

УДК 539.4

**ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-
АРМИРОВАННОГО МЕТАЛЛОКОМПОЗИТА В РАМКАХ
МОДЕЛИ ПРАНДТЛЯ – РЕЙССА – ХИЛЛА ***

© 2013 г.

А.П. Янковский

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск*

lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 06.09.2013

На основе шаговой схемы интегрирования по времени разработана численно-аналитическая методика моделирования упругопластического деформирования пространственно-армированного металлокомпозитного тела с изотропно упрочняющимися фазовыми материалами, позволяющая в дискретные моменты времени рассматривать компоненты композиции как нелинейно-упругие с начальным напряженным состоянием. Линеаризация этих определяющих соотношений позволяет свести на каждой итерации задачу моделирования к соотношениям типа обобщенного закона Гука для анизотропного неоднородного тела с предварительным напряженным состоянием.

Ключевые слова: армирование пространственное, теория структурная, деформирование упругопластическое, упрочнение изотропное.

В настоящее время в инженерной практике все более активное применение находят композиционные материалы с пространственным расположением арматуры [1, 2], причем особое внимание уделяется металлокомпозитам или композициям с металлическим связующим. Целесообразность пространственного армирования определяется не только возможностью ликвидировать такой недостаток слоистых композитов, как опасность расслоения вследствие слабого сопротивления сдвигу и поперечному отрыву, но и возможностью локализовать в пределах нескольких пространственных ячеек распространение трещин. Этим резко повышается несущая способность материала в толстостенных конструкциях, особенно в зонах приложения локализованных нагрузок и концентраторов напряжений при нестационарных силовых воздействиях, характерных для современных технических устройств.

Известно, что при интенсивном нагружении металлокомпозитные конструкции могут работать в условиях неупругого деформирования [3], поэтому актуальной является проблема математического моделирования процессов пластичности в армированных металлокомпозитах. На сегодняшний день решение этой проблемы находится, по сути, в зачаточном состоянии. Так, в [4] рассмотрено упругопласти-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-01-00121-а).

ческое деформирование однонаправленно-армированных композитов, но такие виды армирования редко встречаются на практике (как правило, лишь в стержневых элементах конструкций). Модели упругопластического поведения (в рамках деформационной теории) перекрестно-армированных в плоскости металлокомпозитов предложены в [5, 6], а в [7] и др. была построена структурная модель армированного слоя на базе определяющих соотношений для идеально-жесткопластических сред. Некоторые простейшие модели неупругого деформирования волокнистых композитов при плоском напряженном состоянии были предложены в [8, 9]. В работе [10] структурная модель из [6] обобщена на случай пространственного армирования при учете реономных свойств сжимаемых фазовых материалов. При задании в [10] ядер ползучести равными нулю получается итерационная модель упругопластического поведения (в рамках теории деформационного типа) перекрестно-армированной среды, состоящей из разносопротивляющихся фазовых материалов.

Настоящее исследование посвящено построению численно-аналитической модели упругопластического поведения пространственно-армированного металло-

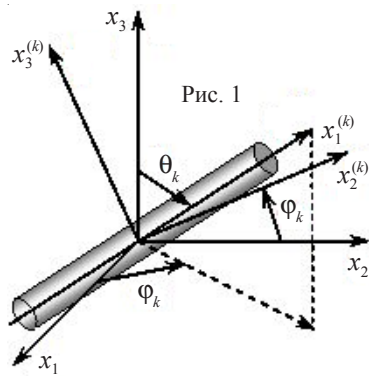


Рис. 1

композита на основе теории течения типа Прандтля – Рейсса – Хилла [11].

В декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 рассматривается металлокомпозитное тело, пространственно-армированное K семействами металлических проволок (волокон). Параметры армирования k -м семейством волокон определяются плотностью армирования ω_k и углами сферической системы координат θ_k, φ_k ($k = 1, 2, \dots, K$), задающих направление армирования (рис. 1).

