УДК 539.3

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК РАЗЛИЧНОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ*

Н.А. Абросимов[1], А.В. Елесин[1], Л.Н. Лазарев[2], Н.А. Новосельцева[1]

[1]*НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского*
[2]*Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского*

abrosimov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 25.11.2013

Рассматривается методика численного анализа влияния структуры армирования на характер динамического поведения и прочность слоистых стеклопластиковых цилиндрических оболочек, нагруженных однократным импульсом внутреннего давления.

Ключевые слова: композитные материалы, оболочки, структура армирования, импульсное нагружение, численные методы.

Введение

Возрастающее применение композитных материалов при создании конструкций современной техники обусловливает значительный интерес к исследованию характерных особенностей их динамического поведения и прочности. Необходимость сохранения работоспособности этих конструкций в условиях интенсивных импульсных нагрузок предъявляет повышенные требования к моделям и методам расчета на прочность с тем, чтобы применяемые расчетные схемы наиболее полно и всесторонне описывали моделируемые реальные процессы. Особенно важным для прикладных исследований является изучение начального неустановившегося процесса распространения возмущения в трансверсальном направлении по отношению к плоскости армирования композитного элемента конструкции. Имеющиеся весьма немногочисленные теоретические [1–3] и экспериментальные исследования [4] свидетельствуют о том, что разрушение композитных элементов конструкций при интенсивных импульсных воздействиях наступает на стадии переходного процесса и связано со спецификой их структуры, с невысокой поперечной прочностью.

Отмеченные обстоятельства позволяют сделать вывод об актуальности изучения динамической реакции и прочности импульсно нагруженных слоистых композитных элементов конструкций на основе моделей, описывающих с необходимой

*Выполнено при частичном финансировании Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и РФФИ (грант 13-08-00742).

точностью не только продольные, но и поперечные волновые процессы в композитном материале, что и составляет предмет данной статьи.

1. Постановка и метод решения задачи

Отнесем цилиндрическую оболочку длиной L и радиусом R к системе координат $\alpha_i\ (i=\overline{1,3})$: ось α_1 направлена вдоль образующей; α_2 – по окружности; α_3 – по внешней нормали к срединной поверхности. Коэффициенты Ламе и главные кривизны равны: $H_1 = Z_1 = 1$, $H_2 = Z_2 = 1 + k_2\alpha_3$, $H_3 = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$.

Предполагается, что цилиндрическая оболочка образована спиральной перекрестной намоткой однонаправленного композитного материала с различной структурой пакета по толщине. Кинематическая модель деформирования многослойного пакета основывается на неклассической теории оболочек. Для этого компоненты вектора перемещений аппроксимируются конечными рядами по толщине многослойного пакета [2]:

$$u_i(\alpha_1,\alpha_3,t)=\sum_{n=0}^{N}u_i^n(\alpha_1,t)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}P_n(x),\quad -1\le x\le 1, \tag{1}$$

где $x=2\alpha_3/h$; h – толщина оболочки; $u_i^n(\alpha_1,t)$ – искомые функции; t – время, $(n+1/2)^{1/2}P_n(x)$ – ортонормированнные полиномы Лежандра.

Формулировка геометрических зависимостей базируется на соотношениях простейшего квадратичного варианта нелинейной теории упругости в криволинейных координатах [5], которые с учетом (1) запишутся в виде:

$$e_{11}=\sum_{n=0}^{N}\frac{\partial u_1^n}{\partial\alpha_1}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}P_n(x)+\frac{1}{2}\omega_2^2,$$

$$e_{22}=\frac{k_2}{Z_2}\sum_{n=0}^{N}u_3^n\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}P_n(x),$$

$$e_{33}=\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{N}u_3^n\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}P_n'(x), \tag{2}$$

$$e_{13}=\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{N}u_1^n\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}P_n'(x)+\sum_{n=0}^{N}\frac{\partial u_3^n}{\partial\alpha_1}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}P_n(x),$$

$$\omega_2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{N}u_1^n\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}P_n'(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{\partial u_3^n}{\partial\alpha_1}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}P_n(x)\right),$$

где $P_n'(x)$ – производные от полиномов Лежандра.

