УДК 539.3

ДЕМОДУЛЯЦИЯ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ПАРАМЕТРЫ КОТОРОГО ИЗМЕНЯЮТСЯ ПО ЗАКОНУ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ*

В.И. Ерофеев[1,2], Д.А. Колесов[1], В.М. Сандалов[2]

[1]*Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород*
[2]*Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского*

erf04@sinn.ru

Поступила в редакцию 06.09.2013

В нелинейной постановке рассматривается задача о распространении плоских сдвиговых волн в пластине, лежащей на упругом основании, параметры которого изменяются по закону бегущей волны. Показано, что сдвиговая волна неустойчива по отношению к разбиению на отдельные волновые пакеты (модуляционная неустойчивость). Изучается вопрос о стабилизации этой неустойчивости с помощью изменения параметров упругого основания.

Ключевые слова: пластина, нелинейность, упругое основание, сдвиговая волна, параметрика, модуляционная неустойчивость, демодуляция.

Многие задачи динамики машин и конструкций сводятся к изучению колебаний балок и пластин, лежащих на упругих основаниях. К такой расчетной модели могут быть сведены: дисковые тормоза; площадки на основе шариков, роликов или подшипников скольжения; вибрационные машины на упругом фундаменте; сеть балок в конструкции перекрытий для судов, зданий и мостов; подводные плавучие тоннели; подземные трубопроводы; железнодорожные пути и т.д. [1].

На сегодняшний день выделены и в той или иной мере исследованы три группы таких моделей: линейная распределенная система, взаимодействующая с линейным упругим основанием [2, 3]; линейная распределенная система, взаимодействующая с нелинейным упругим основанием [4–7], и нелинейная распределенная система, взаимодействующая с линейным упругим основанием [8–12].

Математическая модель, рассматриваемая в публикуемой работе, относится к третьему из перечисленных классов. Существенное отличие этой задачи от других задач заключается в том, что она является нелинейной параметрической: нелинейно-упругая пластина взаимодействует с линейно-упругим основанием, жесткость которого изменяется в пространстве и во времени.

В работе [13] выведены двумерные уравнения продольно-сдвиговых колебаний

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12-08-00888, № 12-08-90032-Бел, № 13-08-97103-р_поволжье).

пластины при учете нелинейной связи деформации и перемещения (геометрическая нелинейность) и учете в упругом потенциале Мурнагана третьих и четвертых степеней деформации (физическая нелинейность – приближение «девятиконстантной теории упругости») [14].

Распространение вдоль оси x плоской сдвиговой волны в пластине, лежащей на упругом основании, описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_\tau^{\,2}\left[1+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x,t)u = 0, \qquad (1)$$

которое является частным случаем системы уравнений работы [13], но содержит и дополнительное слагаемое с коэффициентом h, обусловленное наличием упругого основания. Здесь $u(x,t)$ – отличная от нуля компонента вектора перемещений; ρ – плотность материала; h – жесткость упругого основания, изменяющаяся в пространстве и во времени; $\alpha = 9/2\cdot[1+(\lambda + A + 2B + 2J)/\mu]$ – коэффициент, характеризующий нелинейность пластины; λ, μ – константы Ламе второго порядка; A, B – константы Ландау третьего порядка; J – константа Ландау четвертого порядка; $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой волны в безграничной среде.

Считаем волну, распространяющуюся в пластине, квазигармонической:

$$u(x,t) = U(\varepsilon x, \varepsilon t)e^{i\theta(x,t)} + U^*(\varepsilon x, \varepsilon t)e^{-i\theta(x,t)}, \qquad (2)$$

где U – комплексная амплитуда (звездочкой обозначена ее комплексно-сопряженная величина), $U = a_0 e^{i\theta_0}$, a_0 – действительная амплитуда, $\theta = \omega t - kx$ – фаза, θ_0 – начальная фаза, ω – круговая частота, k – волновое число, ε – малый параметр, имеющий порядок величины упругой деформации ($\sim 10^{-4}$).

