УДК 539.3

СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ОРИГИНАЛА РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ПОРОУПРУГОЙ ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ ШАГОВОГО МЕТОДА И МЕТОДА ДУРБИНА*

Л.А. Игумнов, А.Н. Петров, А.А. Ипатов

НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 14.11.2013

Рассматривается одномерная пороупругая задача о действии скачка осевой силы на консольный стержень. Задача имеет аналитическое решение в изображениях по Лапласу. Оригиналы решений строятся на основе метода Дурбина и шагового по времени метода численного преобразования Лапласа. Дано сравнение оригиналов, полученных на основе примененных методов.

Ключевые слова: пороупругость, метод граничных элементов, преобразование Лапласа, метод гранично-интегральных уравнений, алгоритм Дурбина и шаговый метод.

Введение

Исследование волновых процессов в пористо-упругих телах представляет научный и практический интерес. В исследованиях применяется модель Био пористо-упругой среды. Теория Био [1–3] является расширением классической теории упругости на случай двухфазной среды с учетом ввода дополнительных параметров, учитывающих взаимодействие фаз. Существенным достижением динамической пороупругости стало описание трех типов волн для трехмерного случая: двух волн сжатия и одной волны сдвига. Существование дополнительной волны сжатия экспериментально подтверждено Plona [4]. На примере исследования эффекта третьей волны проведено сравнение методов численного обращения преобразования Лапласа.

Постановка задачи

Система дифференциальных уравнений одномерного распространения пороупругих волн в изображениях имеет вид:

$$\begin{cases} E\tilde{u}_{y,yy} - (1-\beta)\tilde{p}_{,y} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\tilde{u}_y = 0, \\ \dfrac{\beta}{s\rho_f}\tilde{p}_{,yy} - (1-\beta)s\tilde{u}_{y,y} = 0, \end{cases}$$

* Выполнено при частичном финансировании Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-593.2014.8) и РФФИ (гранты 14-08-31415-мол_а, 14-08-31410-мол_а, 14-08-00811-А, 12-08-00984-а, 13-08-97091-р_поволжье_а, 12-01-00698-а, 13-08-00658-а).

$$\beta = \frac{k\rho_f \varphi^2 s^2}{\varphi^2 s + s^2 k(\rho_a + \varphi\rho_f)},$$

где $E = K + 4/3 \cdot G$ – модуль Юнга; K, G – объемный модуль и модуль сдвига пористого тела; ρ, ρ_f и ρ_a – плотности пористого тела, наполнителя и присоединенной массы, φ – пористость, k – коэффициент проницаемости, s – параметр преобразования Лапласа.

При краевых условиях $\tilde{u}_y(y=0)=0$, $\tilde{\sigma}_y(y=l)=-1/s$, $\tilde{p}(y=l)=0$ формулы для аналитического решения в изображениях по Лапласу имеют следующий вид [5]:

$$\tilde{u}_y = \frac{1}{E(d_1\lambda_2 - d_2\lambda_1)}\left[\frac{d_2(e^{-\lambda_1 s(l-y)} - e^{-\lambda_1 s(l+y)})}{s(1+e^{-2\lambda_1 sl})} - \frac{d_1(e^{-\lambda_2 s(l-y)} - e^{-\lambda_2 s(l+y)})}{s(1+e^{-2\lambda_2 sl})}\right],$$

$$\tilde{p} = \frac{d_1 d_2}{E(d_1\lambda_2 - d_2\lambda_1)}\left[\frac{e^{-\lambda_1 s(l-y)} - e^{-\lambda_1 s(l+y)}}{1+e^{-2\lambda_1 sl}} - \frac{e^{-\lambda_2 s(l-y)} - e^{-\lambda_2 s(l+y)}}{1+e^{-2\lambda_2 sl}}\right],$$

$$q_i = -\frac{k\rho_f\varphi^2 s^3}{\varphi^2 s + s^2 k(\rho_a + \varphi\rho_f)}\frac{1}{s^2\rho_f}(\hat{p}_{,i} + s^2\rho_f \hat{u}_i^s - \hat{f}_i^f),$$