Связь между тензорами напряжений и деформаций устанавливается на основе закона Гука для ортотропного тела в сочетании с теорией эффективных модулей. Определяющие соотношения для симметричных смежных слоев композитной оболочки запишутся в виде:

$$\sigma_{ii}=\sum_{j=1}^{3}C_{ij}e_{jj}\ (i=\overline{1,3}),\quad \sigma_{13}=G_{13}e_{13}, \tag{3}$$

где C_{ij}, G_{13} – эффективные жесткостные характеристики. При этом допускается локальное разрушение элементарных слоев в пакете многослойного композита.

Модель деградации жесткостных характеристик многослойного пакета формулируется на базе критерия максимальных напряжений, вычисленных в осях ортотропии слоя. В процессе деформирования и трещинообразования связующего предполагается жесткое сцепление между соседними слоями. Многослойный пакет находится в условиях объемного напряженного состояния.

Деформирование однонаправленного материала в составе пакета слоев многослойного композита происходит в соответствии с модельными диаграммами, изображенными на рис. 1, где F_{ij}^P, F_{ij}^C, ε_{ij}^P, ε_{ij}^C – пределы прочности и предельные деформации материала на растяжение и сжатие; $\varepsilon_{ij}^{P\max}$, $\varepsilon_{ij}^{C\max}$ – максимальные значения деформаций растяжения и сжатия за предысторию деформирования. Деформирование однонаправленного материала в направлении волокон полностью упруго, и по достижении напряжениями, действующими вдоль волокон, предельных значений слой считается разрушенным. Деформирование слоя в направлении, ортогональном волокнам, происходит линейно-упруго, затем начинается процесс трещинообразования в связующем. Разгрузка из любой точки участка трещинообразования происходит при модуле упругости, равном секущему модулю диаграммы $\widetilde{E}_{ii} = E_{ii}^0 \varepsilon_{ii}^P / \varepsilon_{ii}^{P\max}$, где E_{ii}^0 $(i = 2,3)$ – значения модулей упругости в начальном неповрежденном состоянии. Повторное деформирование в поперечном направлении происходит также при положительных значениях напряжений, не превышающих F_{ii}^P, и модуле $\widetilde{E}_{ii}$. При сжатии монослоя полностью восстанавливается начальный модуль упругости материала. Если поперечные напряжения достигают предельной величины F_{ii}^C, связующее считается разрушенным и слой продолжает воспринимать только сжимающую нагрузку. Поведение монослоя при сдвиге не зависит от знака напряжений σ_{ij} $(i = 1,2;\ j = 2,3;\ i \neq j)$, поэтому после локального разрушения разгрузка из любой точки диаграммы происходит при модуле сдвига $\widetilde{G}_{ij} = G_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^P / \varepsilon_{ij}^{\max}$.

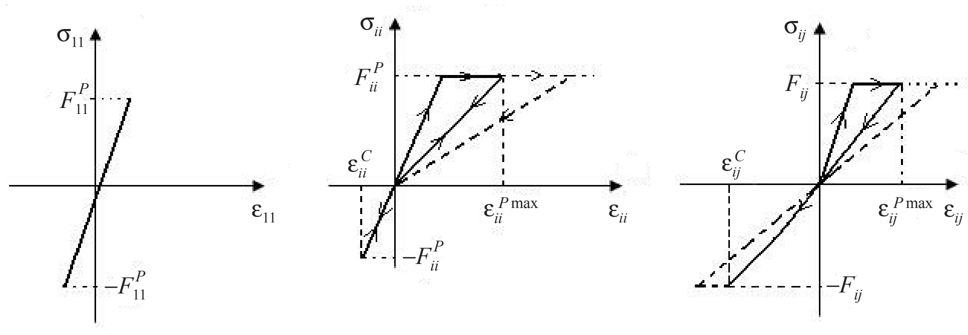

Рис. 1

В зависимости от знака поперечных деформаций и модели разрушения связующего модули упругости монослоя с трещинами принимают одно из возможных значений, приведенных в табл. 1 [2].

В результате разрушения отдельных элементарных слоев композита происходит перераспределение напряжений между слоями, а многослойный пакет продолжает оказывать сопротивление дальнейшему деформированию. Будем считать, что исчерпание несущей способности многослойной конструкции происходит в момент зануления в каком-либо поперечном сечении всех жесткостных характеристик.