Пусть параметры упругого основания изменяются по закону бегущей волны

$$h(x,t) = h_0\left[1 + m\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right)\right]. \qquad (3)$$

Соотношения, подобные (3), часто встречаются в волновых параметрических задачах электроники и механики [15]. В [16] обсуждается вопрос формирования бегущей волны переменного натяжения струны и балки. Вопрос о практической реализации соотношения (3) применительно к параметрам упругого основания пока остается открытым.

Частота и волновое число сдвиговой волны подчиняются дисперсионному уравнению

$$-\omega^2 + c_\tau^2 k^2 + h_0 = 0. \qquad (4)$$

Если при этом глубина модуляции пропорциональна квадрату комплексной амплитуды волны

$$m = m_1 U^2, \qquad (5)$$

то в системе координат, движущейся с групповой скоростью $(V_{\text{гр}} = d\omega/dk)$,

$$\begin{cases} \xi = x - V_{\text{гр}}t, \\ \tau = \varepsilon t, \end{cases}$$

уравнение (1) преобразуется в нелинейное уравнение Шредингера:

$$i\frac{\partial U}{\partial \tau}+\frac{\partial V_{\text{гр}}}{\partial k}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}-\beta|U|^2U=0, \tag{6}$$

где

$$\frac{\partial V_{\text{гр}}}{\partial k}=\frac{V_{\text{гр}}^2-c_\tau^2}{2\omega}; \quad \beta=-\left(\frac{k^4c_\tau^2\alpha-h_0m_1}{2\omega\varepsilon^2}\right).$$

Известно [17], что при определенных условиях квазигармоническая волна оказывается неустойчивой по отношению к разбиению на отдельные волновые пакеты (модуляционная неустойчивость). Наличие модуляционной неустойчивости может быть определено непосредственно из уравнения (6), если воспользоваться критерием Лайтхилла. Согласно критерию, модуляционная неустойчивость возможна в системе, у которой $(\partial V_{\text{гр}}/\partial k)\beta<0$, что в рассматриваемой задаче эквивалентно условию:

$$\frac{V^2{}_{\text{гр}}-c_\tau{}^2}{2\omega}\cdot\frac{-k^4c_\tau{}^2\alpha+h_0m_1}{2\omega\varepsilon^2}<0. \tag{7}$$

Из дисперсионного уравнения (4) легко определить, что $V_{\text{гр}}<c_\tau$ при любой частоте; следовательно, для выполнения условия (7) необходимо выполнение следующего неравенства: $-k^4c_\tau^2\alpha-h_0m_1>0$.

Для большинства металлов и их сплавов параметр кубической нелинейности является отрицательной величиной ($\alpha<0$). Если параметры упругого основания неизменны ($m_1=0$), то сдвиговая волна всегда будет неустойчивой. Изменением параметров основания можно добиться стабилизации процесса, если

$$m_1>\frac{-k^4c_\tau^2\alpha}{h_0}. \tag{8}$$

Для алюминиевого сплава D16 плотность $\rho=2{,}7\cdot10^3$ кг/м³, упругие модули $\lambda=6{,}99\cdot10^{10}$ Н/м², $\mu=2{,}75\cdot10^{10}$ Н/м², $A=-168\cdot10^{10}$ Н/м², $B=-64\cdot10^{10}$ Н/м², $J=$ $=72\cdot10^2$ Н/м² [18]. В этом случае $|\alpha|$ принимает значение ~10.

Если амплитуда волны $a_0\sim10^{-7}$ м, частота $\omega=10^7$ с⁻¹, а параметр упругого основания $h_0\sim10^{10}$ с⁻², то $m_1\sim10^{12}$ м⁻², что соответствует глубине модуляции параметров, при которой можно добиться стабилизации модуляционной неустойчивости $m\sim10^{-2}$.

Заметим, что в нелинейно-упругих пластинах могут распространяться не только квазигармонические волны, но и волны существенно несинусоидальной формы. Особенности их распространения описаны, в частности, в обзоре [19]. Динамике толстых пластин посвящены работы [20–23].

Список литературы

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. Т. 1 / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1999. 482 с.

2. *Eisenberger M.*, *Clastornik J.* Beams on variable two-parameter elastic foundation // Computers and Structures. 1986. Vol. 23. P. 351–356.

