

УДК 539.374

**КРИВЫЕ ОБРАТНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ В РАМКАХ ЛИНЕЙНОЙ
ВЯЗКОУПРУГОСТИ И НЕОБХОДИМЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ
НА ФУНКЦИЮ ПОЛЗУЧЕСТИ***

© 2013 г.

А.В. Хохлов

НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 12.12.2013

В результате аналитического исследования линейного одномерного определяющего соотношения вязкоупругости с произвольной функцией ползучести выявлены минимальные необходимые ограничения на функции ползучести и релаксации, обеспечивающие адекватное описание типичных экспериментальных кривых (деформирования с постоянной скоростью, релаксации, ползучести, обратной ползучести) вязкоупругопластических материалов и основных реологических эффектов; установлены характерные особенности поведения теоретических кривых, которые могут служить индикаторами применимости линейных уравнений вязкоупругости, легко проверяемыми экспериментально. В частности, доказано, что адекватное описание обратной ползучести (восстановления) возможно лишь в случае выпуклости вверх функции ползучести. Это ограничение означает, что уравнения линейной вязкоупругости не способны моделировать материалы, экспериментальная кривая ползучести которых содержит стадию ускоряющейся ползучести.

Ключевые слова: определяющие соотношения, интегральные операторы, функция ползучести, функция релаксации, реологические модели, регулярные и сингулярные модели, кривые ползучести, релаксации, деформирования, обратной ползучести, ограничения на материальные функции.

Настоящая статья – фрагмент системного исследования линейных определяющих соотношений (ОС) вязкоупругости с «произвольной» функцией ползучести, нацеленного на описание круга реологических явлений, которые они могут адекватно моделировать (при определенных ограничениях на свойства функций ползучести и релаксации), и вывод системы необходимых условий (индикаторов), выполнение которых следует установить у экспериментальных кривых материала перед попыткой моделирования его поведения в рамках линейной теории [1, 2].

Казалось бы, линейная теория вязкоупругости детально разработана за полтора столетия, начиная с работ Вебера, Кольрауша, Максвелла, Больцмана, Вольтерра и др., ей посвящены сотни докладов, монографий и статей (например, [3–13] и др.). Однако по-прежнему выходят статьи и диссертации, демонстрирующие, что мно-

* Выполнено при поддержке РФФИ (грант 12-08-01227-а).

гие математические свойства линейных ОС вязкоупругости, даже напрямую связанные с моделированием кривых поведения материалов, еще малоизвестны, не сформулированы и не приведены в систему, и что область адекватности линейной теории (и область ее непригодности, отделенная от первой не четкой границей, а пограничной полосой) до сих пор не очерчена достаточно точно и явно в виде полной системы индикаторов, удобных для экспериментальной проверки. В большинстве работ предлагаются лишь отдельные необходимые условия применимости линейной теории, которые нередко подаются как достаточные, а результаты формулируются в довольно туманной форме (см. подробный обзор в [2]).

Настоящая статья выросла из исследования двух нелинейных ОС для описания термомеханического поведения вязкоупругопластических материалов. В цикле работ [1, 14–16] развита технология качественного анализа определяющих соотношений: вывод уравнений семейств основных кривых (ползучести, релаксации, деформирования с постоянными скоростями и др.) в одномерном случае, их исследование, анализ зависимости от материальных функций (МФ) и материальных параметров (МП) параллельно с установлением и уточнением требований к МФ и МП; разработка способов аттестации и идентификации ОС; исследование условий обратимости, термодинамической согласованности и т.п. Цели качественного анализа ОС – всестороннее исследование математических следствий конкретного ОС (в самом общем виде, при минимальных априорных ограничениях на МФ и МП), проверка совпадения обнаруженных качественных атрибутивных свойств теоретических кривых с типичными свойствами базовых экспериментальных кривых классов материалов, формирование перечня моделируемых ОС эффектов и списка индикаторов применимости, проверяемых у экспериментальных кривых, создание своеобразного технического паспорта-руководства модели.

В статье приняты сокращения: ФР, ФП – функции релаксации и функции ползучести; КП – кривая ползучести (ТКП – теоретическая, ЭКП – экспериментальная); КР – кривая релаксации; ДД – диаграмма деформирования; $y(0) := y(0+)$ – предел справа.

1. Определяющие соотношения линейной вязкоупругости

Будем рассматривать изотермические одномерные процессы, характеризуемые в данной точке тела напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$, $t > 0$. Они связаны линейными интегральными операторами, инвариантными относительно сдвигов по времени (для описания структурно-стабильных вязкоупругих материалов):

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau), \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

С помощью операторов вида (1.1) задаются и трехмерные соотношения вязкоупругости в изотропном случае: тогда (1.1) связывают вторые инварианты и компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций с одинаковыми индексами, а также их первые инварианты, но уже с другими ядрами $R_\nu(x)$ и $\Pi_\nu(x)$.

