических тел на основе закона локальности не превышает ошибки численной методики – величины порядка 1%. Применение модификации МЛВ [13–18] на базе решения задачи о расширении сферической полости позволяет учитывать динамическую сжимаемость и сопротивление сдвигу грунтовой среды в рамках модели Григоряна. В то же время известно [4, 7], что при длине, меньшей длины абсолютно оптимального конуса, тело вращения минимального сопротивления внедрению с заданной длиной и радиусом миделя содержит торец. Для решения этой задачи необходимо применять численные методы.

Ранее численно решались задачи поиска образующей тела с притуплением, внедряющегося на максимальную глубину [8–12]. В настоящей статье приводится решение задачи определения геометрии тела вращения минимального сопротивления внедрению при заданных длине и радиусе поперечного сечения.

1. Рассматривается стадия развитого проникания ударника длиной  $L$  с радиусом миделя  $R$  при постоянной скорости внедрения  $V_0$  (рис. 1), причем обтекание искомой головной части ударника грунтом происходит безотрывно. Полная осевая сила сопротивления  $F$  проникающему телу описывается выражением [8]:

$$F = \sigma_0 R_0^2 + 2\pi \int_{R_0}^R \sigma_n r dr + 2\pi \int_{R_0}^R \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \sigma_\tau r dr, \quad \alpha = \sin \eta. \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое обусловлено напряжениями, действующими на передний плоский торец тела радиуса  $R_0$  (см. рис. 1), второе и третье слагаемые – соответственно нормальными  $\sigma_n$  и касательными  $\sigma_\tau$  напряжениями, действующими на боковую поверхность тела. Напряжения  $\sigma_n$  и  $\sigma_\tau$  описываются трехчленными квадратичными зависимостями  $\sigma_n = \rho_0(AV_0^2\alpha^2 + BV_0\alpha + C)$ ,  $\sigma_0 = \rho_0(AV_0^2 + BV_0 + C)$ , касательные напряжения рассчитываются в соответствии с законом Кулона  $\sigma_\tau = k_{тр}\sigma_n$  с постоянной трения  $k_{тр}$ . Коэффициент  $A$  отражает вклад инерционных сил, параметры  $B$  и  $C$  связаны соответственно с характеристиками внутреннего трения и прочности грунта. Для определения параметров в работе применяется решение одномерной задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде [13–18].

Перейдем в выражении (1) к безразмерным величинам, положив  $D = F/(\rho_0 V_0^2 SA)$ ,  $S = \pi R^2$  – площадь миделя,  $\sigma = \sigma_n/(\rho_0 V_0^2 A)$ ,  $r_0 = R_0/R$ ,  $l = L/R$ ,  $\tilde{B} = B/(AV_0)$ ,  $\tilde{C} = C/(AV_0^2)$ :

$$D(r) = (1 + \tilde{B} + \tilde{C})r_0^2 + 2 \int_{r_0}^1 \left( 1 + k_{тр} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \right) (\alpha^2 + \tilde{B}\alpha + \tilde{C}) r dr.$$

Необходимо определить такую выпуклую кривую  $r(z)$ ,  $r(l) = 1$ , чтобы полное сопротивление имело минимум.

Для приближенного решения задачи оптимизации формы представим образующую искомого оптимального тела в виде ломаной (рис. 1) с координатами  $r_i = r(z_i)$ , аналогично работам [10–12]. Сила сопротивления внедрению такого тела с учетом (1) имеет вид:

$$D = D_0 + \sum_{i=1}^N D_i, \quad (2)$$

$$D_0 = (1 + \tilde{B} + \tilde{C})r_0^2, \quad D_i = \left(1 + k_{\text{тр}} \frac{\sqrt{1 - \alpha_i^2}}{\alpha_i}\right) (\alpha_i^2 + \tilde{B}\alpha_i + \tilde{C})(r_i^2 - r_{i-1}^2), \quad i = \overline{1, N},$$

где координаты  $z_i$  распределяются по длине тела с шагом  $\Delta z_i$ , а

$$\alpha_i = \sin \eta_i = \frac{\Delta r_i}{\sqrt{\Delta z_i^2 + \Delta r_i^2}}, \quad \Delta r_i = r_i - r_{i-1}, \quad i = \overline{1, N}, \quad r_N = 1.$$