где

$$\lambda_{1,3} = \pm\Bigg[\Big(\big(E\varphi^2/R + (\rho+\beta\rho_f)\beta/\rho_f + (\alpha-\beta)^2\big) +$$

$$+\sqrt{\big(E\varphi^2/R+(\rho+\beta\rho_f)\beta/\rho_f+(\alpha-\beta)^2\big)^2 - 4E\beta\varphi^2(\rho-\beta\rho_f)/(\rho_f R)}\Big)\Big/(2E\beta/\rho_f)\Bigg]^{1/2},$$

$$\lambda_{2,4} = \pm\Bigg[\Big(\big(E\varphi^2/R + (\rho+\beta\rho_f)\beta/\rho_f + (\alpha-\beta)^2\big) -$$

$$-\sqrt{\big(E\varphi^2/R+(\rho+\beta\rho_f)\beta/\rho_f+(\alpha-\beta)^2\big)^2 - 4E\beta\varphi^2(\rho-\beta\rho_f)/(\rho_f R)}\Big)\Big/(2E\beta/\rho_f)\Bigg]^{1/2},$$

$$d_i = \frac{E\lambda_i^2 - (\rho - \beta\rho_f)}{(\alpha-\beta)\lambda_i},$$

λ_i – корни характеристического уравнения исходной системы, α – эффективный коэффициент напряжений, $\tilde{u}, \tilde{p}$ – функции смещений и порового давления в изображениях.

Рассмотрим решение одномерной задачи о действии осевой силы $t_2 = 1$ Н/м² на пороупругий стержень (рис. 1). Исследуются перемещение, давление и поток в точке A, удаленной на 1,5 м от нагруженного конца ($l_1 = 1{,}5$ м).

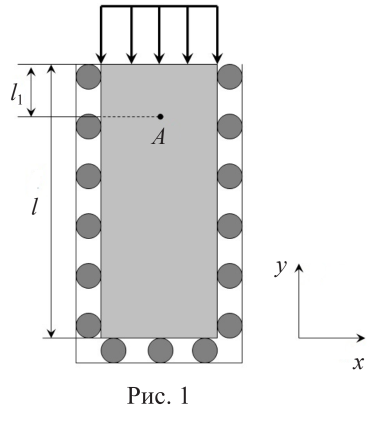


Рис. 1

Преобразование Лапласа

Пусть $f(t)$ – функция от t, $f(t) = 0$ для $t < 0$. Функция преобразования по Лапласу и ее обращение определены следующим образом:

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \bar{f}(s)e^{st}ds$$

– формула Римана – Меллина, где s – комплексный параметр преобразования, α – вещественное число, большее, чем вещественные части всех особенностей $\bar{f}(s)$.

Пусть $s = \alpha + i\omega$, тогда алгоритм, предложенный Дурбином, имеет вид:

$$F_k = \mathrm{Re}\left[\bar{f}(\alpha + i\omega_k)\right], \quad G_k = \mathrm{Im}\left[\bar{f}(\alpha + i\omega_k)\right], \quad \Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k,$$

$$f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F_k + F_{k+1})\Delta_k}{2\pi},$$

$$f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{\pi t^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{F_{k+1} - F_k}{\Delta_k}\left(\cos(\omega_{k+1}t) - \cos(\omega_k t)\right) - \frac{G_{k+1} - G_k}{\Delta_k}\left(\sin(\omega_{k+1}t) - \sin(\omega_k t)\right) \right].$$

На основе теоремы о свертках сформулирован метод квадратур сверток [6, 7]. Рассмотрим метод, опирающийся на теорему об интегрировании оригинала, – шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа. Для применения шагового метода рассмотрим интеграл, который необходимо вычислить:

