

УДК 539.3

**ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ВОЛН НА УПРУГОМ,  
ПОРИСТО- И ВЯЗКОУПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ\***

© 2013 г.

**Л.А. Игумнов<sup>1</sup>, А.С. Оконечников<sup>2</sup>,  
Д.В. Тарлаковский<sup>2</sup>, А.А. Белов<sup>1</sup>**<sup>1</sup>НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского<sup>2</sup>Московский авиационный институт

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 10.10.2012

Рассматриваются в трехмерных постановках краевые динамические задачи для упругого, вязкоупругого, пористо-упругого полупространств. Граница может быть одно- и двухсвязной и состоит из дневной плоскости и поверхности сферической или кубической полости, заглубленной в полупространство. Решения в пористо-упругих постановках строятся в рамках полной сжимаемой модели Био и оцениваются по решениям для дренированных и недренированных моделей материала. Для оценки влияния вязкости на волновые отклики используется модель Кельвина–Фойгта. Применяется прямая постановка метода граничных интегральных уравнений.

*Ключевые слова:* полупространство, граничный элемент, полость, пористо-упругость, вязкоупругость, упругость.

**1. Математическая модель и метод решения**

Рассматривается однородное тело  $\Omega \in R^3$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ . Предполагаем, что  $\Omega$  является изотропным упругим, вязко- или пористо-упругим телом, для которого:  $\rho$  – плотность материала,  $\lambda$  и  $\mu$  – константы или функции Ламе материала. Динамическое состояние упругих или вязкоупругих тел  $\Omega$  в изображениях по Лапласу  $L_{t \rightarrow s}(\cdot)$  с параметром  $s$  описывается системой дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\mu \Delta u(x, s) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u(x, s) = \rho s^2 \ddot{u}(x, s). \quad (1)$$

В уравнении (1)  $u(x, t) = L_{t \rightarrow s}^{-1}(u(x, s))$  – вектор перемещений точки.

Изображение вектора напряжений  $t_n(x, t) = L_{t \rightarrow s}^{-1}(t_n(x, s))$  в точке  $x$  на элементарной площадке с единичной нормалью  $n(x)$  имеет вид:

$$t_n(x, s) = n(x) \lambda \operatorname{div} u(x, s) + 2\mu \frac{\partial u(x, s)}{\partial n(x)} + \mu [n(x) \times \operatorname{rot} u(x, s)].$$

\* Исследование выполнено при поддержке Министерством образования и науки РФ, соглашение 14.В37.21.2019 «Проблемы динамического состояния сложных сред и конструкций».

Если  $x \in \Gamma$ , то под  $n(x)$  будем понимать единичный вектор внешней (по отношению к  $\Omega$ ) нормали к границе  $\Gamma$ .

Для вязкоупругой постановки используется классическая модель Кельвина – Фойгта с параметром вязкости  $\beta_\varepsilon$  [1, 2] и условием пропорциональности функций ползучести [2, 3].

Система дифференциальных уравнений в преобразованиях Лапласа (параметр  $s$ ) для смещения  $\hat{u}_i$  и порового давления  $\hat{p}$  имеет следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} \mu \hat{u}_{i,jj} + \left( K + \frac{1}{3} \mu \right) \hat{u}_{j,ij} - (\alpha - \beta) \hat{p}_{,i} - s^2 (\rho - \beta \rho_f) \hat{u}_i &= -\hat{F}_i, \\ \frac{\beta}{s \rho_f} \hat{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{R} \hat{p} - (\alpha - \beta) s \hat{u}_{i,i} &= -\hat{a}, \\ \beta &= \frac{k \rho_f \phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 k (\rho_a + \phi \rho_f)}, \end{aligned}$$

где  $\mu, K$  – константы упругости;  $\phi$  – пористость;  $k$  – проницаемость;  $\alpha$  – эффективный коэффициент напряжений;  $\rho, \rho_a, \rho_f$  – пористости скелета, присоединенной массы и жидкой среды;  $\hat{F}_i, \hat{a}$  – плотности источников.

Будем рассматривать следующие типы граничных условий для  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} u_l(x, s) = f_l(x, s), \quad u_4(x, s) = p(x, s) = f_4(x, s), \quad x \in \Gamma^u, \\ t_l(x, s) = g_l(x, s), \quad t_4(x, s) = q(x, s) = g_4(x, s), \quad x \in \Gamma^\sigma, \\ l = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Gamma^u$  и  $\Gamma^\sigma$  – части границы  $\Gamma$  тела  $\Omega$ , по которым заданы соответственно обобщенные перемещения и обобщенные поверхностные силы.