3. *Wang T.M.*, *Gagnon L.W.* Vibrations of continuous Timoshenko beams on Winkler-Pasternak foundations // Journal of Sound and Vibration. 1977. Vol. 51. P. 149–155.

4. *Beaufait F.W.*, *Hoadley P.W.* Analysis of elastic beams on nonlinear foundations // Computers and Structures. 1980. Vol. 12. P. 669–676.

5. *Birman V.* On the effects of nonlinear elastic foundation on free vibration of beams // ASME Journal of Applied Mechanics. 1986. Vol. 53. P. 471–473.

6. *Naidu N.R.*, *Rao G.V.* Free vibration and stability behavior of uniform beams and columns on non-linear elastic foundation // Computers and Structures. 1996. Vol. 58. P. 1213–1215.

7. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании / В.И. Ерофеев, В.В. Кажаев, Е.Е. Лисенкова, Н.П. Семерикова // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. №3. С. 30–36.

8. *Katsikadelis J.T.*, *Armenakas A.E.* Analysis of clamped plates on elastic foundation by boundary integral equation method // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. 1984. Vol. 51. P. 574–580.

9. *Puttonen J.*, *Varpasuo P*. Boundary element analysis of a plate on elastic foundations // International Journal of Numerical Methods in Engineering. 1986. Vol. 23. P. 287–303.

10. *Sapountakis E.J.*, *Katsikadelis J.T.* Unilaterally supported plates on elastic foundations by boundary element method // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. 1992. Vol. 59. P. 580–586.

11. *Kamiya N.*, *Sawaki Y.* An integral equation approach to finite deflection of elastic plates, load-deflection curves of beam on Pasternak foundation // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1984. Vol. 17, No. 3. P. 187–194.

12. *Kang B.*, *Tan C.A.* Nonlinear response of a beam under distributed moving contact load // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2006. Vol. 11. P. 203–232.

13. *Потапов А.И.*, *Солдатов И.Н.* Квазиплоский пучок нелинейных продольных волн в пластине // Акустический журнал. 1984. Т. 30, №6. С. 819–822.

14. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

15. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике: Пер. с англ. М.: Советское радио, 1977. 368 с.

16. *Весницкий А.И.* Избранные труды по механике. Н. Новгород: ИД «Наш дом», 2010. 248 с.

17. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.

18. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.

19. *Ерофеев В.И.*, *Клюева Н.В*. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. Т. 48, №6. С. 725–740.

20. *Коссович Л.Ю.*, *Шевцова Ю.В.* Асимптотические приближения трехмерных динамических уравнений теории упругости в случае двухслойных пластин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегородский ун-т. 2005. Вып. 67. С. 102–110.

21. *Недорезов П.Ф.* Вибрационный изгиб толстой вязкоупругой консольной пластинки-полосы распределенной поперечной нагрузкой // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегородский ун-т. 2007. Вып. 69. С.170–176.

22. *Недорезов П.Ф.* Об установившихся колебаниях толстой прямоугольной пластинки из полимерного материала при свободном опирании двух противоположных сторон // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегородский ун-т. 2009. Вып.71. С. 144–152.

23. *Недорезов П.Ф.* К вопросу об установившихся колебаниях толстой прямоугольной пластинки из изотропного материала // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегородский ун-т. 2010. Вып. 72. С. 177–183.

DEMODULATION OF A SHEAR WAVE IN A NONLINEAR PLATE RESTING ON AN ELASTIC FOUNDATION WITH THE PARAMETERS CHANGING FOLLOWING THE RUNNING WAVE LAW

V.I. Erofeev, D.A. Kolesov, V.M. Sandalov

The problem of propagation of plane shear waves in a plate resting on an elastic foundation with its parameters changing following the running wave law is treated in a nonlinear formulation. The shear wave is shown to be unstable when divided into separate wave packages (modulation instability). The possibility of stabilizing such instability by changing the parameters of the elastic foundation is investigated.

Keywords: plate, nonlinearity, elastic base, shear wave, parametrics, modulation instability, demodulation.