УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ЗАЩИТНОЙ ПЛИТЫ^{*}

© 2013 г. Н.В. Баничук¹, С.Ю. Иванова¹, Е.В. Макеев¹, А.И. Турутько²

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва ²Московский физико-технический институт (государственный университет)

ivanova@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 28.06.2013

Рассмотрена задача оптимизации структуры защитной плиты заданной толщины, состоящей из нескольких слоев. Предполагается, что слои изготовлены из различных материалов с заданными свойствами, а последовательность укладки и толщины слоев определяются из условия максимизации предельной баллистической скорости высокоскоростного ударника, проникающего в защитную плиту. Получены аналитические выражения для предельной баллистической скорости и соотношения, описывающие структуру плиты, построены оптимальные решения для заданного набора материалов и различных значений параметров задачи. Проведена теоретическая оценка параметра, характеризующего форму головной части ударника.

Ключевые слова: оптимизация, пробивание, слоистые структуры.

Введение

Задачи отыскания наилучших защитных структур наряду с вопросами оптимизации формы высокоскоростных ударников, проникающих в различные среды, являются актуальными проблемами механики. Теоретические и экспериментальные исследования в этом направлении проводились зарубежными и отечественными авторами и отражены, например, в публикациях [1–7]. Некоторые основные задачи оптимизации формы жестких ударников, внедряющихся в деформируемые среды, были сформулированы и решены в рамках классического вариационного анализа и численных методов в работах Г. Бен-Дора, А. Дубинского, Т. Эльперина [8, 9], Н.В. Баничука, С.Ю. Ивановой, Ф. Рагнедды, М. Серры [10, 11], Н.А. Остапенко, В.И. Романенко, Г.Е. Якуниной [12]. Многоцелевым задачам оптимизации формы ударника, движущегося в деформируемой среде, посвящена работа Н.В. Баничука, С.Ю. Ивановой, Ф. Рагнедды и М. Серры [13]. Влияние формы головной части

^{*}Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-08-00030а), Программой Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН №12 и Программой поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-2611.2012.1).

ударников при проникании в деформируемую среду изучалось Р. Хиллом [14]. Экспериментальные и теоретические результаты по проблеме проникания в слоистые материалы содержатся в работе Ю.К. Бивина [15]. Некоторые задачи оптимизации однородных покрытий и слоистых конструкций, подверженных внедрению в них жестких ударников, были изучены В.Н. Аптуковым, А.А. Поздеевым и др. [16, 17]. Вопросы исследования баллистических свойств и оптимизации слоистых конструкций рассматривались в книгах [18–20]. Работа [21] посвящена проблеме многоцелевой оптимизации защитной структуры с использованием численного эволюционного метода поиска глобального экстремума.

Основные соотношения задачи пробивания кусочно-неоднородной слоистой структуры абсолютно жестким ударником

Рассматривается нормальное внедрение жесткого цилиндрического тела (ударника) в слоистую плиту заданной толщины *L*. Предполагается, что плита состоит из *n* слоев, расположенных нормально к оси *x* и лежащих в интервалах $x_i \le x \le x_{i+1}$, i=0, 1, ..., n-1. Слои состоят из однородных материалов с заданными прочностными A_0^j и инерционными A_2^j характеристиками (j=1, 2, ..., n), так что плита считается кусочно-однородной в направлении оси *x*.

Проникание жесткого цилиндрического ударника в многослойную деформируемую структуру описывается при помощи второго закона Ньютона

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = D, (1)$$

где *M* – масса ударника, *D* – сила сопротивления деформируемой среды, а *x* – координата жесткого ударника. С учетом следующей цепочки равенств

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx}$$

и полученного экспериментально [5, 6] закона сопротивления деформируемой кусочно-однородной среды

$$D = -\pi R^2 (A_0^j + \kappa A_2^j v^2), \quad x_{j-1} < x < x_j,$$
(2)

уравнение (1) и начальное условие записываются в виде

$$\frac{dv^2}{dx} = -(\alpha A_0 + \beta A_2 v^2), \quad 0 \le x \le L,$$
(3)

$$(v^2)_{x=0} = v_{\rm imp}^2, \tag{4}$$

где R – радиус цилиндрического ударника; κ – коэффициент, характеризующий форму головной части ударника [6, 18]; ν и ν_{imp} – соответственно скорость движения ударника и скорость его в момент соударения с плитой, а коэффициенты α и β определяются выражениями

$$\alpha = \frac{2\pi R^2}{M}, \quad \beta = \frac{2\pi R^2 \kappa}{M}.$$
 (5)