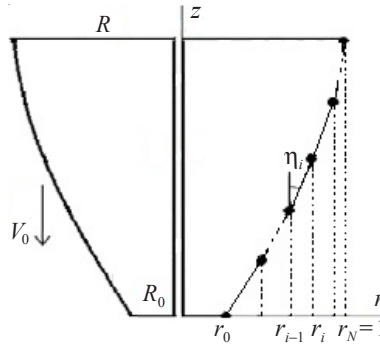


Рис. 1

Ставится следующая задача безусловной оптимизации: найти такой набор координат  $(r_0, \dots, r_{N-1})$ , представляющий выпуклую образующую тела вращения, чтобы интегральная сила сопротивления внедрению (2) достигла минимума. Представленный алгоритм реализует частный случай известного метода локальных вариаций [19, 20].

Вектор неизвестных  $\mathbf{r} = \{r_i\}$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ , будем искать среди локальных экстремумов (2), для определения которых составляется система уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \{\partial D / \partial r_i\} = 0, \quad i = \overline{0, N-1}. \quad (3)$$

Система нелинейных уравнений (3) решается итерационным методом Ньютона, соотношения которого можно записать следующим образом:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{r}^k)(\mathbf{r}^{k+1} - \mathbf{r}^k) = -\mathbf{f}(\mathbf{r}^k), \quad (4)$$

где  $k$  – номер итерации,  $\mathbf{f}'(\mathbf{r}^k) = \{\partial^2 D / \partial r_i \partial r_j\}^k$  – симметричная трехдиагональная матрица.

Таким образом, для определения приращений компонент вектора координат на каждой итерации метода Ньютона решается система алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом прогонки

$$\left\{ \frac{\partial^2 D}{\partial r_i \partial r_j} \right\}^k \Delta r_j^{k+1} = - \left\{ \frac{\partial D}{\partial r_i} \right\}^k, \quad \Delta r_j^{k+1} = r_j^{k+1} - r_j^k, \quad i, j = \overline{0, N-1}.$$

