

УДК 539.3

## ШАГОВЫЙ МЕТОД ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА НА УЗЛАХ СХЕМЫ РУНГЕ – КУТТЫ\*

© 2013 г.

Л.А. Игумнов, Я.Ю. Ратаушко

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского*

igumnov@mech.unn.ru

*Поступила в редакцию 20.08.2013*

Рассматривается задача построения шаговых по времени методов численного обращения преобразования Лапласа, основанных на теореме об интегрировании оригинала. Выбор шагов по времени осуществляется на узлах схемы Рунге – Кутты.

*Ключевые слова:* обращение преобразования Лапласа, шаговый метод, схема Рунге – Кутты.

### Введение

В работах [1–3] предложен новый метод построения шаговых по времени схем метода граничных элементов (МГЭ) на основе интеграла Вольтерра в свертках – метод квадратур свертки. Для построения гранично-элементной схемы в рамках такого подхода необходимо решить проблему обращения интегрального преобразования Лапласа [3–5]. В работах [6–9] был применен вариант метода квадратур свертки – шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа. Использование схем Рунге – Кутты позволяет строить новые его модификации [10, 11]. Настоящая статья посвящена вопросу построения шаговых методов численного обращения преобразования Лапласа на узлах схемы Рунге – Кутты с целью развития соответствующих гранично-элементных моделей решения трехмерных краевых задач динамики, упругости, вязко- и поропругости.

### Постановка задачи

Прямое и обратное интегральные преобразования Лапласа определяются выражениями:

$$\bar{u}(x, s) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt,$$

---

\* Выполнено при частичном финансировании ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК 14.740.11.0872, соглашения 14.В37.21.1249, 14В37.21.1137), Программой господдержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и РФФИ (гранты 12-01-00698-а, 12-08-00984-а, 12-08-31572, 13-08-00658).

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\omega}-i\infty}^{\tilde{\omega}+i\infty} \bar{u}(x, s) e^{st} ds,$$

где  $s = \tilde{\omega} + i\omega$  – комплексная переменная, введенная в полуплоскости  $\tilde{\omega} > \tilde{\omega}_0$ , прямая черта над символом означает изображение по Лапласу.

Для построения схемы численного обращения преобразования Лапласа традиционно используется интеграл, определяющий обратное преобразование Лапласа, однако существуют и другие способы, в частности, в работах [1, 2] на основе теоремы о свертках сформулирован метод квадратур свертки.

Рассмотрим метод, опирающийся на теорему об интегрировании оригинала, – шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа.

### Шаговый метод обращения преобразования Лапласа

Пусть необходимо вычислить интеграл:

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (1)$$

При вычислении заменяем этот интеграл квадратурной суммой, весовые множители которой определяются с помощью изображения по Лапласу  $\bar{f}$  и линейного многошагового метода [1–3] (дальнейшее изложение идет с учетом результатов этих работ). Традиционный шаговый метод интегрирования оригинала состоит в том, что интеграл (1) вычисляется по следующему алгоритму:

$$y(0) = 0, \quad y(n\Delta t) = \sum_{k=1}^n \omega_k(\Delta t), \quad n = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}\left(\frac{\gamma(Re^{i\varphi})}{\Delta t}\right) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Единственная аппроксимация, которая используется при выводе формулы (2), заключается в применении линейного многошагового метода решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Все остальные вычисления проводятся непосредственно. Многошаговый метод должен быть порядка точности  $p \geq 1$ , являясь строго нуль-устойчивым или  $A$ -устойчивым, а функция  $\bar{f}(s)$  ограничена в правой полуплоскости относительно прямой  $(c - i\infty, c + i\infty)$ , то есть:

$$|\bar{f}(s)| \leq K|s|^{-\mu} \text{ при } K < \infty, \mu > 0.$$

Если функция  $\bar{f}(s)$  аналитична и ограничена в области  $|\arg(s - c)| < \pi - \phi$ , где  $\phi < \pi/2$ , критерий устойчивости может быть ослаблен до  $A(\alpha)$ -устойчивости.

Для характеристической функции  $\gamma(z)$  имеем:

- функция  $\gamma(z)$  не должна содержать нулей и полюсов внутри замкнутого единичного круга ( $|z| \leq 1$ ), за исключением однократного нуля при  $|z| = 1$ ,
- $|\arg \gamma(z)| \leq \pi - \alpha$ , где  $|z| \leq 1$  при  $\alpha > \phi$ ,
- $\Delta t^{-1} \gamma(e^{-\Delta t}) = 1 + O(\Delta t^p)$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  при  $p \geq 1$ .