Таким образом, при заданной скорости v_{imp} соударения ударника с плитой, заданной массе ударника M, а также при заданных параметрах структуры, то есть свойствах и размерах слоев, распределение скоростей v = v(x) может быть найдено из решения задачи Коши (3), (4). Как это следует из соотношений (3)–(5), распределение скоростей v = v(x) является монотонно убывающей функцией координаты $x \in [0, L]$. Если начальная скорость (скорость входа) $v(0) = v_{imp}$ такова, что v(x) > 0 при $x \in [0, L)$ и

$$v(L) = 0, \tag{6}$$

то скорость соударения называется баллистической предельной скоростью или ballistic limit velocity

$$v(0) = v_{\rm imp} = v_{\rm BLV}.\tag{7}$$

Эта скорость рассматривается в настоящей работе в качестве основной защитной характеристики слоистой плиты. Для эффективного отыскания v_{BLV} удобно ввести новые переменные ξ, y:

$$\xi = L - x, \quad y(\xi) = v^2 \tag{8}$$

и преобразовать задачу интегрирования дифференциального уравнения (3) с заранее неизвестным начальным условием (4) в задачу интегрирования модифицированного дифференциального уравнения с нулевым начальным условием

$$\frac{dy}{d\xi} = \alpha A_0 + \beta A_2 y, \quad 0 \le \xi < L, \tag{9}$$

$$(y)_{\xi=0} = 0. \tag{10}$$

Заметим, что при заданных значениях A_0^j , A_2^j и ξ_j послойное интегрирование по $\xi \in [\xi_j, \xi_{j+1}]$ при условии $y(\xi_j) = y_j$ приводит к алгебраическому соотношению

$$\frac{1}{\beta A_2^j} \ln \left(\frac{\alpha A_0^j + \beta A_2^j y}{\alpha A_0^j + \beta A_2^j y_j} \right) = \xi - \xi_j$$
(11)

между переменными ξ и *у*, которое определяет решение, то есть распределение скоростей для каждого слоя и, в частности, значение предельной баллистической скорости. Для удобства перейдем к безразмерной координате $\tilde{\xi} = \xi/L$. Выражение (11) примет тогда следующий вид (знак «тильда» над символами здесь и далее опускаем):

$$\frac{1}{L\beta A_2^j} \ln\left(\frac{\alpha A_0^j + \beta A_2^j y}{\alpha A_0^j + \beta A_2^j y_j}\right) = \xi - \xi_j$$

Оптимизация кусочно-однородной слоистой плиты

Предположим, что задано множество всех возможных материалов

$$A = \{ (A_0^1, A_2^1), (A_0^2, A_2^2), \dots, (A_0^r, A_2^r) \},$$
(12)

и рассмотрим задачу оптимизации критической баллистической скорости, выбирая наилучшее распределение слоев из заданных материалов

$$y_{\rm BLV}^* = \max_A y_{\rm BLV}.$$
 (13)

Оптимальное решение для каждого *i*-го слоя находится при помощи максимизации по (A_0^i, A_2^i) выражения $\alpha A_0^i + \beta A_2^i y = f_i$, фигурирующего в правой части дифферен-

циального уравнения (9), и с учетом непрерывности функции y(x) при $\xi \in [0, L]$, то есть

$$f_i^* = \max_{(A_0^i, A_2^i) \in A} [\alpha A_0^i + \beta A_2^i y].$$
(14)

Выражение (14) для f_i^* является кусочно-линейной непрерывной функцией *у*. Угловые точки этой функции удовлетворяют условию

$$\alpha A_0^i + \beta A_2^i y_{i+1} = \alpha A_0^{i+1} + \beta A_2^{i+1} y_{i+1}, \tag{15}$$

и, следовательно, значения y_{i+1} в точках соприкосновения слоев определяются выражениями

$$y_{i+1} = y(\xi_{i+1}) = \frac{\alpha(A_0^i - A_0^{i+1})}{\beta(A_2^{i+1} - A_2^i)}, \quad i = 1, 2, \dots$$
(16)

При этом для координат границ слоев ξ_i справедливы равенства

$$\frac{1}{\beta A_{2}^{j}} \ln \left(\frac{\alpha A_{0}^{j} + \beta A_{2}^{j} y_{j+1}}{\alpha A_{0}^{j} + \beta A_{2}^{j} y_{j}} \right) = \xi_{j+1} - \xi_{j}.$$
(17)

Соотношения (14)–(17) позволяют осуществить поиск оптимального решения, то есть оптимальных значений ξ , y_i , $y_{BLV} = v_{BLV}^2$ для любого заданного числа материалов. Процесс отыскания оптимального решения проиллюстрируем в случае наличия четырех материалов, свойства которых представлены в таблице 1 (*s* – номер материала) [5, 6] и показаны также на рис. 1.