Компоненты левой и правой частей системы (4) определяются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial r_0^2} = 2(1 + \tilde{B}) + (\Delta r_1 + k_{\text{тр}} \Delta z_1)(r_0 + r_1) \left( 2 \frac{\alpha_1^2}{\Delta r_1^2} - 10 \frac{\alpha_1^4}{\Delta r_1^2} + 8 \frac{\alpha_1^6}{\Delta r_1^2} + \tilde{B} \alpha_1'' \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + 2(2r_0 - k_{\text{тп}}\Delta z_1) \left( 2 \frac{\alpha_1^2}{\Delta r_1} - 2 \frac{\alpha_1^4}{\Delta r_1} + \tilde{B}\alpha_1' \right) - 2(\alpha_1^2 + \tilde{B}\alpha_1), \\
\frac{\partial^2 D}{\partial r_i \partial r_i} & = (\Delta r_i + k_{\text{тп}}\Delta z_i)(r_i + r_{i-1}) \left( 2 \frac{\alpha_i^2}{\Delta r_i^2} - 10 \frac{\alpha_i^4}{\Delta r_i^2} + 8 \frac{\alpha_i^6}{\Delta r_i^2} + \tilde{B}\alpha_i'' \right) + \\
& + 2(2r_i + k_{\text{тп}}\Delta z_i) \left( 2 \frac{\alpha_i^2}{\Delta r_i} - 2 \frac{\alpha_i^4}{\Delta r_i} + \tilde{B}\alpha_i' \right) + 2(\alpha_i^2 + \tilde{B}\alpha_i) + \\
& + (\Delta r_{i+1} + k_{\text{тп}}\Delta z_{i+1})(r_{i+1} + r_i) \left( 2 \frac{\alpha_{i+1}^2}{\Delta r_{i+1}^2} - 10 \frac{\alpha_{i+1}^4}{\Delta r_{i+1}^2} + 8 \frac{\alpha_{i+1}^6}{\Delta r_{i+1}^2} + \tilde{B}\alpha_{i+1}'' \right) + \\
& + 2(2r_{i+1} - k_{\text{тп}}\Delta z_{i+1}) \left( 2 \frac{\alpha_{i+1}^2}{\Delta r_{i+1}} - 2 \frac{\alpha_{i+1}^4}{\Delta r_{i+1}} + \tilde{B}\alpha_{i+1}' \right) - 2(\alpha_{i+1}^2 + \tilde{B}\alpha_{i+1}), \\
\frac{\partial^2 D}{\partial r_i \partial r_j} & = -(\Delta r_j + k_{\text{тп}}\Delta z_j)(r_i + r_j) \left( 2 \frac{\alpha_j^2}{\Delta r_j^2} - 10 \frac{\alpha_j^4}{\Delta r_j^2} + 8 \frac{\alpha_j^6}{\Delta r_j^2} + \tilde{B}\alpha_j'' \right) - \\
& - 2(r_i + r_j) \left( 2 \frac{\alpha_j^2}{\Delta r_j} - 2 \frac{\alpha_j^4}{\Delta r_j} + \tilde{B}\alpha_j' \right), \\
\frac{\partial D}{\partial r_0} & = 2(1 + \tilde{B} + \tilde{C})r_0 + (\Delta r_1 + k_{\text{тп}}\Delta z_1)(r_0 + r_1) \left( -2 \frac{\alpha_1^2}{\Delta r_1} + 2 \frac{\alpha_1^4}{\Delta r_1} - \tilde{B}\alpha_1' \right) - \\
& - (2r_0 - k_{\text{тп}}\Delta z_1)(\alpha_1^2 + \tilde{B}\alpha_1 + \tilde{C}), \\
\frac{\partial D}{\partial r_i} & = (\Delta r_i + k_{\text{тп}}\Delta z_i)(r_i + r_{i-1}) \left( 2 \frac{\alpha_i^2}{\Delta r_i} - 2 \frac{\alpha_i^4}{\Delta r_i} - \tilde{B}\alpha_i' \right) + (2r_i + k_{\text{тп}}\Delta z_i)(\alpha_i^2 + \tilde{B}\alpha_i + \tilde{C}) - \\
& - (\Delta r_{i+1} + k_{\text{тп}}\Delta z_{i+1})(r_{i+1} + r_i) \left( 2 \frac{\alpha_{i+1}^2}{\Delta r_{i+1}} - 2 \frac{\alpha_{i+1}^4}{\Delta r_{i+1}} - \tilde{B}\alpha_{i+1}' \right) - \\
& - (2r_i - k_{\text{тп}}\Delta z_{i+1})(\alpha_{i+1}^2 + \tilde{B}\alpha_{i+1} + \tilde{C}),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_i' & = \frac{\partial(\sin \eta_i)}{\partial r_i} = \frac{1}{\sqrt{\Delta z_i^2 + \Delta r_i^2}} - \frac{\Delta r_i^2}{(\Delta z_i^2 + \Delta r_i^2)^{3/2}}, \\
\alpha_i'' & = \frac{\partial^2(\sin \eta_i)}{\partial r_i^2} = -\frac{3\Delta r_i^2}{(\Delta z_i^2 + \Delta r_i^2)^{3/2}} + \frac{3\Delta r_i^3}{(\Delta z_i^2 + \Delta r_i^2)^{5/2}}.
\end{aligned}$$

Для того чтобы решение  $\mathbf{r}^*$  системы уравнений (3) определяло локальный минимум функции  $D(\mathbf{r})$ , необходима положительная определенность матрицы  $\mathbf{f}'(\mathbf{r}^*)$ , составленной из вторых производных от  $D$ , что легко проверяется.

В качестве начального приближения в итерационном процессе (4) рассмотрим выражение (2) при  $N = 1$ ; соответствующий набор координат определяет форму образующей – усеченный конус. Решение данной задачи в рамках одночленной МЛВ может быть получено в конечном виде [13]. В случае когда напряжение определяется только квадратом нормальной скорости, из (2) следует выражение для безразмерной силы сопротивления внедрению усеченного конуса

$$D = r_0^2 + \frac{1 - r_0^2}{1 + l^2 / (1 - r_0)^2}. \quad (5)$$

Производная  $dD/dr_0$  обращается в ноль при значениях  $r_0$ , удовлетворяющих уравнению

$$(r_0^2 - (2 + l^2)r_0 + 1)(r_0 - 1)^3 = 0. \quad (6)$$

Минимум силы сопротивления (5) достигается для решения уравнения (6)  $r_0^* < 1$ , которое не зависит от коэффициента  $A$  и скорости удара. При этом выполняется соотношение  $D(r_0^*) = r_0^*$ . С учетом этого соотношения, а также (6), сила сопротивления внедрению (5) оптимального усеченного конуса при значениях  $l \gg 1$  может быть представлена в виде  $D = l^{-2} - 2l^{-4} + O(l^{-8})$ , тогда как сила сопротивления внедрению острого конуса  $D_c = (1 + l^2)^{-1} = l^{-2} - l^{-4} + O(l^{-8})$ .