Используя структурную модель композита с одномерным напряженным состоянием в волокнах, впервые предложенную в [5], в случае про-

странственного армирования получим следующие выражения для осредненных напряжений в композиции:

$$\bar{\sigma}_{ij} = (1 - \delta\Omega)\sigma_{ij} + \sum_{k=1}^K [\sigma_k - (1 - \delta)\sigma_{0k}] \omega_k l_{ki} l_{kj} \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

где

$$\Omega = \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad l_{k1} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{k2} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{k3} = \cos \theta_k \quad (1 \leq k \leq K); \quad (2)$$

δ – функция переключения, позволяющая выбрать вариант модели [12] (жесткий при $\delta = 0$ и мягкий при $\delta = 1$); σ_{ij} – напряжения в связующей матрице; σ_k – продольное напряжение в арматуре k -го семейства; σ_{0k} – одномерное напряжение в фиктивных волокнах из материала связующей матрицы, направленных по траекториям армирования k -го семейства [12].

В случае жесткого варианта модели из монолитного связующего (из которого гипотетически состоит конструкция) удаляется материал связующей матрицы вдоль траекторий армирования (фиктивные волокна, в которых напряженное состояние предполагается одноосным) и заменяется материалом реальных армирующих волокон со своим одноосным напряженным состоянием. Жесткий вариант целесообразно использовать, когда характеристики фазовых материалов близки (металло-

композиты); мягкий вариант, как более простой, целесообразно использовать, когда характеристики арматуры (например, жесткость) много больше соответствующих характеристик связующего (стекло-, боро-, углепластики и т.п.).

Так как в волокнах k -го семейства реализуется одномерное напряженное состояние σ_k , то в рамках модели типа Прандтля–Рейсса–Хилла для фазовых материалов записываем следующие определяющие соотношения [3, 5, 11, 13]:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij} &= 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij} + \lambda\delta_{ij}\sum_{l=1}^3\dot{\varepsilon}_{ll} - 9\alpha\mu^2\frac{s_{ij}}{\sigma_*^2(3\mu+H)}\sum_{l=1}^3\sum_{m=1}^3s_{lm}\dot{\varepsilon}_{lm} \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ \sigma_k &= f_k(\varepsilon_k), \quad \sigma_{0k} = f_0(\varepsilon_k) \quad (1 \leq k \leq K),\end{aligned}\tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \sigma_*^2 = \frac{3}{2}\sum_{l=1}^3\sum_{m=1}^3s_{lm}^2 = \Phi^2(q), \quad q = \int d\varepsilon_*^p, \\ (d\varepsilon_*^p)^2 &= \frac{2}{3}\sum_{l=1}^3\sum_{m=1}^3(d\varepsilon_{lm}^p)^2, \quad H = \frac{d\sigma_*}{d\varepsilon_*^p}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}\sum_{l=1}^3\sigma_{ll};\end{aligned}\tag{4}$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_* \geq \Phi(q) \text{ и } \sum_{l=1}^3\sum_{m=1}^3s_{lm}d\varepsilon_{lm} \geq 0, \\ 0, & \text{если } \sigma_* < \Phi(q) \text{ или } \sigma_* = \Phi(q) \text{ и } \sum_{l=1}^3\sum_{m=1}^3s_{lm}d\varepsilon_{lm} < 0; \end{cases}\tag{5}$$

$$\varepsilon_k = \sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3\varepsilon_{ij}l_{ki}l_{kj} \quad (1 \leq k \leq K);\tag{6}$$

E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала связующей матрицы; λ, μ – постоянные Ламе этого же материала; s_{ij} – компоненты девиатора напряжений в связующем; σ_* – интенсивность напряжений в связующем; H – модуль упрочнения связующего; $d\varepsilon_*^p$ – интенсивность приращений пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$; ε_{ij} – деформации армированного тела (в рамках используемой структурной модели эти деформации совпадают с деформациями в связующем); ε_k – осевая деформация в арматуре k -го семейства; q – параметр упрочнения материала связующей матрицы (параметр Одквиста); Φ – известная функция изотропного упрочнения связующего, зависящая от параметра Одквиста; f_0, f_k – известные функции, определяющие диаграмму растяжения-сжатия материалов связующей матрицы и арматуры k -го семейства (как при активном нагружении, так и при разгрузке); δ_{ij} – символ Кронекера; α – функция переключения, позволяющая учитывать процесс активного нагружения связующего (первая строка в (5)) или его разгрузку (вторая строка в (5)); точка означает частную производную по времени t (причем время может быть реальным или условным, под которым, например, может пониматься параметр нагружения).

