

УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ*

© 2013 г.

Л.А. Игумнов, И.П. Марков

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 28.08.2013

Рассматривается применение метода граничных элементов к решению краевых задач трехмерной линейной электроупругости. Для записи гранично-интегрального уравнения прямого подхода использовано представление системы уравнений электроупругости в единой форме с системой уравнений анизотропной теории упругости. Компоненты матриц фундаментальных и сингулярных решений найдены на основе интегрального и полиномиального представлений, а для наглядности дана их визуализация. Приведен пример гранично-элементного решения краевой задачи.

Ключевые слова: электроупругость, граничный элемент, краевая задача, компоненты фундаментальных и сингулярных решений.

Введение

Применение пьезокерамических преобразователей в ультразвуковой, радиоэлектронике, измерительной и вычислительной технике стимулирует изучение свойств естественных кристаллов и искусственных керамик с учетом связанности электрических и механических полей. В связи с возрастающими требованиями к точности и надежности расчетов инженерных изделий возникает проблема теоретического и численного исследований пространственных задач теории упругости с учетом электрического потенциала. Общая методика расчета ряда устройств акустоэлектроники основана на использовании тензора Грина. Построение такого тензора для связанных задач электроупругости представляет собой самостоятельную задачу.

Эффективные численные схемы решения эквивалентных граничных интегральных уравнений (ГИУ) для краевых задач динамической электроупругости реализуются с помощью двойного применения теоремы взаимности, ключевым этапом которого является решение соответствующей статической задачи.

В статье рассматривается прямой вариант метода ГИУ. В гранично-элементной схеме используется соответствующее методическое и программное обеспечение, созданное в НИИ механики Нижегородского государственного университета [1, 2].

* Выполнено при частичном финансировании ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК 14.740.11.0872, соглашения 14.В37.21.1249, 14В37.21.1137), Программой господдержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и РФФИ (гранты 12-01-00698-а, 12-08-00984-а, 12-08-31572, 13-08-00658).

1. Математическая модель

Базовые уравнения статической трехмерной линейной теории электроупругости записываются в виде [3]:

$$\sigma_{ji,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad i, j = \overline{1, 3},$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijlm} \varepsilon_{lm} - e_{kij} E_k, \quad D_i = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \tilde{\varepsilon}_{ij} E_j, \quad i, j, k, l, m = \overline{1, 3},$$

где σ_{ij} , ε_{ij} – соответственно компоненты тензоров напряжения и деформации; D_i и E_j – компоненты векторов электрического смещения и электрического поля; C_{ijlm} , e_{ijk} и $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ – упругие модули (измеренные при постоянном электрическом поле), электроупругие коэффициенты (измеренные при постоянной деформации или постоянном электрическом поле) и диэлектрические константы (измеренные при постоянной деформации).

Используя определения тензора линейной деформации и электрического потенциала, получаем определяющие дифференциальные уравнения линейной статической теории электроупругости:

$$C_{ijkl} u_{k,li} + e_{lij} \phi_{,il} = 0, \quad e_{ikl} u_{k,li} - \tilde{\varepsilon}_{il} \phi_{,li} = 0, \quad i, j, k, l = \overline{1, 3}, \quad \Omega \subset R^3,$$

где u_i и ϕ – упругие перемещения и электрический потенциал соответственно.

Введем новые индексы K, J , варьируемые от 1 до 4, индексы 1–3 представляют упругие переменные, а индекс 4 – электрические. Определим, соответственно, обобщенные векторы перемещений, усилий и тензор электроупругих модулей:

$$U_K = \begin{cases} u_k, & k = K = 1, 2, 3, \\ \phi, & K = 4, \end{cases} \quad T_J = \begin{cases} t_j, & j = J = 1, 2, 3, \\ q, & J = 4, \end{cases}$$

$$C_{iJKl} = \begin{cases} C_{ijkl}, & j = J = k = K = 1, 2, 3, \\ e_{lij}, & j = J = 1, 2, 3, K = 4, \\ e_{ikl}, & J = 4, k = K = 1, 2, 3, \\ -\tilde{\varepsilon}_{il}, & J, K = 4, \end{cases}$$

где q – плотность поверхностного заряда ($q = D_i n_i$) и n_i обозначает единичный вектор нормали к площадке.

