УДК 539.3+519.6

ШАГОВЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА НА УЗЛАХ СХЕМЫ РУНГЕ – КУТТЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ШАГА ИНТЕГРИРОВАНИЯ*

Л.А. Игумнов, Я.Ю. Ратаушко

НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 14.11.2013

Статья посвящена развитию шаговых по времени методов численного обращения преобразования Лапласа, основанных на теореме операционного исчисления об интегрировании оригинала. Возникающая шаговая схема определяется выбором квадратурной формулы с ключом и схемой численного решения задачи Коши, порождаемой интегралом Вольтерра. Квадратурная формула с ключом возникает из условий интегрирования сильно осциллирующих функций. Предложенный метод продемонстрирован на построении оригиналов решений одномерной пороупругой задачи.

Ключевые слова: обращение преобразования Лапласа, шаговый метод, схема Рунге – Кутты, интегрирование сильно осциллирующих функций, одномерная пороупругая задача.

Введение

В работах [1–3] предложен оригинальный подход к построению шаговых по времени схем метода граничных элементов. Ключевой проблемой построения такой схемы [3–5] является численное обращение интегрального преобразования Лапласа. В работах [6–8] применен шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа. В работе [9] приводится модификация метода с переменным шагом интегрирования при подсчете весовых множителей квадратурной суммы. Расширение шагового метода дают также работы [10, 11], предлагающие использование схем Рунге – Кутты для решения задачи Коши, порожденной специальной процедурой обращения преобразования Лапласа. В статье рассматривается обобщение подходов [6–11].

* Выполнено при частичном финансировании Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-593.2014.8) и РФФИ (гранты 14-08-31415-мол_а, 14-08-31410-мол_а, 14-08-00811-А, 12-08-00984-а, 13-08-97091-р_поволжье_а, 12-01-00698-а, 13-08-00658-а).

Постановка задачи и метод решения

Прямое и обратное интегральные преобразования Лапласа соответственно определяются формулами:

$$\overline{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widetilde{\omega}-i\infty}^{\widetilde{\omega}+i\infty} \overline{f}(s) e^{st} ds,$$

где $s = \widetilde{\omega} + i\omega$ – комплексная переменная, введенная в полуплоскости $\widetilde{\omega} > \widetilde{\omega}_0$.

Рассмотрим метод, опирающийся на теорему об интегрировании оригинала, – шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа.

Пусть

$$f(t) = \int_0^t \widetilde{f}(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Заменим интеграл (1) квадратурной суммой, весовые множители которой определяются с помощью изображения по Лапласу $\overline{f}$ и линейного многошагового метода (с учетом результатов, полученных в [1–3]):

$$f(0) = 0, \quad f(n\Delta t) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(\Delta t), \quad n = 1,...,N, \quad (2)$$

где

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \bar{f}(s) s e^{-inl\frac{2\pi}{L}}, \quad s = \frac{\gamma(z)}{\Delta t}, \quad z = Re^{i\varphi}, \quad \varphi = 2\pi \frac{l}{L}, \quad (3)$$

L – количество расчетных узлов для численного интегрирования по углу φ, R – параметр метода.

Аппроксимация, используемая при выводе формул (2), (3), основана на применении линейного многошагового метода (с характеристической функцией $\gamma(z)$) для решения возникающей в процессе преобразования интеграла (1) задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d}{dt} x(t) = sx(t) + C, \quad x(0) = 0. \quad (4)$$

На выбор многошагового метода налагаются следующие условия: метод должен быть порядка точности $p \geq 1$, являясь строго нуль-устойчивым или A-устойчивым. Функция $\overline{f}(s)$ должна быть ограничена в правой полуплоскости относительно прямой $(c - i\infty, c + i\infty)$, то есть:

$$\left|\overline{f}(s)\right| \leq K |s|^{-\mu} \text{ при } K < \infty, \mu > 0.$$

Если функция $\overline{f}(s)$ аналитична и ограничена в области $|\arg(s - c)| < \pi - \widetilde{\varphi}$, где $\widetilde{\varphi} < \pi/2$, критерий устойчивости может быть ослаблен до $A(\alpha)$-устойчивости.