К примерам многошаговых методов относятся методы дифференцирования назад порядка  $p \leq 6$ . Для  $A$ -устойчивого метода дифференцирования назад второго порядка ( $\alpha = 90^\circ$ ) характеристическая функция имеет вид:  $\gamma(z) = 3/2 - 2z + z^2/2$ .

Вторая и последняя аппроксимация, которая используется в методе, – численное интегрирование с  $L$  равными шагами  $2\pi/L$  при определении значений  $\omega_n(\Delta t)$ :

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \overline{f} \left( \frac{\gamma (Re^{il(2\pi/L)})}{\Delta t} \right) e^{-inl(2\pi/L)}. \quad (3)$$

Если функция  $\overline{f}(s)$  в уравнении (3) вычисляется с некоторой погрешностью  $\varepsilon$ , выбор  $L = N$  и  $R^n = \sqrt{\varepsilon}$  определяет погрешность вычисления  $\omega_n$  порядка  $O(\sqrt{\varepsilon})$ .

### Модификация шагового метода на узлах схемы Рунге – Кутты

Рассмотрим метод Рунге – Кутты, записанный с помощью таблицы Бутчера:  $\frac{c|A^T}{b^T}$ ,  $A \in R^{m \times m}$ ,  $b, c \in R^m$ . Для него имеет место функция устойчивости [11]:  $R(z) = 1 + zb^T(1 - zA)^{-1}[1]$ , где  $[1] = (1, \dots, 1)^T$ .

Для корректной формулировки шаговой схемы должны быть выполнены следующие условия:

- 1) метод Рунге – Кутты должен быть  $A$ -устойчивым;
- 2)  $|R(z)| < 1$  при  $y \neq 0$ ;
- 3)  $R(\infty) = 0$ ;
- 4)  $\exists A^{-1}$ .

Для простоты полагаем, что  $b^T A^{-1} = (0, \dots, 0, 1)$ , тогда метод автоматически  $L$ -устойчив.

Используя формализованный метод Рунге – Кутты вместо линейного многошагового метода решения задачи Коши для дифференциального уравнения, получаем следующую характеристическую функцию:

$$\Delta(z) = A^{-1} - zA^{-1}[1]b^T A^{-1}.$$

Преобразуя интеграл (1), запишем [11]:

$$y_0 = 0, \quad y_n = b^T A^{-1} \sum_{k=1}^n \omega_k(\Delta t), \quad n = 1, \dots, N,$$

где

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \overline{f} \left( \frac{\Delta (Re^{il(2\pi/L)})}{\Delta t} \right) e^{-inl(2\pi/L)}.$$

В качестве схем метода Рунге – Кутты, удовлетворяющих сформулированным условиям, выберем схемы Радо и Лобатто [11].

### Численные результаты

Рассмотрим решение задачи о действии скачка давления на торец призматического тела длиной  $l$ . Отклик перемещений наблюдается в точке  $y$ . Параметры материала выбраны следующие:  $E = 2,11 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>;  $\nu = 0$ ;  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup> ( $c = 5184,5$  м/с). Пусть нагрузка  $F = 1$  Н/м<sup>2</sup>, а длина тела  $l = y = 3$  м. Выберем отрезок времени  $0,015$  с, захватывающий приблизительно 6,5 периода функции перемещения от времени. Число базовых узлов по частоте обозначим через  $L$ , число узлов по времени – через  $N$ .

На рис. 1а, б приведены графики действительной ( $\Re$ ) и мнимой ( $\Im$ ) частей изображения. Результаты обращения при  $L = N = 500$  представлены на рис. 2 (красная кривая соответствует традиционной формуле шагового метода обращения преобразования Лапласа, полученной на основе метода Эйлера; синяя – схеме Лобатто; зеленая – схеме Радо). Здесь и далее для сравнения приведено более точное решение, полученное на основе аналитической формулы (черная кривая). Видно, что ни одному

из методов не хватает взятых узлов для получения необходимой амплитуды решения. Однако следует отметить, что обе схемы семейства Рунге – Кутты дают лучшие результаты, чем традиционный метод. Аналогичные результаты для  $L=N=1000$  показаны на рис. 3 и для  $L=N=2000$  – на рис. 4.