Функции релаксации $R(x)$ и ползучести $\Pi(x)$, $x \geq 0$, предполагаются непрерывными и положительными функциями с ограниченной вариацией на любом отрезке (следовательно, они дифференцируемы почти всюду, а их производные интегрируемы по Лебегу). Они должны удовлетворять априорным математическим ограничениям, гарантирующим существование интегралов, необходимую гладкость образов

(в зависимости от гладкости входных процессов), непрерывность операторов в рассматриваемых нормированных пространствах, сходимость ряда для резольвенты и т.п. Эти функции должны удовлетворять дополнительным ограничениям, обеспечивающим выполнение общих принципов механики и термодинамики и сходство качественных свойств теоретических кривых модели и типичных кривых (деформирования, релаксации, ступенчатой ползучести и т.д.), наблюдаемых при испытаниях материалов, поведение которых хотелось бы описывать с помощью ОС (1.1). Далее на ФП и ФР будут наложены дополнительные ограничения, обеспечивающие феноменологическую адекватность ОС.

Операторы (1.1) взаимно обратны ($\mathbf{R}\mathbf{\Pi} = \mathbf{I} = \mathbf{\Pi}\mathbf{R}$), и потому их ядра связаны зависимостями $\mathbf{R}\mathbf{\Pi} = 1 = \mathbf{\Pi}\mathbf{R}$, $t > 0$, т.е. в предположении, что $R(0+) < \infty$,

$$\int_0^t \dot{R}(t-\tau)\Pi(\tau)d\tau + R(0)\Pi(t) = 1, \quad \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau)d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, \quad t > 0. \quad (1.2)$$

Эти уравнения эквивалентны, так как операторы с разностными ядрами коммутируют. Зная $R(x)$, можно найти $\Pi(x)$ из интегрального уравнения (1.2), и наоборот. (В частности, линейной ФП $\Pi(t) = t/\eta$ соответствует сингулярная ФР $R(t) = \eta\delta(t)$, задающая ОС линейно вязкой жидкости: $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$). Поэтому одномерное ОС (1.1) содержит одну МФ одного аргумента, а изотропное трехмерное ОС – две МФ.

При $R(0) \neq 0$ и $\Pi(0) \neq 0$ уравнения (1.2) – это уравнения Вольтерра второго рода с ограниченными ядрами, и потому они однозначно разрешимы в классе суммируемых функций (даже в $L_2[0, b]$). Требование $R(0) \neq 0$ – обязательное ограничение на МФ ОС (1.1). Нарушение условия $\Pi(0) \neq 0$ приводит к уравнению Вольтерра первого рода для $R(x)$, наличие сингулярности или разрыва второго рода у $R(x)$ в точке $x = 0$, неограниченности оператора \mathbf{R} , «нехорошим» кривым деформирования модели и т.п. [2].

Операторы (1.1), в частности, определены на множестве кусочно-непрерывных и кусочно-гладких функций. Последние представимы в виде: $y(t) = y_r(t) + y_s(t)$, где $y_r(t)$ – регулярная часть (непрерывная кусочно-дифференцируемая функция, $y_r(0) = 0$), а $y_s(t) = y(0)h(t) + \sum \hat{y}(t_i)h(t-t_i)$ – ступенчатая функция, $i = 1, \dots, n$ (h – функция Хевисайда). Оператор (1.1) переводит такой процесс $\sigma(t)$ в деформацию

$$\epsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)\dot{\sigma}_r(\tau)d\tau + \sigma(0)\Pi(t) + \sum \hat{\sigma}(t_i)\Pi(t-t_i)h(t-t_i), \quad t \geq 0.$$

В точках t_i оператор $\epsilon(t)$ имеет скачки $\hat{\epsilon}(t_i) = \hat{\sigma}(t_i)\Pi(0)$. На множестве непрерывных (и кусочно-дифференцируемых) при $t \geq 0$ функций операторы (1.1) действуют по формуле:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)\dot{\epsilon}_r(\tau)d\tau + \epsilon(0)R(t), \quad \epsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)\dot{\sigma}_r(\tau)d\tau + \sigma(0)\Pi(t). \quad (1.3)$$

Интегрированием по частям ОС (1.3) преобразуются к виду:

$$\sigma(t) = R(0)\epsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\epsilon(\tau)d\tau, \quad \epsilon(t) = \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1.4)$$

При $R(0) \neq 0$ первое соотношение (1.4) с заданной $\sigma(t)$ – уравнение Вольтерра второго рода с ограниченным ядром для $\epsilon(t)$, построение его резольвенты дает обратный оператор в виде второго соотношения (1.4).

Переходя в (1.2) к пределам $t \rightarrow 0+$ и $t \rightarrow \infty$, получим: $\Pi(0)R(0) = 1$, $\Pi_\infty R_\infty = 1$. Это следует из существования конечных $R(0+)$, Π_∞ и интегрируемости $\dot{R}(t)$ на любом отрезке. При $R_\infty = 0$ будет $\Pi_\infty = \infty$, но неверно, что всегда $\Pi(t)R(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$ [2].

Можно доказать, что из (1.2) для монотонных ФР и ФП следует, что $\Pi(t)R(t) < 1$ при $t > 0$, а равенство возможно только для идеально упругой среды ($c R(t) = \text{const}$) [2].