К соответствующим примерам многошаговых методов относятся методы дифференцирования назад порядка $p \leq 6$: для A-устойчивого метода дифференцирования назад второго порядка ($\alpha = 90°$) можем записать:

$$\gamma(z) = 3/2 - 2z + z^2/2.$$

При условии того, что функция $\overline{f}(s)$ в уравнении (3) вычисляется с некоторой погрешностью ε, выбор $L = N$ и $R^n = \sqrt{\varepsilon}$ допускает погрешность вычисления ω_n порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$.

Модификация шагового метода с переменным шагом интегрирования по углу

Модификация формулы (3) для вычисления ω_n с переменным шагом и линейной аппроксимацией функции выглядит следующим образом:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi}\sum_{k=0}^{L-1}\left[\overline{f}(s_k)s_k e^{-in\varphi_k} + \overline{f}(s_{k+1})s_{k+1}e^{-in\varphi_{k+1}}\right]\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2}, \quad s_k = \frac{\gamma(Re^{i\varphi_k})}{\Delta t}. \qquad (5)$$

Для случаев когда $\overline{f}(s)/e^{in\varphi}$ – сильно осциллирующая функция, в сочетании с (5) целесообразно использовать комбинированную формулу, учитывающую специфику интегрирования таких функций [9]:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi}\sum_{k=0}^{L-1}\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2}e^{-in\frac{\varphi_k+\varphi_{k+1}}{2}}\left[D_1(w)\overline{f}(s_k)s_k + D_2(w)\overline{f}(s_{k+1})s_{k+1}\right], \quad s_k = \frac{\gamma(Re^{i\varphi_k})}{\Delta t},$$

$$w = -n\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2}, \quad D_{1,2}(w) = \begin{cases} \dfrac{\sin w}{w} \pm \dfrac{w\cos w - \sin w}{w^2}i \text{ при } |w| > w_2, \\ e^{\mp wi} \text{ при } |w| \le w_2. \end{cases} \qquad (6)$$

Формулы (5), (6) позволяют перераспределять расчетные узлы по промежутку изменения φ для получения большей точности результата при сохранении вычислительных затрат.

Модификация шагового метода на узлах схемы Рунге – Кутты

Рассмотрим метод Рунге – Кутты, записанный с помощью таблицы Бутчера:

$$\frac{c\,|\,A^{\mathrm{T}}}{b^{\mathrm{T}}}, \quad A \in R^{m\times m}, \quad b, c \in R^m.$$

Для корректной формулировки шаговой схемы должны быть выполнены следующие условия [11]:

1) метод Рунге – Кутты должен быть A-устойчивым;

2) $|R(z)| < 1$ при $y \ne 0$, где $R(z) = 1 + zb^{\mathrm{T}}(\mathrm{I} - zA)^{-1}[\mathrm{I}]$ – функция устойчивости, $[\mathrm{I}] = (1, ..., 1)^{\mathrm{T}}$;

3) $\mathrm{R}(\infty) = 0$;

4) $\exists A^{-1}$.

Если принять $b^{\mathrm{T}}A^{-1} = (0, ..., 0, 1)$, то метод автоматически L-устойчив.

Применяя метод Рунге – Кутты вместо линейного многошагового метода для решения задачи Коши (4), получим [11]:

$$f_0 = 0, \quad f_n = b^{\mathrm{T}}A^{-1}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(\Delta t), \quad n = 1, ..., N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\overline{f}(s)se^{-inl\frac{2\pi}{L}}, \quad s = \frac{\gamma(z)}{\Delta t}, \quad z = Re^{il\frac{2\pi}{L}},$$

$$\gamma(z) = A^{-1} - zA^{-1}[1]b^{\mathrm{T}}A^{-1}.$$

Формулы (5), (6) сохраняют свой формальный вид и в случае схемы обращения преобразования Лапласа на основе метода Рунге – Кутты, но в них используется соответствующая матричная характеристическая функция.

В качестве конкретного примера схемы Рунге – Кутты, удовлетворяющей сформулированным условиям, выберем схему Радо [11].