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau. \tag{1}$$

Интеграл (1) заменяется квадратурной суммой, весовые множители которой определяются с помощью изображения по Лапласу $\bar{f}$ и линейного многошагового метода [5–8]. Традиционный шаговый метод интегрирования оригинала состоит в том, что интеграл (1) вычисляется по следующему соотношению:

$$y(0) = 0, \quad y(n\Delta t) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(\Delta t), \quad n = 1, ..., N, \tag{2}$$

где

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}\left(\frac{\gamma\left(Re^{i\phi}\right)}{\Delta t}\right)e^{-in\phi}, \quad \phi = 2\pi\frac{l}{L},$$

γ – характеристическая функция, R – параметр метода.

При выводе формулы (2) используется аппроксимация, которая заключается в применении линейного многошагового метода для решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка.

Следующая аппроксимация, которая используется в методе, – численное интегрирование при получении значений $\omega_n(\Delta t)$ (с L равными шагами $2\pi/L$):

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1} \bar{f}\left(\frac{\gamma\left(Re^{i\phi}\right)}{\Delta t}\right)e^{-in\phi}. \tag{3}$$

При условии того, что функция $\bar{f}(s)$ в уравнении (3) вычисляется с некоторой погрешностью ε, выбор $L = N$ и $R^n = \sqrt{\varepsilon}$ допускает погрешность вычисления ω_n порядка $O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$.

Результаты численных экспериментов

На основе приведенных формул с использованием шагового метода найдено численное решение задачи о стержне, материал которого имеет следующие параметры: $K = 4{,}8\cdot10^9$ Н/м², $G = 7{,}2\cdot10^9$ Н/м², $\rho = 2458$ кг/м³, $\varphi = 0{,}19$, $K_s = 3{,}6\cdot10^9$ Н/м², $\rho_f = 1000$ кг/м³, $K_f = 3{,}3\cdot10^9$ Н/м², $k = 1{,}9\cdot10^{-10}$ м⁴/(Н·с). Длина пороупругого стержня принята равной 9 м. На рис. 2 и 3 приведены результаты исследования сходимости шагового метода обращения преобразования Лапласа.