			Таблица 1
Номер материала s	Материал	A_{0s} , H/m ²	А _{2s} , кг/м ³
1	алюминий	$A_{01} = 350 \cdot 10^6$	$A_{21} = 2765$
2	мягкая сталь	$A_{02} = 1850 \cdot 10^6$	$A_{22} = 7830$
3	медь	$A_{03} = 910 \cdot 10^6$	$A_{23} = 8920$
4	дюралюминий	$A_{04} = 1330 \cdot 10^6$	$A_{24} = 2765$



На рис. 2 с использованием координат у и $\tilde{f} = f/\alpha$ (знак «тильда» далее опускается) представлены зависимости

$$f = A_0 + \kappa A_2 y \tag{18}$$

для рассматриваемых допустимых материалов в случае $\kappa = 1$. Оптимальное распределение материала f^* показано на рис. 2 жирной сплошной линией. Для данного набора материалов эффективно расположить самый тяжелый материал (медь, s = 3) во фронтальной части плиты, а самый прочный (сталь, s = 2) – в ее тыльной части. Выигрыш от оптимизации по сравнению с однородной сплошной стальной плитой при $\kappa = 1$ составил 18,8%. Отметим, что с уменьшением значения параметра κ выигрыш за счет оптимизации снижается.



Граница раздела слоев $\xi = \xi_2$ и значение квадрата скорости $y_2 = y(\xi_2)$ находятся следующим образом. Сначала с использованием выражения (16) определяется y_2 :

$$y_2 = \frac{A_0^1 - A_0^2}{\kappa (A_2^2 - A_2^1)} = \frac{A_{02} - A_{03}}{\kappa (A_{23} - A_{22})}.$$
(19)

Затем с применением соотношения (17) находится граница раздела стали и меди. При этом полагается $\xi_1 = 0, y_1 = 0, A_0^1 = A_{02}, A_2^1 = A_{22}$. Имеем

$$\xi_2 = \frac{1}{\beta A_{22}} \ln \left(1 + \kappa \frac{A_{22}}{A_{02}} y_2 \right).$$
(20)

Параметры A_{02} , A_{03} , A_{22} , A_{23} задаются из таблицы 1. Отыскание квадрата предельной баллистической скорости $y_{\rm BLV}$ реализуется с применением соотношения (17), в котором полагается j = 2, $A_0^2 = A_{03}$, $A_2^2 = A_{23}$, $y_3 = y_{\rm BLV}$, $\xi_3 = 1$. Будем иметь

$$\frac{1}{\beta A_{23}} \ln \left(\frac{\alpha A_{03} + \beta A_{23} y_{\rm BLV}}{\alpha A_{03} + \beta A_{23} y_2} \right) = 1 - \xi_2 \,. \tag{21}$$

В рассматриваемом случае оптимальной структуры, состоящей из двух материалов, находим

$$y_{\rm BLV} = \frac{1}{\beta A_{23}} \{ (\alpha A_{03} + \beta A_{23} y_2) \exp[\beta A_{23} (1 - \xi_2)] - \alpha A_{03} \}.$$
(22)

Таким образом, в случае заданного набора из четырех материалов при отсутствии

дополнительных ограничений геометрического, весового или стоимостного характера оптимальная защитная структура (кусочно-однородная слоистая плита) составляется из двух материалов, обладающих наилучшими в смысле подавления скорости ударника прочностными и инерционными свойствами. Фронтальный слой оптимальной структуры имеет толщину $1 - \xi_2$, характеризуется максимальной инерционной характеристикой и расположением $0 \le x \le 1 - \xi_2$. При этом тыльная часть плиты имеет толщину ξ_2 и расположена в интервале $1 - \xi_2 < x \le 1$.