Численные результаты

Решена задача о действии осевой силы $F = 1$ Н/м^2 на пороупругий стержень [3]. Отклики перемещений и давлений, вызванные силой F, наблюдаются соответственно в точках $y = 3$ м и $y = 0$ м для стержня длиной $l = 3$ м. Численные результаты получены для материала с параметрами: упругие модули материала $K = 4{,}8 \cdot 10^9$ Н/м^2, $G = 7{,}2 \cdot 10^9$ Н/м^2; объемные модули скелета и наполнителя $K_s = 3{,}6 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $K_f = 3{,}3 \cdot 10^9$ Н/м^2; плотности скелета и наполнителя $\rho_s = 2458$ кг/м^3, $\rho_f = 1000$ кг/м^3; коэффициент проницаемости $k = 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м^4/(Н·с); коэффициент пористости $\phi = 0{,}19$. Выберем отрезок времени 0,02 с, что составляет приблизительно 5,5 периода функций по времени. Для обращения преобразования Лапласа использован коэффициент $R = 0{,}997$. На рис. 1, 2 приведены соответственно вид действительной ($\Re$) и мнимой ($\Im$) частей спектра перемещений и давлений.

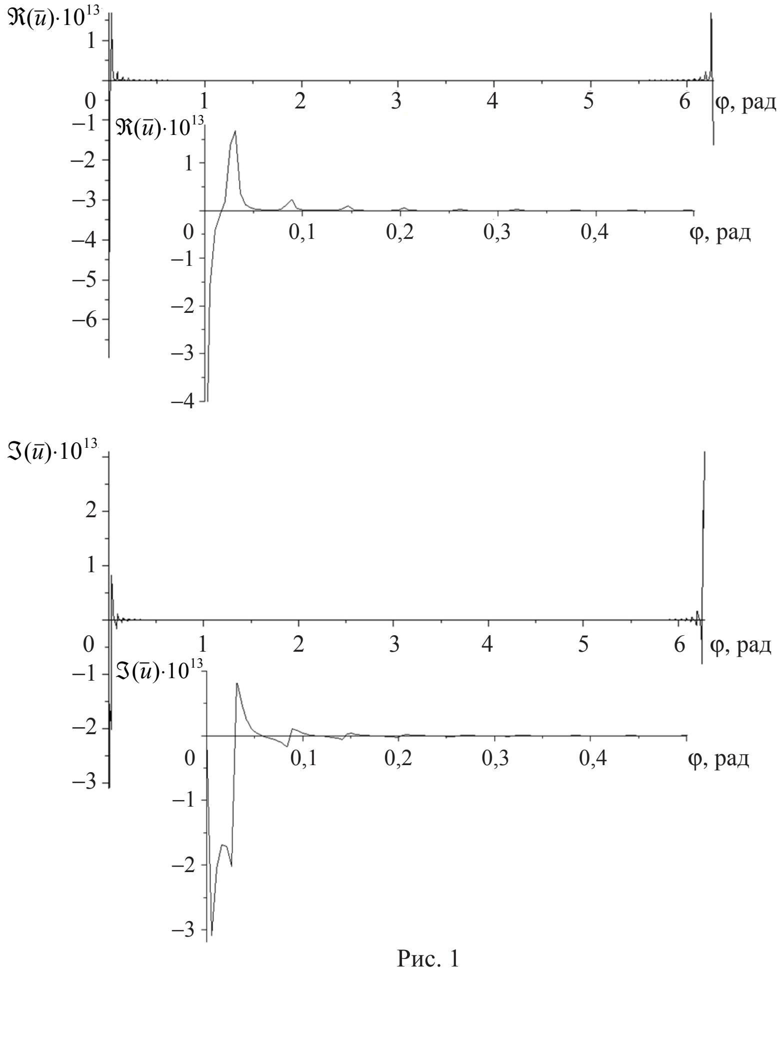