Согласно используемой структурной модели (1), напряженное состояние в реальных и фиктивных волокнах предполагается одноосным. Такая особенность соотношений (1) моделирует неидеальную адгезию между арматурой и связующим, что часто наблюдается на практике при перекрестном армировании. Поэтому два последних равенства (3) можно представить аналогично первому соотношению в виде

$$\dot{\sigma}_k = \overline{G}_k(\varepsilon_k)\dot{\varepsilon}_k, \quad \dot{\sigma}_{0k} = \overline{G}_0(\varepsilon_k)\dot{\varepsilon}_k \quad (1 \leq k \leq K),$$

где

$$\overline{G}_k = \frac{df_k(\varepsilon_k)}{d\varepsilon_k}, \quad \overline{G}_0 = \frac{df_0(\varepsilon_k)}{d\varepsilon_k}$$

– касательные модули материалов арматуры k -го семейства и связующего, определяемые по диаграммам одноосного растяжения-сжатия соответствующих материалов. В силу одноосного напряженного состояния в волокнах последние равенства могут быть проинтегрированы по времени t и записаны в виде двух последних равенств (3), что более удобно с точки зрения дальнейших рассуждений.

В настоящей статье дискретизируем задачу по времени t . Предполагаем, что в момент времени t_n решение интересующей нас задачи уже известно. Используя (3) с учетом (4), (5), построим определяющие соотношения для фазовых материалов, содержащие только деформации и напряжения в следующий момент времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где τ_n – шаг по времени (возможно, переменный). Для этого введем в рассмотрение дискретные по времени функции пространственных переменных $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{0k}^n(\mathbf{x}) &= \sigma_{0k}(t_n, \mathbf{x}), \quad \sigma_k^n(\mathbf{x}) = \sigma_k(t_n, \mathbf{x}), \quad \varepsilon_k^n(\mathbf{x}) = \varepsilon_k(t_n, \mathbf{x}), \\ \varepsilon_{ij}^n(\mathbf{x}) &= \varepsilon_{ij}(t_n, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}(t_n, \mathbf{x}), \quad \sigma_*^n(\mathbf{x}) = \sigma_*(t_n, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$H(\mathbf{x}) = H(t_n, \mathbf{x}), \quad s_{ij}^n(\mathbf{x}) = s_{ij}(t_n, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 1 \leq k \leq K,$$

которые, по предположению, в момент времени t_n уже известны.

Интегрируя первые соотношения (3) численно на интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ абсолютно устойчивым методом трапеций, имеющим второй порядок точности по t_n [14], получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{n+1} - \sigma_{ij}^n &= 2\mu \left(\varepsilon_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{ij}^n \right) + \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \left(\varepsilon_{ll}^{n+1} - \varepsilon_{ll}^n \right) - \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left(\varepsilon_{lm}^{n+1} - \varepsilon_{lm}^n \right) \times \\ &\times \left[\left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} s_{lm}^{n+1} + \left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H \right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \right], \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{n+1} &= 2\mu \varepsilon_{ij}^{n+1} + \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^{n+1} - \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left[\left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} s_{lm}^{n+1} + \right. \\ &+ \left. \left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H \right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \right] \varepsilon_{lm}^{n+1} + \sigma_{ij}^n - 2\mu \varepsilon_{ij}^n - \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^n + \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left[\left(\sigma_*^n \right)^{-2} \times \right. \\ &\times \left. \left(3\mu + H \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} s_{lm}^{n+1} + \left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H \right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \right] \varepsilon_{lm}^n, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношения (9) с учетом (4) по форме совпадают с законом нелинейно-упругого

деформирования материала связующей матрицы с «начальным напряженным состоянием».