2. Структурные реологические модели, эквивалентные модели

В виде (1.1) представимы и все реологические модели, собранные из линейно упругих и вязких элементов посредством последовательных и параллельных соединений и задаваемые двумя дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами: $\mathbf{P}\sigma = \mathbf{Q}\epsilon$. Для них ФП будут линейными комбинациями линейных функций и экспонент с отрицательными показателями, а ФР – линейными комбинациями констант, экспонент и δ -функции, т.е. ФР могут иметь сингулярность. Если вязкий элемент ($c R(t) = \eta\delta(t)$) или любая модель с сингулярностью подключены параллельно к произвольной модели (тогда ФР складываются), то δ -слагаемое будет присутствовать в ФР. Например, ФР модели Фойхта: $R(t) = \eta\delta(t) + Eh(t)$.

Четырехпараметрическое семейство функций ползучести

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta + \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \alpha, \beta \geq 0, \gamma \geq -\beta \quad (2.1)$$

порождает все регулярные четырехзвенные модели и все трехзвенные модели. При $\gamma \in (-\beta, 0)$ – модель «стандартного тела» (т.е. последовательное соединение моделей Максвелла и Фойхта: $\Pi(t) = \Pi_M + \Pi_F$, $\alpha = \eta_M^{-1}$, $\beta = E_M^{-1} + E_F^{-1}$, $\lambda = E_F/\eta_F$, $\gamma = -E_F^{-1}$), в частности, при $\alpha = 0$ – трехзвенные модели Кельвина (последовательное соединение модели Фойхта с упругим элементом) и Пойтинга – Томсона (параллельное соединение модели Максвелла с упругим элементом – см. [17]). Для двух последних ФП (2.1) имеет горизонтальную асимптоту: $\Pi(\infty) = \beta$. Поскольку $\Pi(0) = \beta + \gamma$, то ФП (2.1) порождает сингулярные модели тогда и только тогда, когда $\gamma = -\beta$; при $\alpha = 0$ это модель Фойхта, если $\alpha > 0$, то получаются (все) сингулярные трехзвенные модели (с двумя демпферами), а при $\lambda = 0$ или $\beta = 0$ – модель ньютоновской жидкости. При $\gamma = 0$ (2.1) превращается в модель Максвелла (при $\beta = 0$ она вырождается в вязкий элемент, при $\alpha = 0$ – в упругий). Случай $\gamma > 0$, как будет показано далее, приводит к возрастанию кривой обратной ползучести и потому должен быть исключен наложением ограничений на МФ ОС (1.1).

Отметим, что, хотя модель Пойтинга – Томсона, как сказано в [11], «формально не получается из стандартного тела» предельным переходом, можно заметить, что ее описывает ОС (1.1) с точно такой же трехпараметрической ФП ((2.1) с $\alpha = 0$), что и модель Кельвина (которая «получается» при $\eta_M \rightarrow \infty$). Несмотря на разное элементное строение, эти трехзвенные модели математически эквивалентны. Эквивалентны друг другу и две сингулярные трехзвенные модели с одной пружиной [2]. В [11] этот факт не отмечен, сказано, что существуют ровно четыре «различные трехзвенные модели» и для всех по отдельности выписаны ФП и ФР. Эквивалентность двух пар трехзвенных моделей порождает два ветвящихся дерева эквивалентных многозвенных моделей (с совпадающими семействами ФП и ФР), разных по строению.

3. О сопоставлении теоретических и экспериментальных кривых

Список типичных свойств экспериментальных кривых (ползучести, релаксации, деформирования и т.п.) структурно стабильных однородных материалов приведен в [2, 15]. Из них вытекают необходимые ограничения на материальные функции и параметры ОС, обеспечивающие наличие тех же свойств у теоретических кривых.

Сопоставляя теоретические кривые с экспериментальными, будем прежде всего иметь в виду испытание на чистый сдвиг: тогда в (1.1) $\sigma := \sigma_{12} = s_{12}$, $\varepsilon := \varepsilon_{12} = e_{12}$, $R := R_s$ и $\Pi := \Pi_s$ – сдвиговые функции релаксации и ползучести.

Применяя ОС (1.1) к описанию опытов на одноосное растяжение-сжатие и полагая $\sigma := \sigma_{11}$, $\varepsilon := \varepsilon_{11}$, нужно иметь в виду, что ФП в (1.1) будет зависеть как от сдвиговой, так и от объемной ФП: $\Pi := \Pi_1 = (6\Pi_s + \Pi_v)/9$. Поперечные деформации $\varepsilon := |\varepsilon_{22}|$ связаны с напряжением $\sigma := \sigma_{11}$ посредством ФП $\Pi_2 = (3\Pi_s - \Pi_v)/9$. Измеряя $\varepsilon_{11}(t)$ и $|\varepsilon_{22}(t)|$ в испытаниях на ползучесть при $\sigma_{11} = \bar{\sigma}h(t)$, можно найти $\Pi_1(t)$ и $\Pi_2(t)$, а затем найти $\Pi_s = \Pi_1 + \Pi_2$, $\Pi_v = 3\Pi_1 - 6\Pi_2$, т.е. идентифицировать трехмерные ОС. Возможны и упрощенные трактовки ОС (1.1) при дополнительных предположениях ($\Pi_v \ll \Pi_s$, $\Pi_v = k\Pi_s$ и т.п.) и прямое сопоставление теоретических кривых с кривыми растяжения-сжатия. Тем более, что у многих материалов эти кривые подобны, ибо существует единая кривая зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций, не зависящая от вида напряженного состояния. Если даже единой кривой нет, качественные свойства кривых при испытаниях на сдвиг и одноосное растяжение, как правило, одинаковы.