Рис. 1

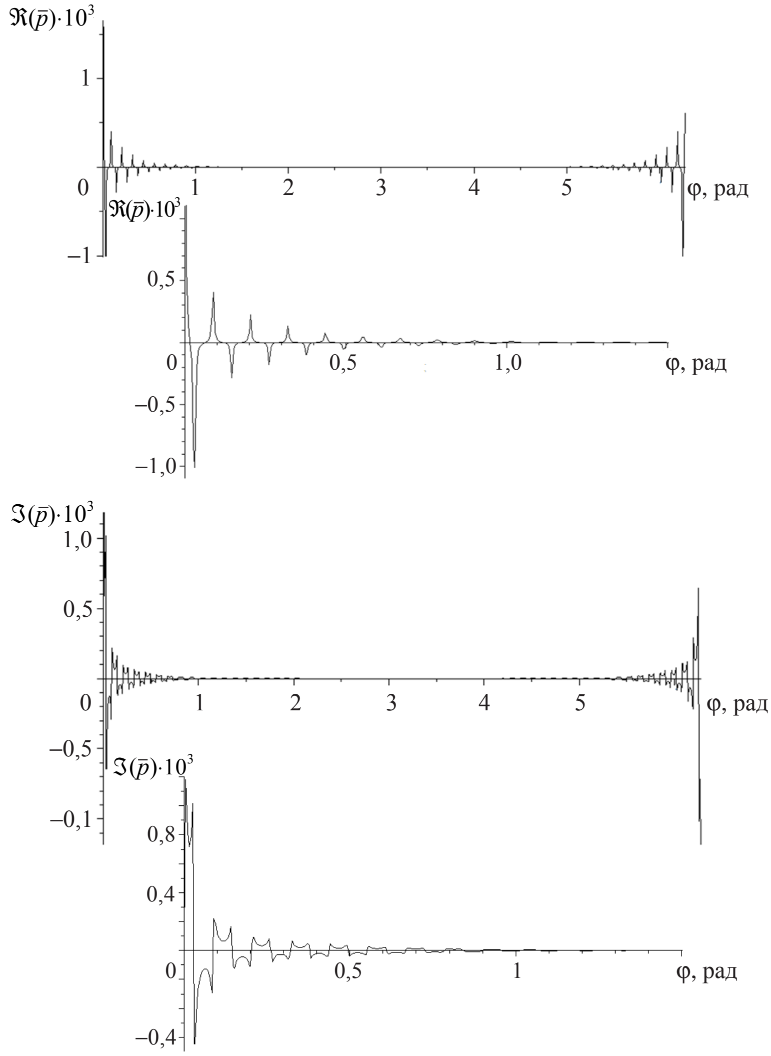

Рис. 2

Обозначим через Ł общее число узлов по углу φ (учитывая двукратное использование каждого φ_i для двухэтапной схемы Рунге – Кутты), через N – общее число узлов по времени. Рассмотрим кусочно-равномерную сетку на промежутках $[0, \pi/2]$, $[\pi/2, 3\pi/2]$, $[3\pi/2, 2\pi]$ для двух модификаций шагового метода с использованием переменного шага по углу (построенных соответственно на основе метода Эйлера и схемы Радо) и равномерную сетку с сохранением общего числа узлов Ł для модификации на узлах схемы Радо.

Результаты обращения для отклика перемещений u при $N = Ł/2 = 600$ представлены на рис. 3. Красная кривая соответствует схеме Радо и постоянному шагу по углу φ; синяя – модификации традиционного шагового метода с переменным шагом, количество узлов на промежутках – 560, 80, 560; зеленая – модификации на основе схемы Радо с переменным шагом, количество двукратных узлов на промежутках – 280, 40, 280. Здесь и далее для сравнения черным цветом приведен более точный вид решения.