Линеаризуем соотношения (9), используя метод переменных параметров упругости [15]. Пусть в момент времени t_{n+1} на некоторой r -й итерации известны приближения напряжений в связующем $\sigma_{ij}^{(r)}$ (согласно (4), известными будут и r -е приближения функций $\sigma_*^{(r)}$, $s_{ij}^{(r)}$, $H^{(r)}$). Для следующего же $(r+1)$ -го приближения деформаций $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ и напряжений $\sigma_{ij}^{(p)}$ будут справедливы линейные соотношения (см. (9)):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(p)} = & 2\mu \varepsilon_{ij}^{(p)} + \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^{(p)} - \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} s_{lm}^{(r)} + \right. \\ & \left. + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} s_{lm}^{(r)} \right] \varepsilon_{lm}^{(p)} + \sigma_{0ij}^{(p)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad p = r+1, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{0ij}^{(r)} = & \sigma_{ij}^{(r)} - 2\mu \varepsilon_{ij}^{(r)} - \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^{(r)} + \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} s_{lm}^{(r)} + \right. \\ & \left. + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} s_{lm}^{(r)} \right] \varepsilon_{lm}^{(r)}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (11) \end{aligned}$$

Равенства (10) формально совпадают с определяющими соотношениями линейной теории упругости с предварительным напряженным состоянием, задаваемым функциями (11).

Используя метод секущего модуля [13], линеаризуем и последние соотношения в (3), которые справедливы в любой момент времени t :

$$\sigma_k^{(p)} = g_k \left(\varepsilon_k^{(r)} \right) \varepsilon_k^{(p)}, \quad \sigma_{0k}^{(p)} = g_0 \left(\varepsilon_k^{(r)} \right) \varepsilon_k^{(p)}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad p = r+1, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где

$$g_k(\varepsilon_k) = \frac{f_k(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k}, \quad g_0(\varepsilon_k) = \frac{f_0(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (13)$$

В рамках используемой структурной модели p -е приближения для деформаций в арматуре k -го семейства $\varepsilon_k^{(p)}$ и в связующем $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ в момент времени t_{n+1} удовлетворяют равенствам, аналогичным (6).

Подставим (10), (12) в соотношения (1) и учтем равенства (2), (6); тогда после приведения подобных слагаемых получим выражения для p -х приближений осредненных напряжений в композиции в момент времени t_{n+1} :

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(p)} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 C_{ijlm}^{(r)} \varepsilon_{lm}^{(p)} + \bar{\sigma}_{0ij}^{(p)}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad p = r+1, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где

$$C_{ijlm}^{(r)} = (1 - \delta\Omega) \left\{ 2\mu\delta_{il}\delta_{jm} + \lambda\delta_{ij}\delta_{lm} - \frac{9}{2}\varepsilon\mu^2 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} s_{lm}^{(r)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sigma_* \right)^{-2} \left(3\mu + H \right)^{-1} s_{ij} s_{lm} \right] \right\} + \sum_{k=1}^K \left[g_k \left(\varepsilon_k^{(r)} \right) - (1 - \delta)g_0 \left(\varepsilon_k^{(r)} \right) \right] \omega_k l_{ki} l_{kj} l_{kl} l_{km}, \\ \bar{\sigma}_{0ij}^{(r)} = (1 - \delta\Omega) \sigma_{0ij}^{(r)}, \quad i, j, l, m = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Напряжения $\bar{\sigma}_{0ij}^{(r)}$ ($i, j = \overline{1, 3}$), согласно (15), (11), известны на $(r + 1)$ -й итерации при $t = t_{n+1}$, поэтому их можно трактовать как «начальные напряжения» в композиции на этой итерации в рассматриваемый момент времени t_{n+1} .

Определяющие соотношения (14) линейны и формально совпадают с обобщенным законом Гука для анизотропного неоднородного тела с начальным напряженным состоянием, характеризуемым функциями $\bar{\sigma}_{0ij}^{(r)}$.

Решив соответствующую краевую задачу для композитного тела [11, 13] в момент времени t_{n+1} с использованием соотношений (14), (15), (2), определим p -е приближения для осредненных напряжений $\bar{\sigma}_{ij}^{(p)}$ и деформаций $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ в металлокомпозите. Затем на основании (6) сможем вычислить новые приближения деформаций вдоль траекторий армирования k -го семейства $\varepsilon_k^{(p)}$. Зная $\varepsilon_{ij}^{(p)}$, $\varepsilon_k^{(p)}$, по формулам (10), (12) с учетом (11), (13) определим p -е приближения напряжений в компонентах композиции $\sigma_{ij}^{(p)}$, $\sigma_k^{(p)}$, $\sigma_{0k}^{(p)}$. По известным приближениям напряжений в связующем $\sigma_{ij}^{(p)}$ и деформаций $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ на основании соотношений (4), (5) можем вычислить p -е приближения функций $\sigma_*^{(p)}$, $s_{ij}^{(p)}$, $H^{(p)}$, $\alpha^{(p)}$ (причем в (5) $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \varepsilon_{ij}^{(p)} - \varepsilon_{ij}$). Далее, по формулам (15), (2) можем определить следующие приближения для коэффициентов $C_{ijlm}^{(p)}$ и $\bar{\sigma}_{0ij}^{(p)}$ в соотношениях (14), где нужно индекс r заменить на p , а p – на $p + 1$ ($p = r + 1$). Затем описанный итерационный процесс повторяется для следующего значения r до тех пор, пока не сойдется с требуемой точностью.