4. Семейства кривых релаксации и ползучести линейных ОС

Семейства теоретических КП и КР получаются подстановкой в ОС (1.1) процессов $\sigma(t) = \bar{\sigma}h(t)$ и $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon}h(t)$ с произвольными значениями $\bar{\sigma}$ и $\bar{\varepsilon}$:

$$\varepsilon(t) = \bar{\sigma}\Pi(t), \quad \sigma(t) = \bar{\varepsilon}R(t). \quad (4.1)$$

ТКП (4.1) линейно зависят от уровня напряжений, а ТКР – от уровня деформации. При малых σ и ε для некоторых материалов зависимости ЭКП и ЭКР от σ и ε могут быть близки к линейным, при больших – будет заметное отклонение от линейности. Получив ЭКП и ЭКР, необходимо проверить, будут ли выполняться условия независимости отношений $\varepsilon(t, \bar{\sigma})/\bar{\sigma}$ и $\sigma(t, \bar{\varepsilon})/\bar{\varepsilon}$ от $\bar{\sigma}$ и $\bar{\varepsilon}$ соответственно.

Изохронные ТКП всегда линейны по σ : $\varepsilon = k\sigma$, где $k := \Pi(t)$. При $t \rightarrow 0$ семейство изохронных ТКП сходится к прямой $\varepsilon = \sigma\Pi(0)$ (ибо $\Pi(t)$ непрерывна), т.е. к прямой $\sigma = R(0)\varepsilon$ (поскольку $\Pi(0)R(0) = 1$). В [2] показано, что эта прямая – диаграмма мгновенного деформирования, т.е. к ней сходится семейство ТДД $\sigma(\varepsilon, a)$ при постоянных скоростях деформирования a , когда $a \rightarrow \infty$ (кроме того, доказано, что эта прямая – общая касательная всех ТДД в точке $\varepsilon = 0$ для любого a). Если $R(0) = \infty$, то $\Pi(0) = 0$, и семейства изохронных ТКП и ТДД сходятся к вертикальной прямой $\varepsilon = 0$.

Время релаксации находится по ТКР (4.1) из условия $\sigma(0)/\sigma(T) = e$, т.е. из уравнения $R(T) = e^{-1}R(0) : T = \rho(R(0)/e)$, где $\rho := R^{-1}$. Таким образом, время релаксации регулярных моделей (1.1) (с $R(0) < \infty$) не зависит от уровня деформации и является убывающей функцией параметра $R(0) := E$ (начального касательного модуля).

Перечисленные свойства ТКР, ТКП и ТДД намечают границы адекватности линейных ОС (1.1). Их наличие у ЭКР, ЭКП и ЭДД материала следует считать пер-

выми необходимыми признаками линейности его поведения при обсуждении применимости к его моделированию ОС (1.1) (остальные признаки выявлены в [1, 2]).

На рис. 1 приведены КП моделей, задаваемых семейством ФП (2.1) с $\lambda = 0,1$: модели «стандартного тела» (черная кривая: $\beta = 1, \gamma = -0,5, \alpha = 0,02$), Максвелла (синяя: $\gamma = 0, \alpha = 0,03$), Кельвина – Пойтинга (голубая: $\alpha = 0, \gamma = -0,5$), Фойхта (красная: $\beta = -\gamma = 1,5$). Штриховая линия – ТКП модели со степенной ФП $\Pi(t) = At^\omega, \omega \in (0; 1)$ (конкретно: $A = \omega = 1/3$); у нее $\Pi(0) = 0$, как и у модели Фойхта, но еще и $\dot{\Pi}(0) = \infty$ и нет асимптоты (соответствующая ФР – $R(t) = Bt^{-\omega}$, где $B = A^{-1}(\omega\pi)^{-1}\sin\omega\pi$, т.е. ФР не ограничена в окрестности точки $t = 0$, но не содержит сингулярности, – см. красную штриховую линию на рис. 2).