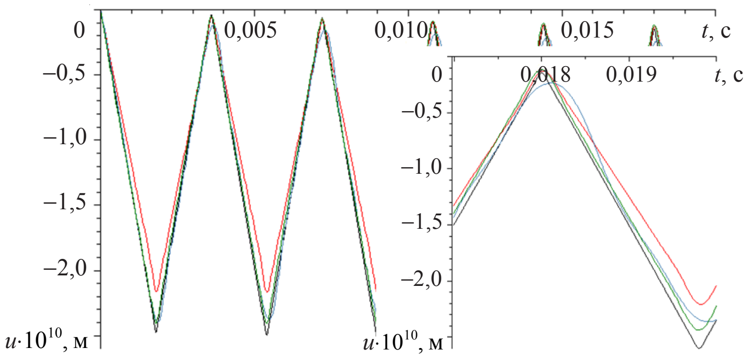

Рис. 3

Аналогично на рис. 4 представлены результаты для N = Ł/2 = 1200 с сохранением пропорции количества узлов на промежутках для схем с переменным шагом. Сочетание схемы Радо с переменным шагом интегрирования уже при N = Ł/2 = 600 дает характерные осцилляции решения [9], поэтому для расчетов использована модификация на основе формул интегрирования сильно осциллирующих функций (2), (6).

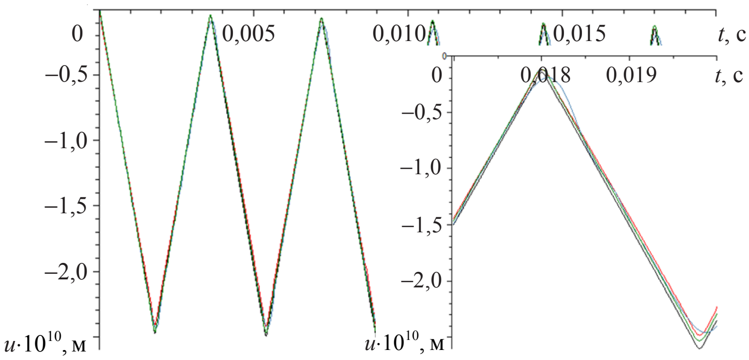

Рис. 4

Традиционный шаговый метод с переменным шагом обнаруживает появление осцилляций только при измельчении сетки до N = Ł/2 = 2400. На рис. 5 представлены результаты, полученные на этой сетке с его помощью (синяя кривая), а также методом на основе схемы Радо с переменным шагом без учета (зеленая кривая) и с учетом (черная кривая) формул интегрирования сильно осциллирующих функций.

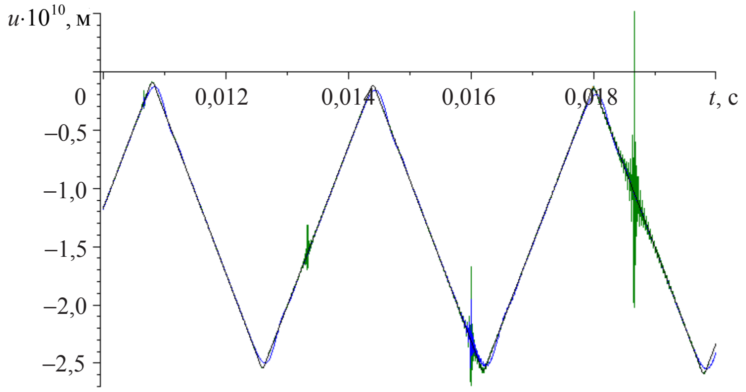

Рис. 5

На рис. 6, 7 представлены графики давления p при N = Ł/2 = 600, N = Ł/2 = = 1200 соответственно; сохранено цветовое обозначение схем, использованное в рис. 3, 4.