Если в момент времени t_{n+1} итерационный процесс сошелся с требуемой точностью, то есть в каждой точке армированного металлокомпозита определены функции (8) при замене индекса n на $n + 1$, то далее по описанной выше схеме можно получить решение рассматриваемой задачи об упругопластическом деформировании композитного тела в следующий момент времени t_{n+2} и т.д. Вопрос о сходимости этого итерационного процесса пока остается открытым.

В настоящей статье для численного интегрирования по времени первых определяющих соотношений (3) использовался абсолютно устойчивый двустадийный метод Лобатто ША (метод трапеций), имеющий второй порядок точности по τ_n (см. (7)) и являющийся одним из неявных методов Рунге – Кутты [14]. В силу нелиней-

ности уравнений (3) неявность схемы приводит к необходимости применения итерационной процедуры для линеаризации последних равенств (3) и соотношений (9).

Традиционно для численного интегрирования первых соотношений (3) используют явный метод Эйлера [3, 13, 15], который в каждый момент времени t_{n+1} , в отличие от (9), приводит к равенствам:

$$\sigma_{ij}^{n+1} = 2\mu \varepsilon_{ij}^{n+1} + \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^{n+1} - 9\alpha\mu^2 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left(\sigma_*^n\right)^{-2} \left(3\mu + H^n\right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \varepsilon_{lm}^{n+1} + \sigma_{0ij}^{n+1},$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad (16)$$

где

$$\sigma_{0ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n - 2\mu \varepsilon_{ij}^n - \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^n + 9\alpha\mu^2 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left(\sigma_*^n\right)^{-2} \left(3\mu + H^n\right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \varepsilon_{lm}^n. \quad (17)$$

Согласно равенствам (8), в момент времени t_{n+1} правые части в (17) – известные функции пространственных переменных x_1, x_2, x_3 , то есть σ_{0ij}^{n+1} в (16) можно трактовать как известные при $t = t_{n+1}$ «начальные напряжения» в связующем материале. В отличие от (9) соотношения (16) линейны относительно неизвестных функций $\varepsilon_{ij}^{n+1}, \sigma_{ij}^{n+1}$, поэтому при использовании равенств (16), (17) не требуется на каждом шаге по времени t_{n+1} применять итерационную процедуру типа (10), (11).

Повторяя выкладки (12)–(15) при использовании соотношений (16), (17), получим другой вариант численно-аналитического моделирования упругопластического поведения армированного металлокомпозиата, требующий привлечения лишь итерационной процедуры (12), (13), основанной на идее метода секущего модуля. (Достаточные условия сходимости этого метода сформулированы на стр. 199 в [16].)

Согласно разработанным численно-аналитическим моделям, для начала расчета упругопластического поведения армированного металлокомпозиата в начальный момент времени t_0 необходимо знать значения всех функций, указанных в (8) при $n = 0$. Эти функции определяются из общеизвестных начальных условий [11, 13], в качестве которых, как правило, используют условия естественного состояния композитного тела.

Известно, что явный метод Эйлера, приводящий к соотношениям (16), (17), является условно устойчивым методом Рунге – Кутты первого порядка по τ_n [14]. В силу его условной устойчивости и существенной нелинейности равенств (3) невозможно в общем случае заранее предсказать величину шага по времени τ_n , при которой этот метод гарантирует устойчивость численных расчетов.

Многолетний расчетный опыт показывает, что в задачах, в которых исследуется упругопластическое динамическое поведение конструкций под действием ударных нагрузок в короткий период времени, соответствующий переходной фазе процесса, вполне достаточно использовать явную схему Эйлера [15, 17] (то есть соотношения (16), (17)).