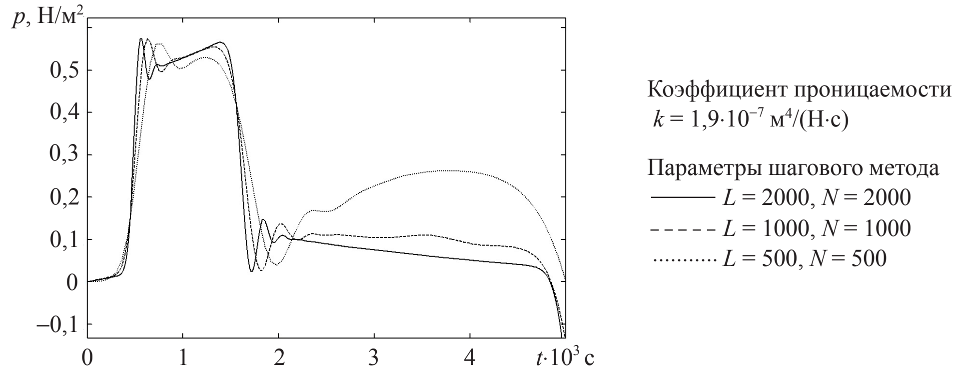


Рис. 2

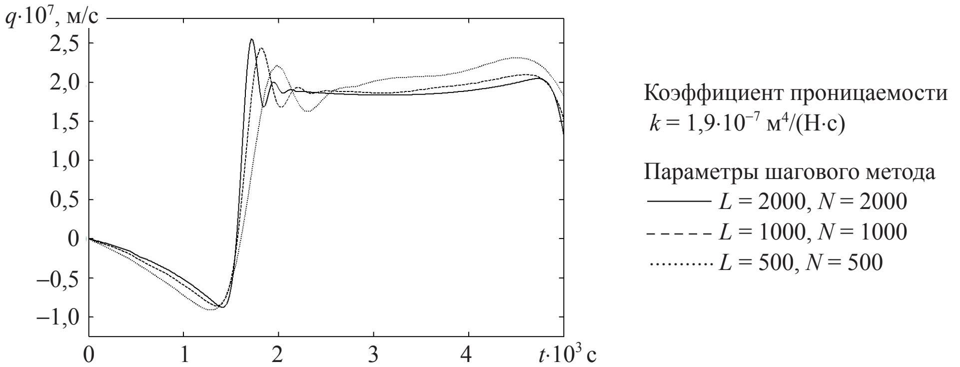


Рис. 3

На рисунках представлены сравнения аналитических и численных решений для давления (рис. 4–6) и потока (рис. 7, 8) в точке A.

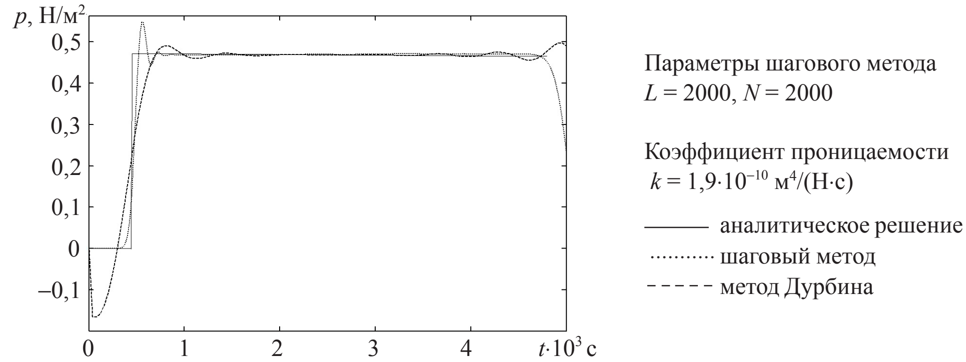
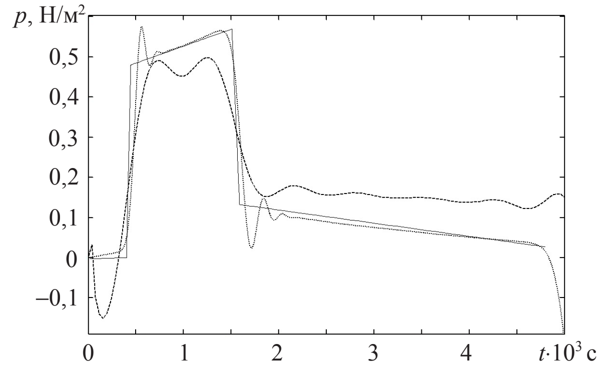


Рис. 4

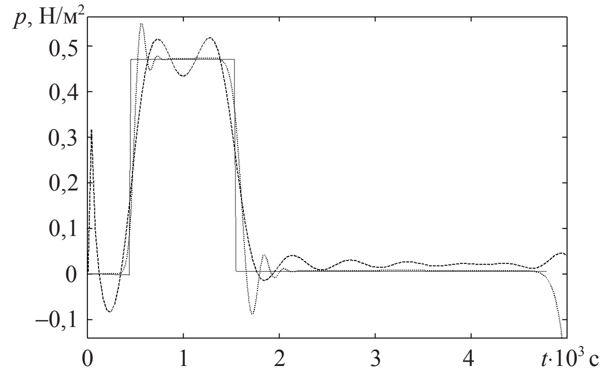


Параметры шагового метода
$L = 2000$, $N = 2000$

Коэффициент проницаемости
$k = 1{,}9 \cdot 10^{-7}$ м⁴/(Н·с)