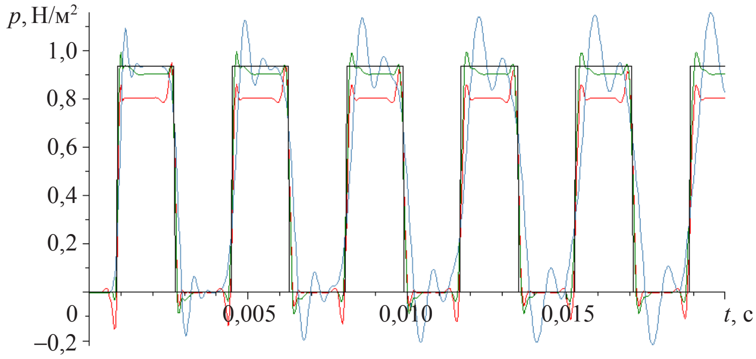

Рис. 6

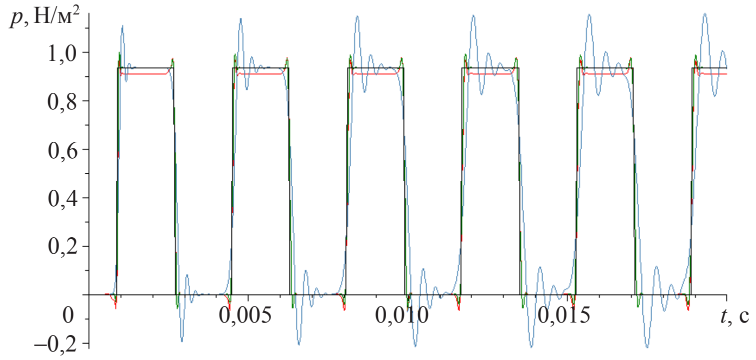

Рис. 7

Применение переменного шага интегрирования по углу φ совместно со схемой Рунге – Кутты позволяет объединить такие достоинства этих подходов, как быстрая сходимость при измельчении сеток, меньший сдвиг решения по времени (запаздывание или опережение) и лучшая передача качественного характера решения. Однако шаговый метод с переменным по φ шагом на основе схемы Рунге – Кутты более чувствителен к измельчению сеток в отношении возникновения паразитных осцилляций, чем метод, основанный на схеме Эйлера, что преодолевается посредством использования формул интегрирования сильно осциллирующих функций.

Список литературы

1. *Lubich C.* Convolution quadrature and discretized operational calculus. I // Numerische Mathematik. 1988. No 52. P. 129–145.

2. *Lubich C.* Convolution quadrature and discretized operational calculus. II // Numerische Mathematik. 1988. No 52. P. 413–425.

3. *Schanz M.* Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.

4. *Баженов В.Г.*, *Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

5. *Угодчиков А.Г.*, *Хуторянский Н.М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанс. ун-та, 1986. 295 с.

6. *Белов А.А.*, *Игумнов Л.А.*, *Литвинчук С.Ю.* Развитие метода граничных элементов для решения трехмерных контактных нестационарных динамических задач теории упругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2007. Вып. 69. С. 125–136.

7. Гранично-элементное моделирование на основе квадратур сверток динамического состояния составных упругих тел / А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук // Вычислительная механика сплошных сред. Пермь: Изд-во ИМСС УрО РАН, 2008. Т. 1, №3. С. 5–14.

8. *Аменицкий А.В.* Развитие методов граничных элементов для численного моделирования динамики трехмерных однородных пороупругих тел: Автореф. дис… канд. физ.-мат. наук. Н.Новгород, 2010. 20 с.

9. *Белов А.А.*, *Игумнов Л.А.*, *Литвинчук С.Ю.* Гранично-элементная методика на основе модифицированного метода квадратур сверток в динамических задачах упругих тел // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород ун-т. 2008. Вып. 70. С. 150–158.

10. *Banjai L.* Multistep and multistage convolution quadrature for the wave equation: Algorithms and experiments // SIAM J. Sci. Comput. 2010. 32. P. 2964–2994.

11. *Banjai L.*, *Messner M.*, *Schanz M.* Runge – Kutta convolution quadrature for the boundary element method // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2012. P. 90-101.

TIME-STEP METHOD OF LAPLACE TRANSFORMATION NUMERICAL INVERSION BASED ON THE RUNGE – KUTTA SCHEME NODES WITH A VARIABLE STEP OF INTEGRATION

L.A. Igumnov, Ya.Yu. Rataushko

The paper is dedicated to the development of time-step method for numerical inversion of Laplace transformation, based on the original function integration theorem. Derived stepping scheme is determined by the choice of quadrature formula with a key and the choice of numerical solution scheme for Cauchy problem, which arises for the Volterra integral. Quadrature formula with a key is a result of special highly oscillatory integration. The approach is used to numerically obtain displacement & pore pressure originals for a one-dimensional poroelastic problem.

Keywords: Laplace transformation inversion, time-step method, Runge – Kutta scheme, highly oscillatory quadrature, one-dimensional poroelastic problem.