Таблица 1

Схема редуцирования модулей упругости слоя

Характер разрушения	Текущее значение поперечных деформаций	E_{11}	E_{22}	E_{33}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
$\sigma_{11} > F^P_{11}$		0	0	0	0	0	0
$\lvert\sigma_{11}\rvert > F^C_{11}$	$e_{22} > 0;\quad e_{33} > 0$	0	0	0	0	0	0
	$e_{22} > 0;\quad e_{33} < 0$	0	0	E_{33}	0	0	0
	$e_{22} < 0;\quad e_{33} > 0$	0	E_{22}	0	0	0	0
	$e_{22} < 0;\quad e_{33} < 0$	0	E_{22}	E_{33}	0	0	0
$\sigma_{22} > F^P_{22}$	$e_{22} > 0$	E^0_{11}	$\widetilde{E}_{22}$	E_{33}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
	$e_{22} < 0$	E^0_{11}	E^0_{22}	E_{33}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
$\sigma_{33} > F^P_{33}$	$e_{33} > 0$	E^0_{11}	E_{22}	$\widetilde{E}_{33}$	G_{12}	G_{13}	G_{23}
	$e_{33} < 0$	E^0_{11}	E_{22}	E^0_{33}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
$\lvert\sigma_{22}\rvert > F^C_{22}$ или $\lvert\sigma_{33}\rvert > F^C_{33}$	$e_{22} > 0;\quad e_{33} > 0$	E^0_{11}	0	0	G_{12}	G_{13}	G_{23}
	$e_{22} > 0;\quad e_{33} < 0$	E^0_{11}	0	E_{33}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
	$e_{22} < 0;\quad e_{33} > 0$	E^0_{11}	E_{22}	0	G_{12}	G_{13}	G_{23}
	$e_{22} < 0;\quad e_{33} < 0$	E^0_{11}	E_{22}	E_{33}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
$\lvert\sigma_{12}\rvert > F_{12}$		E^0_{11}	E_{22}	E_{33}	$\widetilde{G}_{12}$	G_{13}	G_{23}
$\lvert\sigma_{13}\rvert > F_{13}$		E^0_{11}	E_{22}	E_{33}	G_{12}	$\widetilde{G}_{13}$	G_{23}
$\lvert\sigma_{23}\rvert > F_{23}$		E^0_{11}	E_{22}	E_{33}	G_{12}	G_{13}	$\widetilde{G}_{23}$

Для построения энергетически согласованной разрешающей системы уравнений движения оболочки используем принцип возможных перемещений [6], который с учетом внутреннего нагружения и свободных торцов оболочки запишется в виде:

$$\int\limits_0^L \sum_{n=0}^N \left[M^n_{11}\frac{\partial(\delta u^n_1)}{\partial\alpha_1} + (M'^n_{13} + N'^n_{11})\delta u^n_1 + (M^n_{13} - N^n_{11})\frac{\partial(\delta u^n_3)}{\partial\alpha_1} + (k_2 M^n_{22} + M^n_{33})\delta u^n_3 \right] d\alpha_1 +$$

$$+\int\limits_0^L \sum_{n=0}^N \left[\left(\sum_{m=0}^N A^n_m \ddot{u}^m_1\right)\delta u^n_1 + \left(\sum_{m=0}^N A^n_m \ddot{u}^m_3\right)\delta u^n_3 \right] d\alpha_1 - \int\limits_0^L \sum_{n=0}^N F^n_3 u^n_3\, d\alpha_1 = 0, \qquad (4)$$

где

$$M^n_{11} = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^K \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\int\limits_{-1}^1 \sigma_{11} Z_2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P_n\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)dt,$$

$$M^n_{22} = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^K \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\int\limits_{-1}^1 \sigma_{22} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)dt,$$

$$M^n_{13} = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^K \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\int\limits_{-1}^1 \sigma_{13} Z_2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P_n\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)dt,$$

$$M'^n_{13} = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^K \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\int\limits_{-1}^1 \sigma_{13} Z_2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P'_n\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)dt,$$

$$N_{11}^{n}=\frac{h}{4}\sum_{i=1}^{K}\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\int_{-1}^{1}\sigma_{11}Z_2\omega_2\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}P_n\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}t+\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)dt,$$

$$N_{11}'^{n}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\int_{-1}^{1}\sigma_{11}Z_2\omega_2\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}P_n''\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}t+\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)dt,$$

$$M_{33}^{n}=\frac{h}{4}\sum_{i=1}^{K}\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\int_{-1}^{1}\sigma_{33}Z_2\omega_2\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}P_n'\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}t+\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)dt,$$

$$A_n^n=\rho\frac{h}{2}\ \left(n=\overline{0,N}\right),\quad A_{n+1}^{n}=A_n^{n+1}=\rho\frac{k_2h^2}{4}\frac{n+1}{\sqrt{4n^2+8n+3}}\ \left(n=\overline{0,N-1}\right),$$

$$A_m^n=0 \text{ при } n\neq m,\ \left(m,n=\overline{0,N}\right),\quad F_3^n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}(-1)^n p_3\left(1-\frac{k_2h}{2}\right),$$

ρ – плотность материала оболочки; p_3 – интенсивность импульса внутреннего давления; K – число слоев оболочки; x_i – толщинная координата i-го слоя, отсчитываемая от внутренней поверхности оболочки.