——— аналитическое решение
·········· шаговый метод
– – – – метод Дурбина

Рис. 5

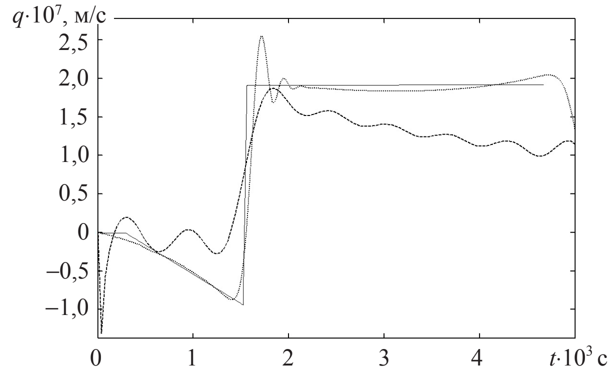


Параметры шагового метода
$L = 2000$, $N = 2000$

Коэффициент проницаемости
$k = 1{,}9 \cdot 10^{-6}$ м⁴/(Н·с)

——— аналитическое решение
·········· шаговый метод
– – – – метод Дурбина

Рис. 6



Параметры шагового метода
$L = 2000$, $N = 2000$

Коэффициент проницаемости
$k = 1{,}9 \cdot 10^{-7}$ м⁴/(Н·с)

——— аналитическое решение
·········· шаговый метод
– – – – метод Дурбина

Рис. 7

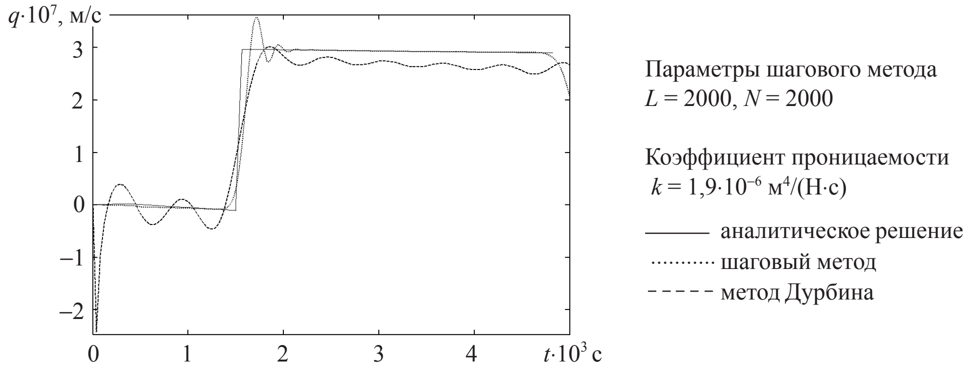


Рис. 8

На рис. 9 и 10 представлены результаты численного исследования влияния коэффициента проницаемости на отклик порового давления и потока в точке A.