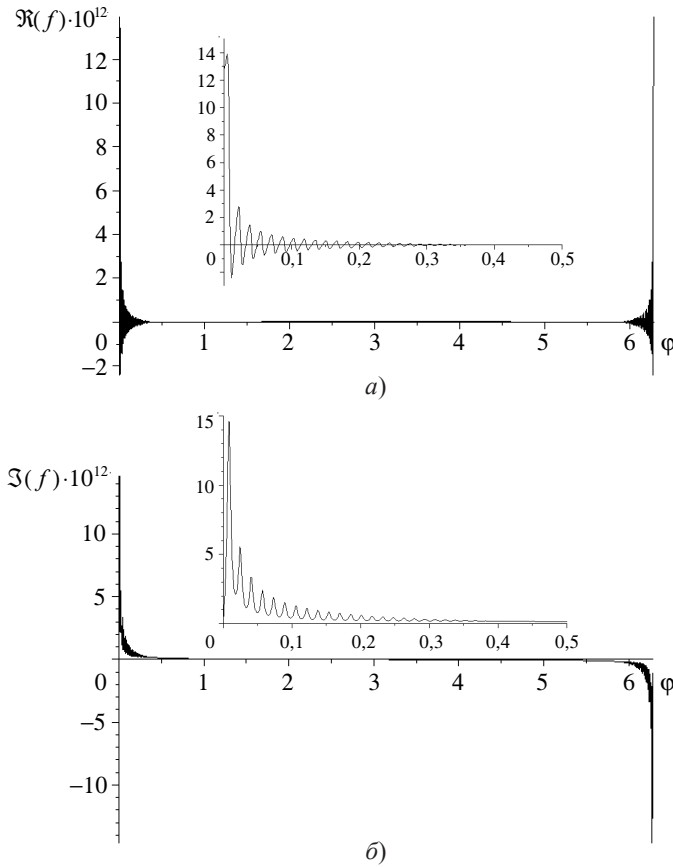


Рис. 1

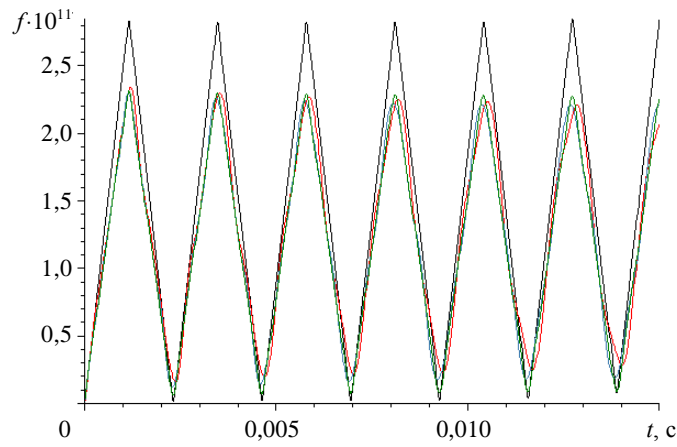


Рис. 2

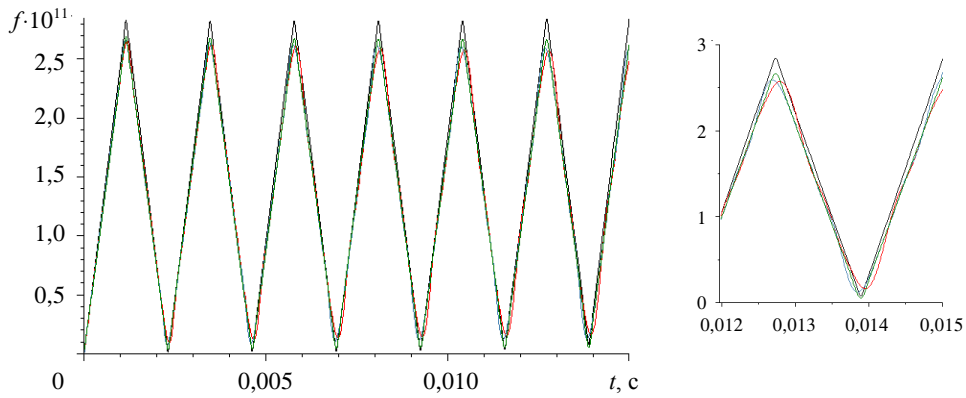


Рис. 3

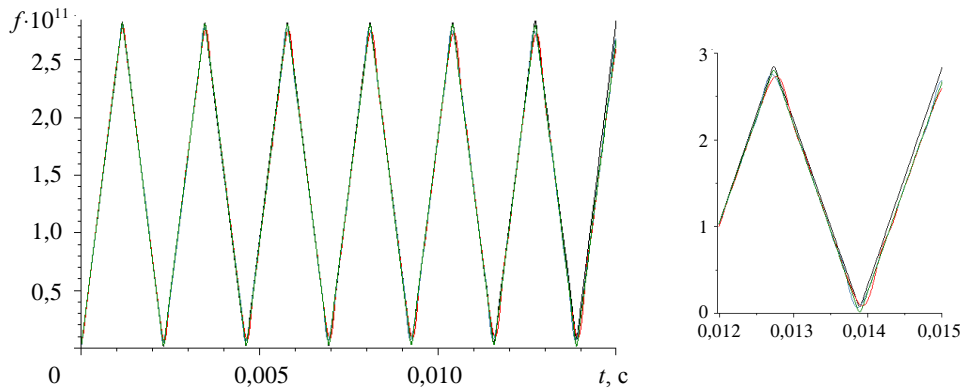


Рис. 4

Методы Рунге – Кутты используют дополнительные наборы опорных узлов в расчетах. Это улучшает качество результатов, но требует временных затрат на обработку  $\tilde{L}$  дополнительных узлов ( $\tilde{L} = L$  для рассматриваемых методов). На рис. 5–8 представлено сравнение результатов, полученных с помощью схемы Радо на  $L \times N$  узлах (зеленая кривая), с результатами, полученными с помощью