С использованием введенных обозначений система уравнений статической трехмерной линейной теории электроупругости примет вид:

$$L_{JK} U_k = 0, \quad \Omega \subset R^3; \quad J, K = \overline{1, 4}, \quad (1)$$

$$u = \tilde{u} \text{ на } \Gamma^u, \quad t_i = \tilde{t}_i \text{ на } \Gamma^t, \quad \phi = \tilde{\phi} \text{ на } \Gamma^\phi, \quad q = \tilde{q} \text{ на } \Gamma^q,$$

где $L_{JK} = C_{iJKl} \partial_i \partial_l$; $i, l = \overline{1, 3}$; $J, K = \overline{1, 4}$.

Использование введенной формализации позволило записать математическую модель электроупругости в виде системы уравнений анизотропной теории упругости. Поэтому можно опустить процедуру сведения краевой задачи (1) к ГИУ, так как формально мы получим тот же вариант обобщенной формулы Грина – Бетти – Сомильяны, записанной на границе, что и для анизотропной теории упругости [1, 4]:

$$C_{KJ} U_J(x) = \int_{\Gamma} (U_{KJ}^*(x, \xi) P_J(\xi) - T_{KJ}^*(x, \xi) U_J(\xi)) dS(\xi), \quad K, J = \overline{1, 4},$$

$$c_{KJ} = \delta_{KJ} + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{KJ}^* dS, \quad (2)$$

где δ_{KJ} – дельта Кронекера; $\Gamma = \partial\Omega$ – граница области Ω ; U_J, P_J – соответственно

компоненты векторов обобщенных перемещений и усилий; U_{JK}^* и T_{KJ}^* – соответственно компоненты матриц обобщенных фундаментальных и сингулярных решений (1).

2. Ядра граничных интегральных уравнений

Построение фундаментальных и сингулярных решений системы ГИУ (2) является самостоятельной проблемой [5, 6]. Компоненты матриц фундаментальных решений для анизотропной теории электроупругости имеют вид:

$$U_{JK}^* = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{\Gamma^2} (M_{JK}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(z_i, r_i^0) ds(z_i),$$

$$r_i^0 = \frac{r_i}{r}, \quad M_{JK}^{zz} = \hat{C}_{iJKI} z_i z_l, \quad z_1, z_2 = 1,$$

$$U_{JK}^*(x) = -\frac{1}{2\pi r} \operatorname{Im} \sum_{m=1}^4 \frac{A_{JK}(p + \zeta_m q)}{a_9 (\zeta_m - \zeta_m^*) \prod_{k=1, k \neq m}^4 (\zeta_m - \zeta_k)(\zeta_m - \zeta_k^*)}, \quad J, K = \overline{1, 4}, i = \overline{1, 3},$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака; $r = |x - y|$, ζ_m – корни многочлена $D(p + \zeta q) = 0$ восьмой степени от ζ ; a_9 – коэффициент при ζ^8 ; $\operatorname{Im} \zeta_m > 0$, $m = 1, 4$; ζ_m^* – сопряженное к ζ_m выражение.

Применение двух подходов к получению компонент матриц позволяет проводить апостериорный анализ достоверности получаемых результатов. Производные от матриц Грина строятся с помощью конечно-разностного аналога. С учетом принятой в работе формализации вид ядер ГИУ (2) не претерпит существенных изменений.

Построение матриц фундаментальных решений в виде трехмерных поверхностей можно описать на основе интерполяционной схемы вычисления. Функции $U_{JK}^*(x)$ зависят от трех переменных x_1, x_2 и x_3 . Если перейти к сферическим координатам (r, θ_1, θ_2) , то для единичной сферы функции $U_{JK}^*(\theta_1, \theta_2)$ будут функциями только двух переменных – полярного угла $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ и азимутного угла $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$. Значение U_{JK}^* в конкретной точке (θ_1, θ_2) строится с помощью линейной интерполяции Лагранжа [2].

Построим соответствующие поверхности этих ядер для конкретного материала – трансверсально-изотропной пьезокерамики PZT со следующими свойствами:

$$C = \begin{bmatrix} 107,6 & 63,1 & 63,9 & 0 & 0 & 0 \\ 63,1 & 107,6 & 63,9 & 0 & 0 & 0 \\ 63,9 & 63,9 & 100,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22,2 \end{bmatrix} \text{ ГПа},$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12,0 & 0 & 0 \\ -9,6 & -9,6 & 15,1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\text{Н}}{\text{В}\cdot\text{м}}, \quad \tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1936 & 0 & 0 \\ 0 & 1936 & 0 \\ 0 & 0 & 2109 \end{bmatrix}.$$

На рис. 1–4 представлены некоторые из компонент обобщенной матрицы Грина и ее производных.