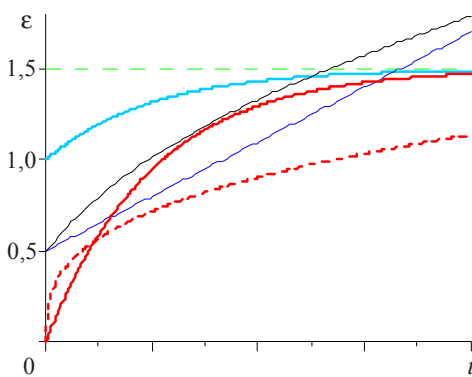


Рис. 1

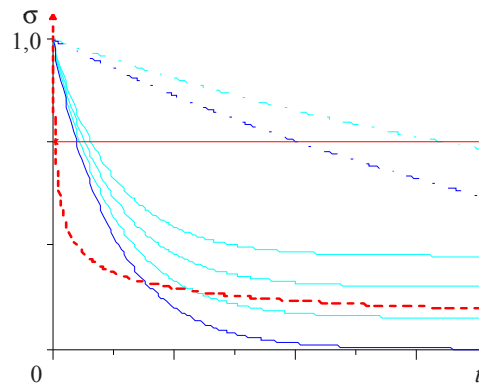


Рис. 2

На рис. 2 приведены ТКР для моделей Кельвина – Пойтинга (три голубые кривые) и Максвелла (синяя кривая). Их ФР: $R(t) = (E - r)e^{-\lambda t} + r, E > r \geq 0$ (для модели Максвелла $r = 0$). Голубые КР соответствуют значениям $r/E = 0,1; 0,2; 0,3; \eta/E = 1$. Две верхние штрихпунктирные кривые – КР при увеличении вязкости η в 10 раз ($\eta/E = 10, r/E = 0; 0,1$). Красная горизонталь – КР модели Фойхта. Она отличается от КР упругого элемента только наличием сингулярности в нуле ($R(t) = \eta\delta(t) + rh(t)$). КР моделей «стандартного тела» не отличаются по очертанию от КР модели Максвелла, так как все они имеют асимптоту $\sigma = 0$ ($\Pi_\infty = \infty$ влечет $R_\infty = 0$; нетрудно показать, что ФР «стандартного тела» – сумма двух экспонент, т.е. эта модель эквивалентна параллельному соединению двух моделей Максвелла с разными временами релаксации [2]).

5. Об ограничениях на материальные функции ОС (1.1)

Вопрос о точной формулировке полного списка минимальных базовых ограничений на материальные функции ОС (1.1) и об их истоках и следствиях обходится в большинстве работ по вязкоупругости и механике полимеров, даже в тех, где часто повторяется слово «теорема». Недостаточно полно он освещен и в монографиях и статьях [3–13, 18–20] (см. обзор в [2]).

В силу (4.1), графики МФ $R(t)$ и $\Pi(t)$ полностью определяют очертание всех КР и КП. Из сравнения ТКР (4.1) с типичными ЭКР следуют минимальные необходимые ограничения на $R(x), x \geq 0$ в (1.1): $R(x)$ положительна и дифференцируема, $R'(x)$ отрицательна и возрастает при $x > 0$ (т.е. $R(x)$ убывает и выпукла вниз).

Из убывания и положительности ФР следует существование предела $R(+\infty) =$

$= \inf R(x) \geq 0$, т.е. наличие горизонтальной асимптоты у $R(x)$ и у всех ТКР (4.1). Если $R(x)$ ограничена в правой окрестности нуля, то существует и $R(0+) = \sup R(x) < \infty$.

Отказ от ограниченности $R(x)$ в правой окрестности точки $x = 0$ (и тем самым от условия $\text{Var}_0^+ R < \infty$) и использование $R(x)$ с интегрируемой особенностью или сингулярностью типа δ -функции, локализованной в нуле, возможен, но приводит не только к сингулярности интегральных уравнений (1.1)–(1.4) и кривых релаксации, отвечающих процессам деформирования $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon}h(t)$, но и к бесконечности правой производной в точке $t = 0$ у откликов $\sigma(t)$, к бесконечности касательного модуля («модуля упругости», модуля сдвига и т.п.) в нуле [2], бесконечности скорости распространения волн, неограниченности оператора \mathbf{R} , наличию скачков $\sigma(t)$ в точках излома $\varepsilon(t)$ (из (1.3) следует, что $\hat{\sigma}(t_*) = \eta \hat{\varepsilon}(t_*)$, если в ФР присутствует слагаемое $\eta \delta(t)$) или бесконечности $\dot{\sigma}(t)$ в этих точках (когда ФР не ограничена, но не сингулярна) и т.д. $R(0) = \infty$ влечет $\Pi(0) = 0$ и отсутствие скачков у деформации при любых скачках процесса $\sigma(t)$, ибо связь между скачками в произвольной точке $\hat{\sigma} = \hat{\varepsilon}R(0)$ или $\hat{\varepsilon} = \hat{\sigma}\Pi(0)$. Если же $\varepsilon(t)$ имеет разрывы первого рода, то $\sigma(t)$ имеет в те же моменты разрыв второго рода; отсюда, в частности, следует, что оператор \mathbf{R} из (1.1) не является непрерывным на пространстве ограниченных кусочно непрерывных функций с нормой $C[0, \infty]$, (даже в $C[0, t]$, если точка разрыва попадает в $[0, t]$).

Экспериментальные КП куда более разнообразны по форме, типичных форм ЭКП существует несколько [5, 18]: КП со всеми тремя стадиями, КП с постоянной или только с убывающей (выпуклые вверх) или с возрастающей скоростями ползучести. Поэтому универсальными требованиями к ФП можно считать только положительность, возрастание и дифференцируемость $\Pi(t)$ при $t \geq 0$ (помимо ограничений, вытекающих из (1.2) и требований к $R(t)$). Ограничения на интервалы выпуклости ФП, казалось бы, можно варьировать в зависимости от свойств ЭКП материалов. Однако следует проверить, не приводят ли они к недопустимым следствиям для других кривых модели. Оказывается, нарушение условия $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ в некоторой точке приводит к появлению участка возрастания на кривой обратной ползучести и должно быть запрещено.