Интегральное представление прямого подхода записывается в виде [5–7]:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_j \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^s & -\hat{P}_j^s \\ \hat{U}_i^f & -\hat{P}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_i \\ \hat{q} \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^s & -\hat{Q}_j^s \\ \hat{T}_i^f & -\hat{Q}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p} \end{bmatrix} d\Gamma,$$

где

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^s & -\hat{P}_j^s \\ \hat{U}_i^f & -\hat{P}^f \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^s & -\hat{Q}_j^s \\ \hat{T}_i^f & -\hat{Q}^f \end{bmatrix}$$

– матрицы фундаментальных и сингулярных решений систем уравнений.

Если рассматривается упругая или вязкоупругая постановка, то  $u_4 = p = 0, t_4 = q = 0$ .

Вектор перемещений во внутренних точках области связан с граничными значениями перемещений и усилий следующим образом:

$$\begin{aligned} u_l(x, s) = \int_{\Gamma_k} U_{ij}^s(x, y, s) t_j(y, s) d_y S - \int_{\Gamma_k} T_{ij}^s(x, y, s) u_j(y, s) d_y S, \\ l = \overline{1, 2, 3}, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Здесь  $U_{ij}$  и  $T_{ij}$  – соответственно компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений уравнения (1).

Итоговая система граничных интегральных уравнений (ГИУ) имеет вид:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_{ij}(y) & 0 \\ 0 & c(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(s, x) \\ p(s, x) \end{bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{ij}^s(s, y, x) & -Q_j^s(s, y, x) \\ T_i^f(s, y, x) & -Q^f(s, y, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(s, x) \\ p(s, x) \end{bmatrix} d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{ij}^s(s, y, x) & -P_j^s(s, y, x) \\ U_i^f(s, y, x) & -P^f(s, y, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i(s, x) \\ q(s, x) \end{bmatrix} d\Gamma. \end{aligned}$$

Для численного обращения интегрального преобразования Лапласа будем использовать алгоритм, предложенный Дурбином.

## 2. Гранично-элементная дискретизация

Ядра ГИУ допускают выделение особенностей [8]. Чтобы ввести гранично-элементную (ГЭ) дискретизацию, рассмотрим регуляризованное ГИУ [3]. Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности на граничные элементы. В качестве функций формы выбраны квадратичные полиномы интерполяции. Неизвестные граничные поля интегрируются через узловые значения в интерполяционных узлах. Для аппроксимации граничных перемещений применяются билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил – постоянные элементы.

Для получения дискретного аналога ГИУ применяется метод коллокации. В качестве узлов коллокации выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций.

## 3. Численные результаты

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы  $P(t) = t^0 f(t)$ ,  $t^0 = -1$  Н/м<sup>2</sup> на площади  $S = 1$  м<sup>2</sup> дневной поверхности однородного полупространства с полостью и без полости. Исследуем два варианта геометрии полости – кубическую и сферическую. Расстояние от центра полости (сферической и кубической с ребром 10 м) до дневной поверхности  $h = 7,5$  м, радиус сферической полости  $R = 5$  м. В качестве закона изменения приложенной нагрузки возьмем функцию Хэвисайда  $f(t) = H(t)$ . Гранично-элементная сетка строится с учетом двух плоскостей симметрии. Четверть сетки содержит для полупространства 370 элементов и 413 точек, для полости – 150 элементов и 171 точку.

Для пористо-упругого случая рассмотрим три вида задач: дневная поверхность полупространства свободная и проницаемая, граница полости свободная и непроницаемая; дневная поверхность полупространства и граница полости свободны и непроницаемы; дневная поверхность полупространства свободная и непроницаемая, а граница полости свободная и проницаемая. Исследуются перемещения на поверхности полупространства на расстоянии 15 м от границы действия силы, а также в точках полости на пересечении плоскостей симметрии.

В качестве пористо-упругого материала возьмем скальную породу с параметрами [8]:  $K = 2,1 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu = 9,8 \cdot 10^7$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 1884$  кг/м<sup>3</sup>,  $\phi = 0,48$ ,  $K_s = 1,1 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $K_f = 3,3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $k = 3,55 \cdot 10^{-9}$  м<sup>4</sup>/(Н·с).

На рис. 1 приведен график перемещения для случая, когда дневная поверхность полупространства свободная и проницаемая, а граница полости свободная и непроницаемая. Для рис. 1–5 введены обозначения:  $l$  – полупространство без полости,

2 – полупространство со сферической полостью, 3 – полупространство с кубической полостью.

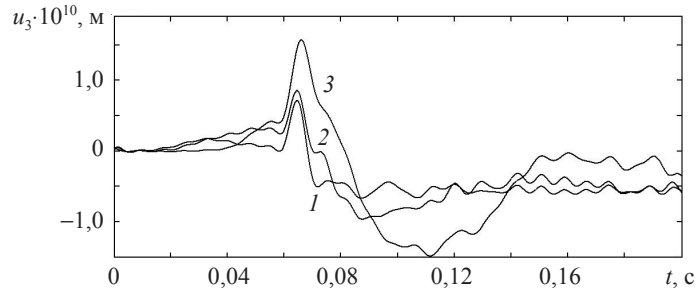


Рис. 1

На рис. 2 приведен график перемещения для случая, когда дневная поверхность полупространства и граница полости свободны и непроницаемы.