Таким образом, отличие сил является величиной порядка  $l^{-4}$ , а с увеличением безразмерной длины тела влияние формы тел на силу сопротивления внедрению становится все меньше. Отметим также, что в рассмотренном случае, когда МЛВ содержит только один член с коэффициентом  $A$  (напряжение пропорционально квадрату скорости), форма оптимального тела не зависит ни от скорости его движения, ни от коэффициента модели.

2. Расчеты проведены при следующих значениях параметров квадратичной по скорости МЛВ:  $\tilde{B} = 0,17$ ,  $\tilde{C} = 0,1$ , соответствующих силе сопротивления сухой песчаной смеси естественного состава [13]. Коэффициент поверхностного трения  $k_{\text{тр}} = 0,3$ , безразмерная длина ударника  $l = \sqrt{5}$ , скорость проникания  $V_0 = 400$  м/с.

На рис. 2 демонстрируется сходимость итерационного процесса (4) при количестве узлов образующей  $N = 5$ . Сравниваются формы боковой поверхности, полученные при числе итераций  $k = 0, 1, 2, 3$  и 10 (штриховая линия, синяя, зеленая, красная и черная линии соответственно).

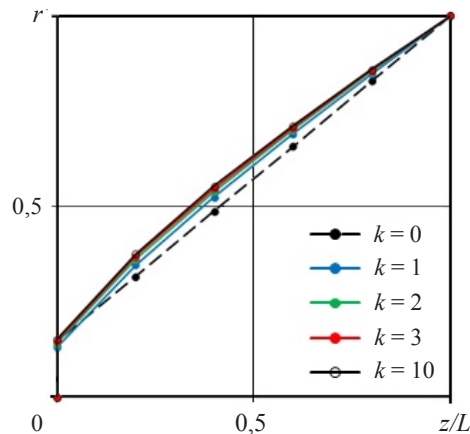


Рис. 2

Рисунки 3, 4 иллюстрируют влияние количества узлов  $N$  на форму образующей и значение силы сопротивления. Рассматривались значения  $N = 1, 2, 4, 8$  и 16 (штриховая, сплошная черная и сплошная синяя линии, красный и зеленый маркеры соответственно), для каждого из которых расчет доводился до сходимости (число итераций порядка 10). Из рис. 3 видно, что формы образующей оптимального тела

вращения уже при  $N = 4$  и  $8$  мало отличаются друг от друга. На рис. 4 приведены относительные ошибки в определении радиуса притупления тела (сплошная линия) и силы сопротивления внедрению (штриховая линия), полученные по формулам

$$\delta_r = \frac{r_0^N - r_0^{2N}}{r_0^{2N}} \cdot 100, \quad \delta_D = \frac{D^N - D^{2N}}{D^{2N}} \cdot 100.$$

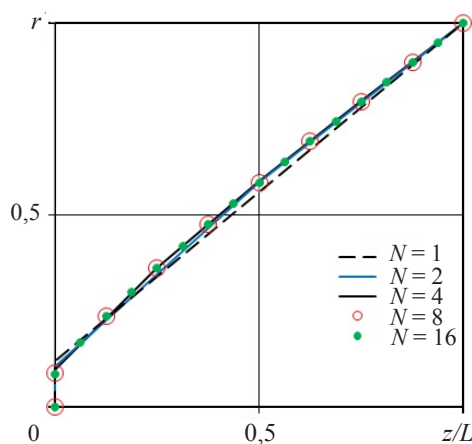


Рис. 3

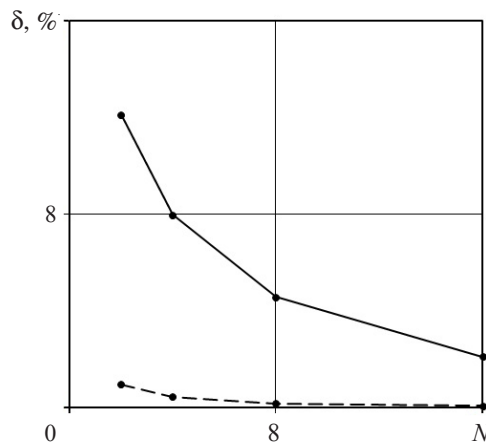


Рис. 4

Изменение значения силы сопротивления внедрению становится менее 2% уже при  $N = 2$ , величина радиуса притупления определяется с той же погрешностью при  $N = 16$ .