Теоретическое оценивание коэффициента формы головной части ударника

В формуле (2) мы использовали следующее аналитическое выражение для абсолютной величины силы сопротивления \widetilde{D} :

$$\widetilde{D} = |D| = \pi R^2 (A_0 + \kappa A_2 v^2), \quad x \in [0, L],$$

$$A_0 = A_0^j, \quad A_2 = A_2^j, \quad x \in (x_{j-1}, x_j],$$
(23)

которое содержит экспериментально определяемый параметр κ (коэффициент формы головной части ударника) [6, 18]. Отметим, что параметр κ может быть также оценен аналитически с использованием выражения для нормальных напряжений

$$\sigma(v_n) = A_0 + A_2 v_n^2, \qquad (24)$$

$$v_n = v\cos\phi = v\frac{r_s}{\sqrt{1+r_s^2}}, \quad r_s = \frac{dr}{ds},$$
(25)



Для этого опишем форму скругленной осесимметричной головной части ударника при помощи непрерывной функции

$$r = r(s), \quad 0 \le s \le l_f,$$

 $r(0) = 0, \quad r(l_f) = R.$
(26)

К элементу поверхности головной части ударника dS прикладывается сила

$$d\mathbf{F} = \sigma(v_n) \mathbf{n}^0 dS. \tag{27}$$

211

Суммарная сила \widetilde{D} , действующая на поверхность головной части ударника в направлении, противоположном вектору скорости **v**, вычисляется при помощи интегрирования элементарных воздействий (27). Имеем

$$\widetilde{D} = \mathbf{s}^0 \int_{S} d\mathbf{F} = \mathbf{s}^0 \int_{S} \sigma(v_n) \mathbf{n}^0 dS = \int_{S} (\mathbf{s}^0 \cdot \mathbf{n}^0) \sigma(v_n) dS.$$
(28)

Подставляя соотношения (24), (25) и выражение

$$dS = 2\pi R \sqrt{1 + r_s^2} \, ds \tag{29}$$

в равенство (28), получим

$$\widetilde{D} = 2\pi \int_{0}^{l_{f}} \left(A_{0} + a_{2}v^{2} \frac{r_{s}^{2}}{1 + r_{s}^{2}} \right) r_{s} r ds.$$
(30)

Преобразуем полученное выражение (30) с учетом граничных условий (26):

$$\widetilde{D} = 2\pi A_0 \int_0^R r dr + 2\pi A_2 v^2 \int_0^{l_f} \frac{r_s^2}{1 + r_s^2} r_s r ds =$$
$$= \pi R^2 \left[A_0 + \left(\frac{2}{R^2} \int_0^{l_f} \frac{r_s^2}{1 + r_s^2} r_s r ds \right) A_2 v^2 \right].$$
(31)

Сравнивая представления (23) и (31) для \tilde{D} , приходим к следующему аналитическому выражению для коэффициента к:

$$\kappa = \frac{2}{R^2} \int_0^{l_f} \frac{r_s^2}{1 + r_s^2} r_s r ds, \qquad (32)$$

характеризующему влияние осесимметричной формы закругления ударника, то есть формы головной части. Заметим, что для ударника в форме цилиндра с плоской фронтальной поверхностью

$$\widetilde{D} = \pi R^2 (A_0 + A_2 v^2).$$
(33)

Из выражения (32) с учетом неравенства $r_s^2/(1+r_s^2) \le 1$ вытекает следующая оценка:

$$\kappa = \frac{2}{R^2} \int_0^{l_f} \frac{r_s^2}{1 + r_s^2} r_s r ds \le \frac{2}{R^2} \int_0^{l_f} r_s r ds = \frac{2}{R^2} \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = 1.$$
(34)

Вычислим коэффициент к для некоторых форм головной части ударника. Предположим сначала, что головная часть имеет коническую форму, удовлетворяющую условиям

$$r(0) = 0, \quad r(l_f) = R$$
 (35)

и задаваемую уравнением

$$r = r(s) = Cs, \quad C = \frac{R}{l_f}, \quad 0 \le s \le l_f.$$
 (36)

В этом случае будем иметь ($r_s = C$)

$$\kappa = \frac{2}{R^2} \int_0^{l_f} \frac{r_s^2}{1 + r_s^2} r_s r ds = \frac{2}{R^2} \frac{C^2}{1 + C^2} \frac{r^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{C^2}{1 + C^2} = \frac{R^2}{l_f^2 + C^2}.$$
 (37)

Из этой формулы также следует, что к ≤ 1, то есть величина к не превышает значения, соответствующего цилиндрическому ударнику с плоской фронтальной границей.

Выводы

Выведены основные соотношения для нахождения предельной баллистической скорости и найдены наилучшие слоистые структуры защитной системы в случае отсутствия дополнительных ограничений геометрического, весового и стоимостного характера. Показано, что оптимальная слоистая плита состоит из двух материалов (из заданного множества материалов), обладающих наилучшими в смысле подавления скорости ударника прочностными и инерционными свойствами. Были рассмотрены случаи ударников с различными характеристиками головной части и показана эффективность применения двух материалов по сравнению с использованием только одного. Получены теоретические оценки параметра, характеризующего форму головной части ударника.