Выполняя в вариационном уравнении (4) интегрирование по частям и учитывая независимость вариаций δu_i^n, получим уравнения движения цилиндрической оболочки и естественные динамические граничные условия. Дополняя полученные соотношения необходимым числом начальных условий, получим замкнутую систему уравнений для анализа нестационарных процессов деформации и прочности композитных цилиндрических оболочек, нагруженных импульсом внутреннего давления, в неклассической постановке.

Численный метод решения сформулированной задачи основывается на явной вариационно-разностной схеме [2].

2. Результаты решения задачи

Для апробации рассматриваемой методики было проведено сравнение численных расчетов с экспериментальными данными [7] по однократному нагружению изнутри цилиндрической оболочки импульсом давления, вызванным подрывом в ее геометрическом центре заряда взрывчатого вещества (ВВ) массой m = 0,064 кг. В расчетах импульс давления задавался с помощью эмпирической зависимости

$$p_3(\alpha_1,t)=\begin{cases}0{,}35mq/l^3 \text{ при } t\le 0{,}35l/\sqrt{q},\\ 0 \text{ при } t>0{,}35l/\sqrt{q},\end{cases}$$

где $q = 4{,}77\cdot10^6$ Дж/кг – теплотворная способность ВВ; l – расстояние от центра заряда до точки внутренней поверхности оболочки. Оболочка получена намоткой восьми спиральных слоев (угол армирования $\varphi=\pm45°$) и кольцевых ($\varphi = 90°$) слоев с отношением их толщин 1:1 (структура пакета $[90_2^\circ, \pm45°]_4$).

Оболочка имела следующие размеры: радиус внутренней поверхности R = = 0,15 м, толщина h = 0,00833 м, длина $L = 4R$.

Физико-механические характеристики однонаправленного композитного материала: E_{11} = 54,1 ГПа, $E_{22} = E_{33}$ = 9,9 ГПа, $\nu_{12} = \nu_{13}$ = 0,281, ν_{23} = 0,3, $G_{12} = G_{13}$ = = 3,57 ГПа, G_{23} = 3,42 ГПа, ρ = 2013 кг/м^3.

В таблице 2 представлены результаты сравнения численных расчетов с экспериментальными данными по максимальным значениям кольцевой деформации e_{22}^{*} в центральном сечении оболочки на ее внешней поверхности и по периоду радиальных колебаний T. Здесь в числителе приведены экспериментальные значения, а в знаменателе – расчетные.

Таблица 2

Результаты сравнения численных расчетов и экспериментальных данных

e_{22}^{*}, %	$T \cdot 10^6$, с
$\dfrac{1{,}00}{0{,}92}$	$\dfrac{230}{240}$

Видно, что максимальная ошибка по амплитуде и периоду колебаний составляет 8% и 5% соответственно. При этом следует заметить, что погрешность экспериментальных измерений достигала 10% [7].

Некоторые характерные осциллограммы окружных деформаций в центральном сечении на внешней поверхности неразрушенных оболочек для различных структур армирования и массы заряда ВВ m = 0,04 кг приведены на рис. 2.

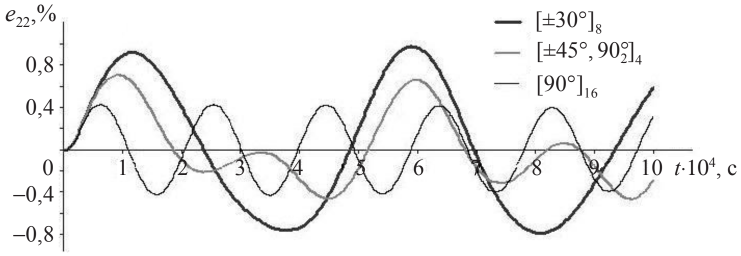

Рис. 2

Результаты сравнительного анализа численного и экспериментального исследования [7] влияния углов армирования и схемы чередования слоев на характер послойного разрушения оболочек представлены в табл. 3. Здесь в числителе приведены экспериментальные данные, а в знаменателе – результаты расчетов.