Отметим также, что представленные в настоящей работе затупленные формы оптимального тела, проникающего в мягкую грунтовую среду, качественно соответствуют полученным ранее результатам [8–12], в которых рассматривались задачи проникания оптимальных тел в среды типа металла и бетона.

#### Список литературы

1. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: Recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics. A Review // Applied Mechanics Reviews. 2005. V. 58. P. 355–371.
2. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of high-speed penetrators: a review // Central European Journal Engineering. 2012. 2(4). P. 473–482.
3. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. О телах наименьшего сопротивления, движущихся в средах при наличии закона локальности // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. №1. С. 95–106.
4. Остапенко Н.А. Тела вращения минимального сопротивления при движении в плотных средах // Успехи механики. 2002. №2. С. 105–149.
5. Якунина Г.Е. К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // Прикладная математики и механика. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 299–309.
6. Якунина Г.Е. Оптимальные формы движущихся в среде тел при учете трения // Прикладная математики и механика. 2005. Т. 69. Вып. 5. С. 759–774.
7. Крайко А.Н., Якунина Г.Е. К построению оптимальных тел в рамках моделей локального взаимодействия // Прикладная математики и механика. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 41–53.
8. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Оптимизация формы жесткого тела, внедряющегося в сплошную среду // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегородский ун-т. 2007. Вып. 69. С. 47–57.

9. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В. О проникании неосесимметричных тел в твердую деформируемую среду и оптимизация их формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. №4. С. 176–183.

10. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Localized interaction models with non-constant friction for rigid penetrating impactors // Int. J. of Solids and Structures. 2007. V. 44. P. 2593–2607.

11. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of impactors against a finite width shield using a modified method of local variations // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2007. V. 35. P. 113–125.

12. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Modification of the method of local variations for shape optimization of penetrating impactors using the localized impactor/shield interaction models // Mechanics Based Design of Structures and machines. 2007. V. 35. P. 1–14.

13. Баженев В.Г., Котов В.Л., Линник Е.Ю. О моделях расчета форм осесимметричных тел минимального сопротивления при движении в грунтовых средах // Докл. РАН. 2013. Т. 449. №2. С. 156–159.

14. О применимости модели локального взаимодействия для определения сил сопротивления внедрению сферы в нелинейно-сжимаемый грунт / В.Л. Котов, Вл.В. Баландин, Е.Ю. Линник, Вл.Вл. Баландин // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5, №4. С. 135–142.

15. Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт / В.Л. Котов, Вл.В. Баландин, А.М. Брагов, Е.Ю. Линник, Вл.Вл. Баландин // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, №4. С. 114–125.

16. Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде / В.Л. Котов, Е.Ю. Линник, А.А. Тарасова, А.А. Макарова // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2011. Вып. 73. С. 58–63.

17. Решение задачи о расширении сферической полости в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны / Е.Ю. Линник, В.Л. Котов, А.А. Тарасова, Е.Г. Гоник // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2012. Вып. 74. С. 49–58.

18. Линник Е.Ю. Численное исследование волнового механизма формирования силы сопротивления внедрению тел вращения в грунтовые среды // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 1(1). С. 164–169.

19. Черноусько Ф.Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5, №4. С. 749–754.

20. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления: Численные методы. М.: Наука, 1973. 238 с.

## NUMERICAL COMPUTATION OF THE FORM OF A BODY OF REVOLUTION WITH THE MINIMAL RESISTANCE TO MOTION IN A SOIL MEDIUM IN THE FRAME OF THE LOCAL INTERACTION MODEL

V.L. Kotov, E.Yu. Linnik

An algorithm and a method are presented for numerically analyzing the problem of form optimization of an axisymmetric striker with minimal total resistance to the indentation in a soil in the frame of the well-known local variation method. The generatrix of the body of revolution is given by a piecewise-linear curve; the pressure on the body surface is determined following the trinomial quadratic model of local interaction. The convergence of successive approximations when numerically analyzing the optimal form of the body and the error in determining the resistance force as a function of the number of nodes of the generatrix are investigated.

*Keywords:* soil medium, optimization of the form, body of revolution, minimal total resistance, local interaction model, local variation method.