В задачах же длительного динамического или квазистатического нагружения, в которых требуется выбор достаточно большого шага по времени (например, в [18] для решения задач с учетом вязкого поведения материала конструкции в случае ее длительного нагружения рекомендуется шаг по времени выбирать порядка суток), по-видимому, более целесообразно использовать хотя и неявную, но абсолютно

устойчивую схему Лобатто ША (имеющую при этом точность на порядок большую, чем явный метод Эйлера), несмотря на то, что она приводит к необходимости применения итерационной процедуры (10)–(12) на каждом шаге по времени. Решение, построенное на основе соотношений (16), (17), может быть использовано в качестве начального приближения ($r = 0$) для реализации итерационного процесса (10), (11). Более того, если в качестве начального приближения в момент времени t_{n+1} выбрать уже известное решение в предыдущий момент времени t_n (см. (8)), то на основании (10), (11) в качестве первого приближения ($r = 0, p = 1$) получим соотношения (16), (17).

Список литературы

1. *Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А.* Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
2. A new generation of 3D woven fabric performs and composites / М.Н. Mohamed, А.Е. Bogdanovich, L.C. Dickinson, J.N. Singletary, R.R. Lienhart // *SAMPE J.* 2001. V. 37, No 3. P. 3–17.
3. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Физматгиз, 1966. 752 с.
4. *Каримбаев Т.Д., Мыктыбеков Б.М., Панова И.М.* Математические модели нелинейного деформирования однонаправленно-армированных композиционных материалов // *Труды ЦИАМ.* М.: Изд-во ЦИАМ, 2005. № 1334. 160 с.
5. *Немировский Ю.В.* Об упруго-пластическом поведении армированного слоя // *ПМТФ.* 1969. № 6. С. 81–89.
6. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Структурная модель механики металлокомпози- тов // *Проблемы и достижения прикладной математики и механики: к 70-летию академика В.М. Фомина: Сб. науч. тр.* Новосибирск: Параллель, 2010. С. 98–103.
7. *Nemirovsky Yu. V.* Yield surfaces for reinforced concrete axis-symmetrical plates and shells // *Archiwum inzynierii ladowej.* 1974. T. XX, No 4. P. 575–590.
8. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
9. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопrotивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 571 с.
10. *Янковский А.П.* Моделирование механического поведения композитов с пространственной структурой армирования из нелинейно-наследственных материалов // *Конструкции из композиционных материалов.* 2012. № 2. С. 12–25.
11. *Зубчанинов В.Г.* Математическая теория пластичности. Тверь: Изд-во ТГТУ, 2002. 300 с.
12. *Немировский Ю.В.* Уравнения изгиба и устойчивости армированных оболочек и пластин из вязкоупругого материала // *Динамика сплошной среды (Институт гидродинамики СО РАН СССР).* 1970. Вып. 4. С. 50–63.
13. *Прикладная теория пластичности: Учеб. пособие / К.М. Иванов и др.; Под ред. К.М. Иванова.* СПб.: Политехника, 2009. 375 с.
14. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
15. *Хажинский Г.М.* Модели деформирования и разрушения металлов. М: Научный мир, 2011. 231 с.
16. *Ильюшин А.А.* Труды. Т. 3. Теория термовязкоупругости / Составители: Е.А. Ильюшина, В.Г. Тунгускова. М.: Физматлит, 2007. 288 с.
17. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
18. *Карпов В.В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. 288 с.

**THE CONSTRUCTION OF THE DEFINING EQUATIONS OF ELASTIC–PLASTIC
BEHAVIOR OF SPATIALLY-REINFORCED METAL–COMPOSITE
IN THE FRAMEWORK OF THE PRANDTL – REUSS – HILL MODEL**

A.P. Yankovskii

On the basis of the steps-in-time algorithm numerical-analytical method is developed for modeling of elastic-plastic deformation of space-reinforced metal-composite solid with isotropic hardening phase materials. The method allows considering the components of the composition at discrete points in time as nonlinear-elastic with the initial strained state. At each iteration, linearization of these determining equations allows the problem of modeling to reduce to the relations of the type of the generalized Hooke law for inhomogeneous anisotropic solid with pre-stressed state.

Keywords: space reinforcement, structural theory, elastic-plastic deformation, isotropic hardening.