Список литературы

1. Goldsmith W. Non-ideal projectile impact on targets // Int. J. Impact Engng. 1999. V. 22 (2,3). P. 95–395.

2. Бивин Ю.К., Колесников В.А., Флитман Л.М. Определение механических свойств среды методом динамического внедрения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1982. №5. С. 181–185.

3. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях / Под ред. Н.А. Златина, Г.И. Мишина. М.: Наука, 1974. 344 с.

4. *Forrestal M.J.*, *Lee L.M.*, *Jenrette B.D.* Laboratory-scale penetration experiments into geological targets up to impact velocities of 2.1 km/s // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1986. V. 53, No 2. P. 317–320.

5. Витман Ф.Ф., Иоффэ Б.С. Простой метод нахождения динамической твердости металлов с помощью двустороннего конуса // Заводская лаборатория. 1948. Т. XIV, №6. С. 727–732.

6. Витман Φ.Ф., Степанов В.А. Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара 10²÷10³ м/с // Некоторые проблемы прочности твердого тела. Л.: Изд-во АН СССР, 1959. 336 с.

7. Баженов В.Г., Котов В.Л. Математическое моделирование нестандартных процессов удара и проникания осесимметричных тел и задачи идентификации свойств грунтовых сред. М.: Физматлит, 2011. 205 с.

8. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of high velocity impactors using analytical models // Int. J. of Fracture. 1997. V. 87, No 1. L7–L10.

9. *Ben-Dor G.*, *Dubinsky A.*, *Elperin T*. Numerical solution for shape optimization of an impactor penetrating into a semi-infinite target // Computers and Structures. 2003. V. 81, №1. P. 9–14.

10. *Banichuk N.V., Ivanova S.Yu.* Shape optimization of rigid 3D high speed impactor penetrating into concrete shields // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2008. V. 36, No 3. P. 249–259.

11. *Banichuk N.V., Ragnedda F., Serra M.* On body shapes providing maximum depth of penetration // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2009. V. 38, No 3. P. 491–498.

12. Остапенко Н.А., Романенко В.И., Якунина Г.Е. Оптимальные формы трехмерных тел, проникающих в плотные среды // Прикладная механика и техническая физика. 1994. Т. 4. С. 515–521.

13. Multiobjective shape optimization of the rigid shell moving into dense media / N.V. Banichuk, S.Yu. Ivanova, F. Ragnedda, M. Serra // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2013. V. 40, No 1. P. 73–82.

14. *Hill R*. Cavitation and influence of headshape in attack of think targets by non-deformable projectiles // J. Mech. and Phys. Solids. 1980. V. 28, No 5,6. P. 249–263.

15. Бивин Ю.К. Проникание твердых тел в сыпучие и слоистые среды // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. №1. С. 154–160.

16. Аптуков В.Н., Поздеев А.А. Некоторые минимаксные задачи технологии и прочности конструкций // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1982. №1. С. 47–55.

17. Аптуков В.Н., Белоусов В.Л., Каниболотский М.А. Оптимизация структуры слоистой плиты при проникании жесткого ударника // Механика композит. материалов. 1986. №2. С. 252–257.

18. Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989. 176 с.

19. Алехин В.В., Уржумцев Ю.С. Оптимизация слоистых систем. Якутск: ЯФ Изд-ва СО РАН, 2002. 177 с.

20. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Applied high-speed plate penetration dynamics. Dordrecht: Springer, 2006. 353 p.

21. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В. Проникание жестких ударников в слоистые пластины и некоторые задачи глобальной многоцелевой структурной оптимизации // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2012. Вып. 74. С. 124–133.

SOME ANALYTICAL AND COMPUTATIONAL ESTIMATES OF PARAMETERS OF OPTIMAL PROTECTIVE PLATE STRUCTURE

N.V. Banichuk, S.Yu. Ivanova, E.V. Makeev, A.I. Turutko

The optimization problem of shield (protective plate) structure having given thickness and consisting from several layers is considered. It is supposed that these layers are made from different materials with given properties. The order and thicknesses of layers are determined from the condition of maximization of ballistic limit velocity of the high-speed striker penetrating into the plate. The analytical expressions for the ballistic limit velocity and the relations describing the shield structure are derived, the optimal solutions for the given set of materials and different values of problem parameters are obtained. The theoretical estimation of the parameter characterizing the head part of striker is performed.

Keywords: optimization, penetration, layered structures.