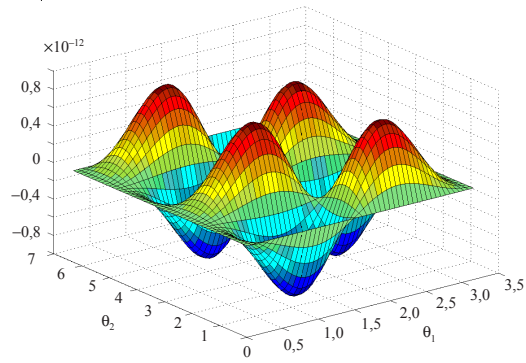


Рис. 1. Компонента $U_{12,3}$

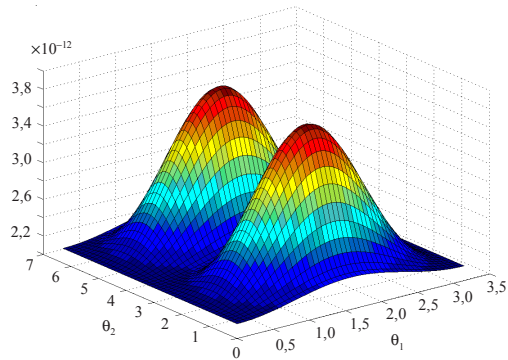


Рис. 2. Компонента U_{22}

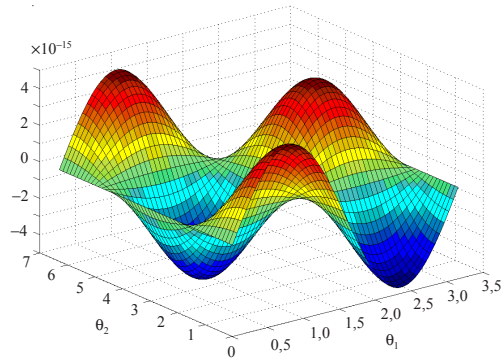


Рис. 3. Компонента U_{14}

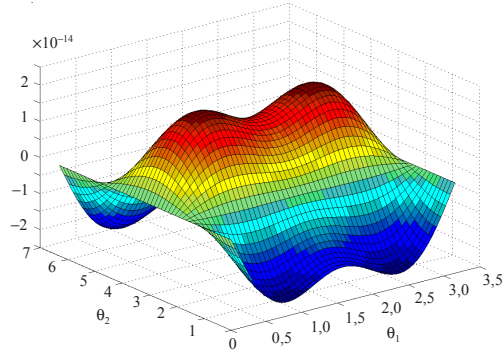


Рис. 4. Компонента $U_{43,1}$

Знание ядер ГИУ (2) позволяет строить гранично-элементную модель исходной краевой задачи (1).

3. Гранично-элементная дискретизация и численные эксперименты

Используемая гранично-элементная модель описана в [2]. Граница Γ области аппроксимируется совокупностью четырехугольных восьмиузловых биквадратичных элементов S_k ($k = 1, \dots, N$). Декартовы координаты произвольной точки $y = (y_1, y_2, y_3)$ элемента S_k выражаются через координаты узловых точек этого элемента с помощью функции формы N^e ($e = 1, \dots, 8$) от локальных координат $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

$$y_i(\xi) = \sum_{e=1}^8 N^e(\xi) y_i^{\beta(k,e)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\beta(k, e)$ – глобальный номер узла, имеющего в k -м элементе локальный номер e .

Граничные перемещения аппроксимируются билинейными элементами, поверхностные усилия – постоянными элементами. Для получения дискретного аналога ГИУ в качестве проекционного метода используется метод коллокации. В качестве узлов коллокации выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций.

Рассмотрим задачу о действии на тело электрического потенциала, приложенного, как показано на рис. 5. Тело жестко закреплено на нижнем торце, остальная поверхность свободна от усилий. Там, где приложен потенциал, плотность поверхностного заряда неизвестна. В качестве материала взят трансверсально изотропный пьезокерамик PZT. Вслед за [4] исследовались перемещения u_3 и потенциал ϕ в узлах на линии $(0,05; 0; x_3)$. Проведено сравнение полученных результатов с результатами из [4] (рис. 6, 7) и с соответствующими значениями в узлах на линии $(0; 0; x_3)$ (рис. 8, 9). Расчеты проводились на ГЭ-сетке с количеством элементов 1400.