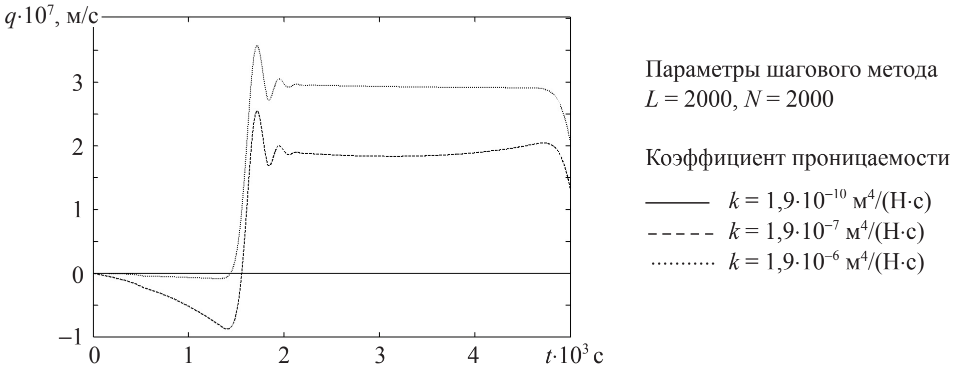


Рис. 9

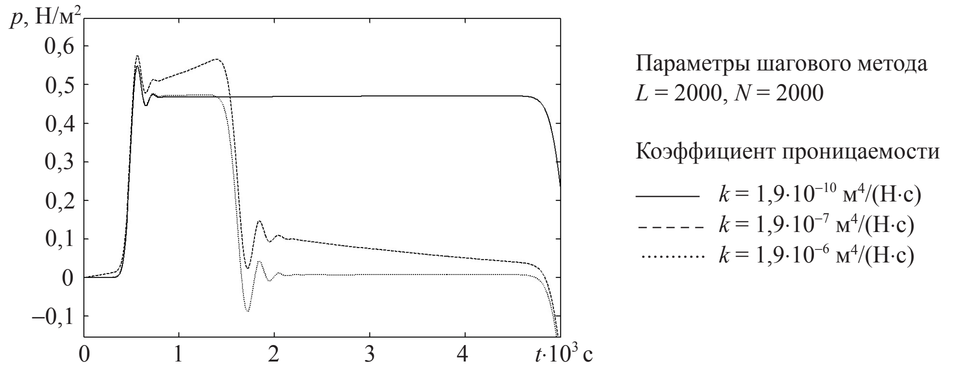


Рис. 10

В отличие от подобных исследований в [5], где эффект появления третьей волны продемонстрирован на отклике давлений, здесь приведены графики, демонстрирующие эффект третьей волны как на отклике порового давления, так и на отклике порового потока.

Стоит отметить, что шаговый метод дает более точный результат, нежели метод Дурбина, при эквивалентной трудоемкости вычислений.

Заключение

Приведены результаты численного исследования эффекта возбуждения медленной волны в одномерном случае на основе аналитического решения в изображениях по Лапласу. Получены оригиналы решения для стержня на основе метода Дурбина численного обращения преобразования Лапласа и на основе шагового метода численного обращения преобразования Лапласа. Продемонстрировано, что при некоторых параметрах пороупругого материала метод Дурбина существенно уступает по точности шаговому методу.

Список литературы

1. *Biot M.A*. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 1941. 12(2). P. 155–164.

2. *Biot M.A.* Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid // J. Appl. Phys. 1956. 27(5). P. 459–467.

3. *Biot M.A.* Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // J. Appl. Phys. 1955. 26(2). P. 182–185.

4. *Plona T.J.* Observation of a second bulk compressional wave in porous medium at ultrasonic frequencies // Appl. Phys. Lett. 1980. 36(4). P. 259–261.

5. *Schanz M.* Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.

6. *Lubich C.* Convolution quadrature and discretized operational calculus. I // Numer. Math. 1988. 52(2). P. 129–145.

7. *Lubich C.* Convolution quadrature and discretized operational calculus. II // Numer. Math. 1988. 52(4). P. 413–425.

8. *Аменицкий А.В.*, *Игумнов Л.А.*, *Карелин И.С.* Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2008. Вып. 70. С. 71–78.

COMPARISON OF NUMERICAL SOLUTION ORIGINALS FOR 1D POROELASTIC PROBLEM BASED ON THE TIME-STEP METHOD AND THE DURBIN METHOD

L.A. Igumnov, A.N. Petrov, A.A. Ipatov

The issue of 1D poroelastic problem of the axial thrust applied to a column is considered. The problem has analytic solution in Laplace transforms. Solution originals are computed basing on the time-step method and the Durbin method of Laplace transformation inversion. A comparison of results, obtained with the help of the mentioned methods, is given.

Keywords: poroelasticity, boundary element method, Laplace transformation, boundary integral equations, Durbin method, time-step method.