традиционной формулы шагового метода на  $2L \times N$  узлах (красная кривая) и на  $\sqrt{2L} \times \sqrt{2N}$  узлах (синяя кривая).

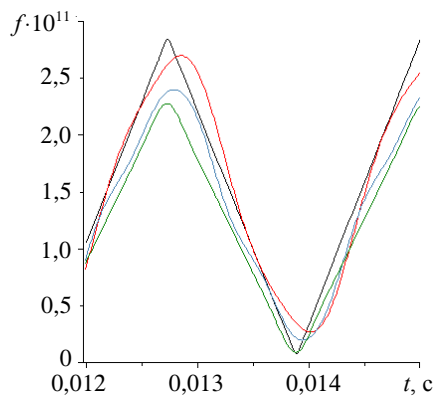


Рис. 5

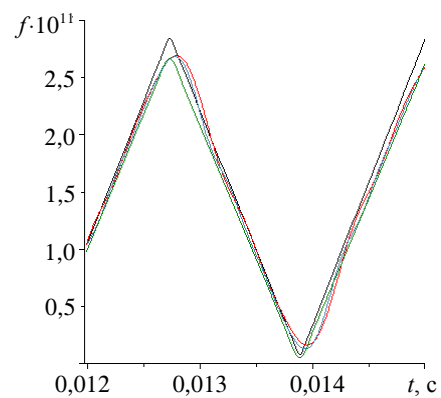


Рис. 6

Для рис. 5, 6 и 7 (8) принято  $L=N=500$ ,  $L=N=1000$  и  $L=N=2000$  соответственно. Как и ранее, везде черным цветом приведено более точное решение.

Рисунок 7 не полностью репрезентативен в отношении традиционного шагового метода на основе схемы Эйлера, теряющего устойчивость при  $L=N=2828$ , на рис. 8 приведен вид двух предпоследних пиков решения.