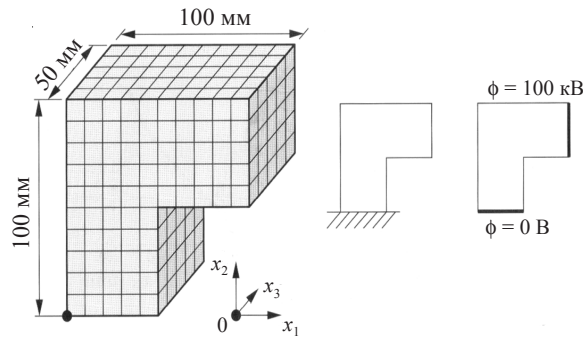


Рис. 5

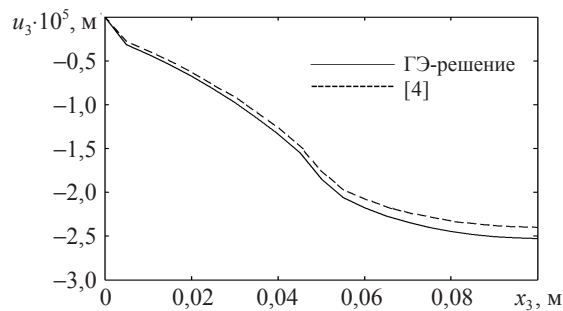


Рис. 6

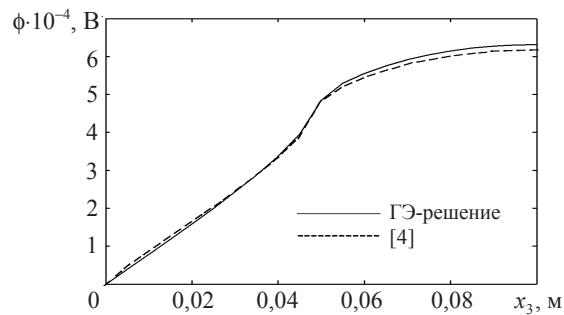


Рис. 7

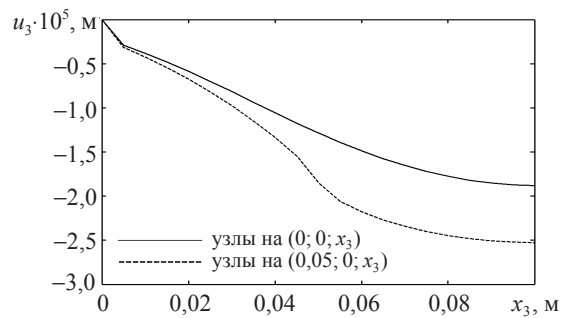


Рис. 8

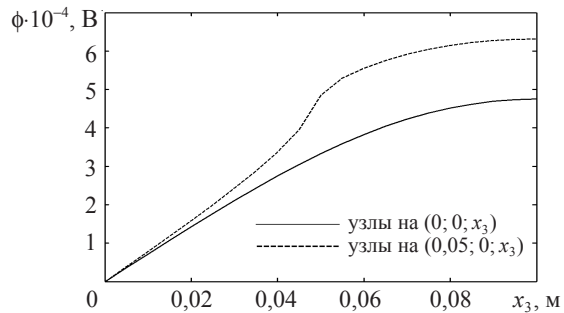


Рис. 7

Заключение

Продемонстрированы возможности методического и программного гранично-элементного обеспечения по решению краевых задач линейной трехмерной теории электроупругости. Имеет место удовлетворительное соответствие полученных в статье результатов с результатами других авторов.

Список литературы

1. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во КГУ, 1986. 296 с.
2. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
3. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе и др.; ред. В.Д. Купрадзе. Изд. 2-е. М.: Наука, 1976. 664 с.

4. *Gaul L., Kogl M., Wagner M.* Boundary element methods for engineers and scientists. Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 2003. 488 p.

5. Численно-аналитическое построение матриц Грина трехмерных теорий упругости и электроупругости / Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук, В.П. Пазин, А.Н. Петров // Вестник ННГУ / Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2010. Вып. 3. С. 134–140.

6. *Игумнов Л.А., Пазин В.П.* Численно-аналитическое построение матриц Грина и Неймана трехмерной теории термоупругости // Вестник ННГУ / Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2012. Вып. 4. С. 159–165.

BOUNDARY-ELEMENT MODELING OF 3D BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF ELECTRO-ELASTIC BALANCE

L.A. Igumnov, I.P. Markov

The boundary-element method is applied to the analysis of boundary-value problems of 3D linear electro-elasticity. To write the boundary-integral equation of the direct approach, the electro-elasticity equation set is represented in the same form as the anisotropic elasticity equation set. Components of the matrices of fundamental, singular solutions are found using integral and polynomial representations; their visualization is also presented. An example of the BE-analysis of a boundary-value problem is given.

Keywords: electro-elasticity, boundary element, boundary-value problem, components of fundamental and singular solutions.