Таблица 3

Результаты сравнения расчетов и экспериментальных данных

Структура армирования	h/R, %	$m_{\text{ВВ}}$, кг	$m^{*} \cdot 10^3$	e_{22}^{*}, %	Состояние оболочки *эксперимент* / *расчет*
$[\pm 65°]_8$	6,35	0,063	5,50	$\dfrac{0{,}70}{0{,}70}$	*не разрушилась* / *не разрушилась, есть трещины в связующем*
$[90°]_{16}$	5,52	0,0624	6,25	$\dfrac{0{,}55}{0{,}69}$	*разрушилась, кольцевые трещины* / *разрушилась*
$[\pm 45°, 90°_2]_4$	5,40	0,064	7,00	$\dfrac{1{,}00}{0{,}80}$	*не разрушилась,* / *есть разрушения связующего*
	4,80	0,169	19,30	$\dfrac{3{,}10}{2{,}93}$	*не разрушилась, внутренние отслоения* / *разрушилась*

На рис. 3 для различных структур армирования показаны зависимости максимальных кольцевых деформаций от удельной взрывной нагрузки $m^* = m_{\text{ВВ}}/m_{\text{О}}$ ($m_{\text{О}}$ – масса оболочки), где точками обозначены результаты эксперимента (светлые точки – оболочка не разрушена, темные – разрушена), а сплошная линия – результаты расчета.

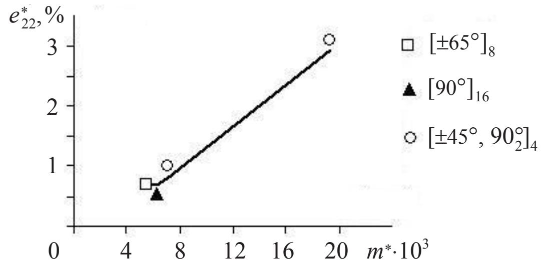

Рис. 3

Анализ полученных расчетных данных показал, что динамическая реакция и характер разрушения слоистых цилиндрических оболочек существенно зависит от структуры армирования. При этом значения удельной взрывной нагрузки m^* и максимальной кольцевой деформации e_{22}^* в фазе разрушения для оболочек с различными углами армирования и схемами укладки слоев заметно отличаются. Видно, что оболочки с комбинированной схемой армирования (чередующиеся спиральные и кольцевые слои с соотношением их толщин (1:1)) обладают наиболее высокой несущей способностью.

Заключение

Предложенная расчетная модель позволяет с удовлетворительной точностью описывать процесс послойного разрушения цилиндрических оболочек намоточного типа с различными структурами армирования.

Список литературы

1. *Богданович А.Е.* Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.

2. *Абросимов Н.А.*, *Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.

3. *Лепихин П.П.*, *Ромащенко В.А.* Методы и результаты анализа напряженно-деформированного состояния и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при динамическом нагружении (обзор). Сообщение 2. Теоретические методы // Проблемы прочности. 2013. № 2. С. 31–45.

4. *Федоренко А.Г.*, *Сырунин М.А.*, *Иванов А.Г.* Критерии выбора композитных материалов для оболочечных конструкций, локализующих взрыв (обзор) // ФГиВ. 2005. Т. 41, №5. С. 3–13.

5. *Шаповалов Л.А.* Об учете поперечного обжатия в уравнениях нелинейной динамики оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1997. №3. С. 156–168.

6. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 512 с.

7. *Федоренко А.Г.*, *Сырунин М.А.*, *Иванов А.Г.* Влияние структуры армирования ориентированных стеклопластиков на прочность круговых цилиндрических оболочек при взрывном нагружении изнутри // Механика композитных материалов. 1991. № 4. С. 631–640.

NUMERICALLY ANALYZING THE STRENGTH OF FIBERGLASS CYLINDRICAL SHELLS OF VARIOUS STRUCTURE UNDER PULSED LOADING

N.A. Abrosimov, A.V. Yelesin, L.N. Lazarev, N.A. Novoseltseva

A methodology of numerically analyzing the effect of the reinforcement pattern on the nature of dynamic behavior and strength of layered fiberglass cylindrical shells loaded by a single internal pressure pulse is considered.

Keywords: composite materials, shells, reinforcement pattern, pulsed loading, numerical methods.