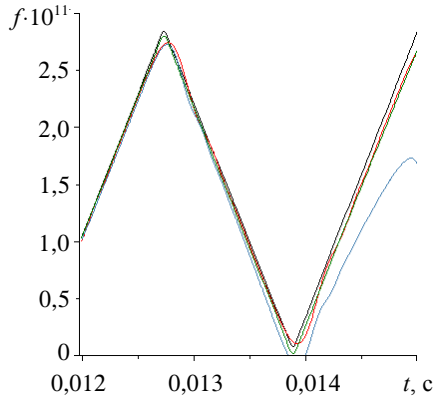


Рис. 7

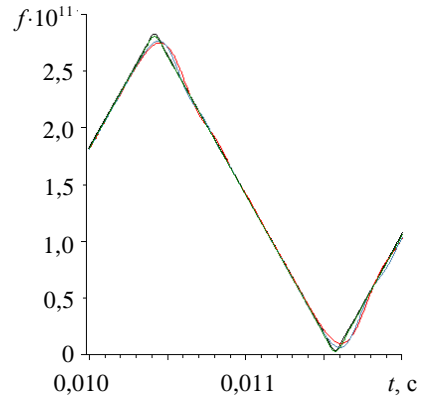


Рис. 8

На рис. 9 представлена эволюция результатов, полученных с помощью схемы Радо при увеличении числа узлов: красная кривая ( $L=N=500$ ), синяя кривая ( $L=N=1000$ ), зеленая кривая ( $L=N=2000$ ).

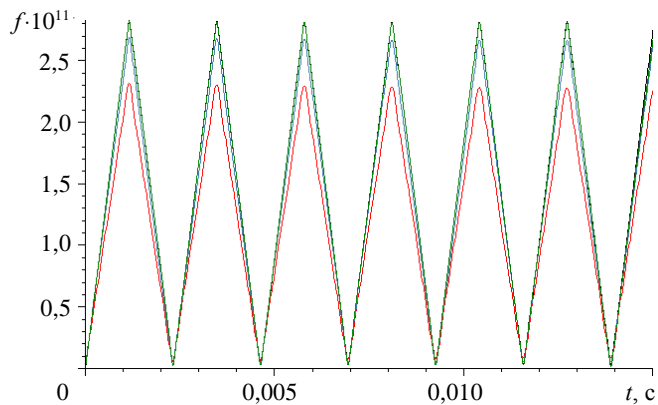


Рис. 9

Анализ представленных результатов показывает, что схема Радо независимо от числа узлов аппроксимации дает наименьший сдвиг по времени (запаздывание или опережение) и наилучшим образом приближает искомую функцию в целом. Схема Лобатто, несмотря на некоторое преимущество в приближении решения по сравнению с формулой шагового метода на основе метода Эйлера, дает худшую аппроксимацию, чем схема Радо. В целом схемы семейства Рунге–Кутты хорошо зарекомендовали себя в качестве основы для шагового метода обращения преобразования Лапласа, превосходя традиционный метод практически по всем показателям.

#### Список литературы

1. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. I // Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 129–425.

2. *Lubich C.* Convolution quadrature and discretized operational calculus. II // *Numerische Mathematik*. 1988. № 52. P. 413–425.
3. *Schanz M.* Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
4. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
5. *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. 295 с.
6. *Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю.* Развитие метода граничных элементов для решения трехмерных контактных нестационарных динамических задач теории упругости // *Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т.* 2007. Вып. 69. С. 125–136.
7. *Белов А.А.* Гранично-элементное моделирование динамики составных вязкоупругих тел на основе модифицированных методов квадратур сверток и Дурбина: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2008. 20 с.
8. Гранично-элементное моделирование на основе квадратур сверток динамического состояния составных упругих тел / А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук // *Вычислительная механика сплошных сред.* Пермь: Изд-во ИМСС УрО РАН, 2008. Т. 1, №3. С. 5–14.
9. *Аменицкий А.В.* Развитие методов граничных элементов для численного моделирования динамики трехмерных однородных пороупругих тел: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2010. 20 с.
10. *Banjai L.* Multistep and multistage convolution quadrature for the wave equation: Algorithms and experiments // *SIAM J. Sci. Comput.* 2010. 32. P. 2964–2994.
11. *Banjai L., Messner M., Schanz M.* Runge–Kutta convolution quadrature for the boundary element method // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2012. P. 90–101.

#### **TIME-STEP METHOD OF LAPLACE TRANSFORMATION INVERSION BASED ON THE RUNGE – KUTTA SCHEME NODES**

**L.A. Igumnov, Ya.Yu. Rataushko**

The problem of constructing time-step methods for numeric inversion of Laplace transformation, based on the original function integration theorem, is considered. Time steps choice is implemented by means of Runge – Kutta scheme for ordinary differential equations Cauchy problem, Runge – Kutta schemes being referenced to as coefficients from Butcher tableaux.

*Keywords:* Laplace transformation inversion, time-step method, Runge – Kutta schemes.