6. Описание обратной ползучести (упругого последействия)

Ступеньку $\sigma(t) = \bar{\sigma}[h(t-t_0) - h(t-t_1)]$, где $\bar{\sigma} > 0$, $t_1 > t_0 \geq 0$, $h(t)$ – функция Хевисайда, оператор (1.1) переводит в процесс

$$\varepsilon(t) = \bar{\sigma}[\Pi(t-t_0)h(t-t_0) - \Pi(t-t_1)h(t-t_1)], \quad t \geq 0.$$

Очевидно, что $\varepsilon(t) \equiv 0$ при $t < t_0$; в точке t_0 включается первое слагаемое, и $\varepsilon(t)$ имеет скачок $\hat{\varepsilon}(t_0) = \bar{\sigma}\Pi(0)$. В момент снятия нагрузки $t = t_1$ включается отрицательное слагаемое, $\varepsilon(t)$ имеет скачок $\hat{\varepsilon}(t_1) = -\bar{\sigma}\Pi(0) = -\hat{\varepsilon}(t_0)$, и далее деформация меняется по закону:

$$\varepsilon(t) = \bar{\sigma}S(t; t_0, t_1), \quad t > t_1, \quad (6.1)$$

где $S(t; t_0, t_1) := \Pi(t-t_0) - \Pi(t-t_1)$.

Поскольку $\Pi(t)$ возрастает, то $S(t; t_0, t_1) > 0$, убывает по t_0 и возрастает по t_1 и $t_1 - t_0$; при этом

$$S_{t_0} = -\dot{\Pi}(t - t_0), S_{t_1} = -\dot{\Pi}(t - t_1), S_t + S_{t_0} + S_{t_1} \equiv 0; S(t; t_0 + \tau, t_1 + \tau) = S(t - \tau, t_0, t_1).$$

Для модели Максвелла $\Pi(t) = \alpha t + \beta$, $\alpha := 1/\eta$, и потому кривая обратной ползучести (6.1) имеет вырожденный вид: $\varepsilon(t) = \bar{\sigma}\alpha(t_1 - t_0) \equiv \text{const}$ при $t > t_1$, т.е. в этом случае вся накопленная деформация ползучести оказывается необратимой, остаточной. Для семейства ФП (2.1), включающего при $\gamma < 0$ модель «стандартного тела», формула (6.1) дает: $\varepsilon(t) = \bar{\sigma}[\alpha(t_1 - t_0) - ce^{-\lambda t}]$, где $c := \gamma(e^{\lambda t_1} - e^{\lambda t_0})$. Для моделей Кельвина – Пойтинга и Фойхта $\alpha = 0$, и потому $S(t) = |\gamma|(e^{\lambda t_1} - e^{\lambda t_0})e^{-\lambda t}$, и $\varepsilon(t) \rightarrow 0$. При $\gamma > 0$ будет $c > 0$, т.е. $\varepsilon(t)$ возрастает после нырка под предельный уровень.

Для всех стабильных материалов после снятия нагрузки (при $t > t_1$) характерно постепенное уменьшение (релаксация) деформации до некоторого уровня (нулевого для сетчатых полимеров в высокоэластичном состоянии); это явление называется упругим восстановлением, возвратом, последствием, обратной ползучестью [5, 18]. Задача его адекватного описания налагает на ФП $\Pi(t)$ дополнительное ограничение.

Из требования (нестрогого) убывания кривых обратной ползучести (6.1) (с $t_0 = 0$ и любым t_1) можно вывести условие невозрастания $\dot{\Pi}(t)$ (т.е. выпуклость вверх $\Pi(t)$); $\dot{S}(t; 0, t_1) = \dot{\Pi}(t) - \dot{\Pi}(t - t_1)$. При всех $t > t_1$ $\dot{S}(t) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\dot{\Pi}(t) = \text{const}$, т.е. $\Pi(t)$ линейна (модель Максвелла). При всех $t > t_1$ $\dot{S}(t) \leq 0$ тогда и только тогда, когда $\dot{\Pi}(t)$ убывающая (нестрого) функция. От противного: если бы существовали точки $t_* > t_1 > 0$: $\dot{\Pi}(t_*) > \dot{\Pi}(t_* - t_1)$, то $\dot{S}(t) > 0$, и потому t_* – точка возрастания $S(t)$, т.е. после сброса нагрузки деформация все же возрастала бы в окрестности некоторой точки. Подобное явление еще никогда не наблюдалось в испытаниях структурно стабильных материалов, поэтому на ФП в линейных ОС (1.1) следует налагать ограничение: $\Pi(t)$ не имеет участков выпуклости вниз.

В силу (4.1) из этого следует, что линейные ОС вязкоупругости не могут описывать стадию ускоряющейся ползучести. Скорость ползучести $\dot{\varepsilon}(t) = \bar{\sigma}\dot{\Pi}(t)$ убывает на луче $t > 0$ и имеет предел $v_\infty = \bar{\sigma}v \geq 0$. Тогда и $\Pi(t)/t \rightarrow \bar{\sigma}v$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. $\Pi(t) = \bar{\sigma}vt + o(t)$, если $v > 0$. Значит, при больших t ТКП ОС (1.1) либо выходят на режим установившейся ползучести со скоростью $\bar{\sigma}v > 0$, либо обладают свойствами $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$ и $\varepsilon(t) = o(t)$ (в этом случае ТКП не обязательно ограничены: например, $\Pi(t) = At^\omega$, $\omega \in (0; 1)$).

Попытка доказать, что линейные ОС не описывают третью стадию ползучести, была сделана в статье [11]: «Если эта кривая имеет третий этап, показанный на рис. 6, то заведомо можно утверждать, что при $t_1 > t_2$ для данного материала нельзя пользоваться линейными ОС» [11, с.140]. «Для исследования этого вопроса» авторы предположили, что ФП $\Pi(t)$ имеет степенную асимптотику $\Pi(t) \sim Bt^n$ при $t \rightarrow \infty$, и показали, что если $n > 1$, то кривая обратной ползучести начинает «неограниченно возрастать» с некоторого момента. Это наблюдение авторы считают доказательством своего вывода: «Физически такой случай не реализуется, поэтому неустановившаяся ползучесть не может описываться линейными ОС» [11, с. 142]. Однако вряд ли можно рассматривать это наблюдение как доказательство. Во-первых, не рассмотрен случай, когда $\Pi(t)$ не имеет степенной асимптотики. Во-вторых, даже если она есть, не доказано, что $\Pi(t)$ не может иметь участка с выпуклостью вниз («третья стадия КП»): только из вида асимптотики при $t \rightarrow \infty$ это не следует, по-

сколькx даже бесконечно гладкая монотонная функция с любой фиксированной асимптотикой может вести себя как угодно на любом отрезке и иметь на нем любое количество точек перегиба. Закравшаяся в [11] неточность проявляется и в том, что в [11] ни разу не говорится о четком ограничении, которое надо наложить на ФП (убывании $\ddot{\Pi}(t)$), и не осознано, что оно индуцирует определенные ограничения на свойства ТДД при постоянных скоростях нагружения [2].

Можно доказать [2], что ограничение $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ на ФП не является следствием остальных ограничений, наложенных выше на ФР и ФП: существует гладкая на луче $t \geq 0$ убывающая ФР с $\dot{R}(t) \geq 0$, такая, что соответствующая ФП строго монотонна, но имеет участок с $\ddot{\Pi}(t) > 0$ (хотя на нем $\dot{R}(t) > 0$). Примером может служить ФР $R(t) = A(1 - t/t_0)^2 + r$ при $t \leq t_0$, $R(t) \equiv r$ при $t \geq t_0$; $A, t_0 > 0, r \geq 0$.

Так как кривая обратной ползучести (6.1) убывает и положительна (ограничена снизу), она имеет предел $\varepsilon_\infty \geq 0$ при $t \rightarrow \infty$, причем $\varepsilon_\infty = \bar{\sigma}s$, где $s := \lim_{t \rightarrow \infty} S(t; t_0, t_1) \geq 0$. Здесь s зависит от t_1 и t_0 , точнее, от $u = t_1 - t_0$ (в силу инвариантности горизонтальной асимптоты относительно сдвигов по времени). Поскольку S возрастает по t_1 и по u , то и $s(u)$ не убывает. Если $s > 0$, то память модели не затухает, так как след, оставленный прямоугольным импульсом нагрузки, не стирается никогда (остаточная деформация $\bar{\varepsilon} = \bar{\sigma}s$).

Для моделей семейства (2.1) $s = \alpha(t_1 - t_0)$, т.е. $s > 0$ при $\alpha > 0$. Если ФП ограничена (например, (2.1) с $\alpha = 0$ или модель Работнова), то $s \equiv 0$ и $\varepsilon(t) \rightarrow 0$. Может быть $s(u) \equiv 0$ и для неограниченной ФП, например, для $\Pi(t) = \alpha t^\omega + \beta$, $\omega \in (0; 1)$, $\alpha, \beta > 0$: тогда $S(t; 0, t_1) = \alpha t^\omega [1 - (1 - t_1/t)^\omega]$, и при $t \rightarrow \infty$ имеем: $S(t; 0, t_1) = \alpha \omega t_1 t^{\omega-1} + O(t^{\omega-2}) \rightarrow 0$ для всех $\omega < 1, t_1 > 0$. Очевидно, что $s(u) \equiv 0$ и для любой ФП с асимптотикой $\Pi(t) = \alpha t^\omega + \beta + o(1)$, $\omega \in (0; 1)$ при $t \rightarrow \infty$. При $\omega = 1$ получается модель Максвелла, для нее уже $s = \alpha t_1 \neq 0$.

На рис. 3 приведены кривые обратной ползучести (при $\bar{\sigma} = 1$) для моделей, задаваемых семейством ФП (2.1) с $\lambda = 0,1$: модели «стандартного тела» (две черные кривые: $\gamma = -0,5, \alpha = 0,1$ и $\alpha = 0,02$), Максвелла (синяя; $\gamma = 0, \alpha = 0,1$), Кельвина – Пойтинга (голубая; $\gamma = -0,5, \alpha = 0$), Фойхта (красная; $\beta = -\gamma = 1,5$). На КП модели Фойхта нет скачка деформации в момент скачка напряжения, так как у нее $\Pi(0) = 0$. Этим же свойством обладает модель со степенной ФП (красная штриховая), но у нее правая касательная в точках $t = 0$ и $t = t_1$ вертикальна. Малиновая штриховая – КП для выпуклой вниз (недопустимой) ФП при $\gamma > 0$ (конкретно $-\gamma = 0,3$).

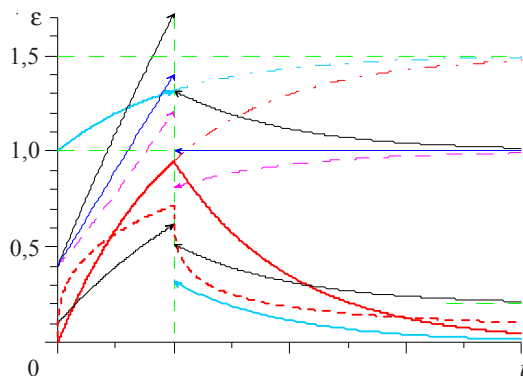


Рис. 3

Заключение

Исследовано линейное определяющее соотношение вязкоупругости с произвольной функцией ползучести, изучены общие качественные свойства семейств теоретических кривых релаксации, ползучести, обратной ползучести, деформирования с постоянной скоростью, их зависимость от свойств функций ползучести и релаксации (см. также [2]). В результате выявлены минимальные необходимые ограничения на функции ползучести и релаксации, обеспечивающие адекватное описание типичных экспериментальных кривых вязкоупругопластических материалов и основных реологических эффектов; установлены характерные особенности поведения теоретических кривых, которые могут служить индикаторами применимости линейных уравнений вязкоупругости, легко проверяемыми экспериментально.

Доказано, что адекватное описание обратной ползучести возможно лишь в случае выпуклости вверх функции ползучести. Это, в частности, означает, что уравнения линейной вязкоупругости не способны моделировать материалы, экспериментальная кривая ползучести которых содержит стадию ускоряющейся ползучести.

Результаты анализа позволяют точнее очертить круг реологических явлений, которые может адекватно описывать линейная теория, усовершенствовать методики аттестации и идентификации определяющего соотношения.

Список литературы

1. Хохлов А.В. Нелинейные модели вязкоупругости типа Максвелла. Особенности их поведения, скоростная чувствительность и возможность использования для описания ползучести и сверхпластичности материалов: Отчет о НИР № 5193 / НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 2013. 108 с. № ГР 01 20 1152141.
2. Хохлов А.В. Качественный анализ линейных определяющих соотношений вязкоупругости. Свойства теоретических кривых деформирования, функций ползучести и релаксации и их произведения: Отчет о НИР № 5208 / НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 2013. 93 с. № ГР 01 20 1152141.
3. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. Некоторые основные проблемы теории термо-вязко-упругости / Д.Л. Быков, А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов, Б.Е. Победря // Механика полимеров. 1971. №1. С. 41–58.
5. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
6. Бленд Д.Р. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 200 с.
7. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
8. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
9. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
10. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
11. Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победря Б.Е. Особенности поведения вязкоупругих моделей // Изв. РАН. МТТ. 2004. №1. С. 119–157.
12. Ильясов М.Х. Нестационарные вязкоупругие волны. Баку, 2011. 329 с.
13. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Основы теории и методы механики полимеров // Механика полимеров. 1969. №1. С. 3–13.
14. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти // Изв. РАН. МТТ. 2007. №2. С. 147–166.
15. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности // Изв. РАН. МТТ. 2008. №2. С. 140–160.

16. Хохлов А.В. Критерии разрушения при ползучести, учитывающие историю деформирования, и моделирование длительной прочности // Изв. РАН. МТТ. 2009. №4. С. 121–135.
17. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 304 с.
18. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 287 с.
19. Суворова Ю.В. Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред // Механика полимеров. 1977. №6. 976–980.
20. Быков Д.Л., Мартынова Е.Д. Структурно-энергетический анализ моделей нелинейно вязкоупругих материалов с несколькими функциями старения и вязкости // Изв. РАН. МТТ. 2011. №1. С. 65–76.

CREEP RECOVERY CURVES YIELDING FROM LINEAR VISCOELASTICITY THEORY AND THE NECESSARY RESTRICTIONS ON A CREEP FUNCTION

A.V. Khokhlov

One-dimensional linear integral constitutive equation of viscoelasticity with an arbitrary creep function is studied analytically. The distinctive features of theoretic curves (creep, relaxation, creep recovery curves, stress-strain diagrams at constant rate) are highlighted that can indicate applicability or non-applicability of the linear theory being compared with the corresponding properties of material test curves. The minimal set of general restrictions that should be imposed on a creep function and relaxation function to provide an adequate description of typical test curves of viscoelastic materials and basic rheological phenomena is formulated. It is proved, in particular, that an adequate simulation of typical experimental creep recovery curves requires that the derivative of a creep function should not increase at any point. This restriction implies that linear viscoelasticity theory yields theoretical creep curves with non-increasing creep rate only and it can't simulate materials demonstrating an accelerated creep stage.

Keywords: constitutive equation, integral operator, creep function, relaxation function, rheological models, regular and singular models, creep curves, creep recovery curves, stress-strain diagrams, restrictions on material functions.