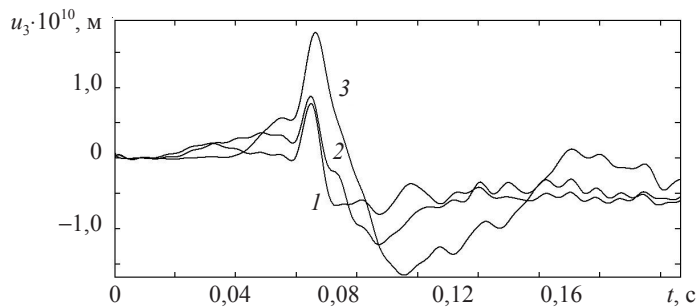


Рис. 2

На рис. 3 приведен график перемещения для случая, когда дневная поверхность полупространства свободная и непроницаемая, граница полости свободная и проницаемая.

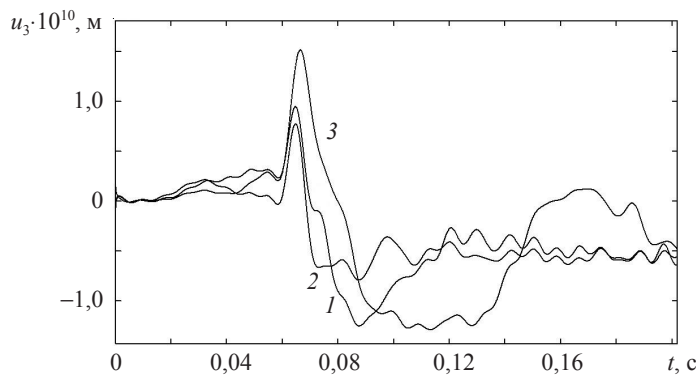


Рис. 3

Для оценки пористо-упругих решений рассмотрим постановки задач для упругого полупространства. На рис. 4 приведены графики перемещения во времени в исследуемой точке для дренированной модели материала, а на рис. 5 – для недренированной модели материала.

Оценить влияние вязкости на соответствующие отклики перемещений можно по рис. 6–8, где приведены перемещения во времени в исследуемой точке для дре-

нированной модели, когда материал удовлетворяет модели Кельвина–Фойгта при различных значениях параметра вязкости.

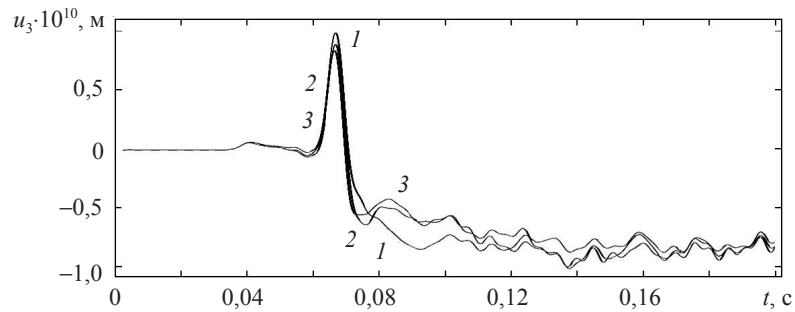


Рис. 4

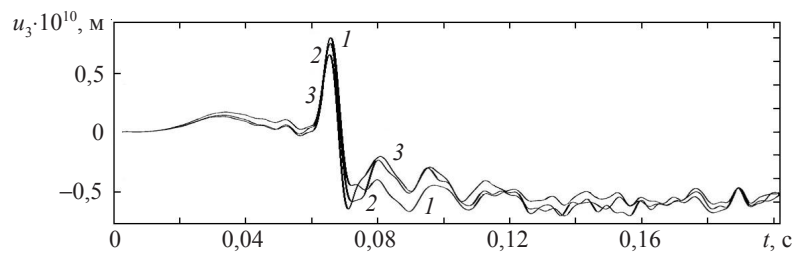


Рис. 5

На рис. 6 представлены графики откликов перемещений для полупространства без полости, на рис. 7 – для полупространства со сферической полостью, на рис. 8 – для полупространства с кубической полостью. Для рис. 6–8 введены обозначения: 1 – решение для дренированной модели; вязкоупругие решения для модели Кельвина–Фойгта: 2 – при  $\beta_\epsilon = 1000$ , 3 – при  $\beta_\epsilon = 100$ , 4 – при  $\beta_\epsilon = 10$ .

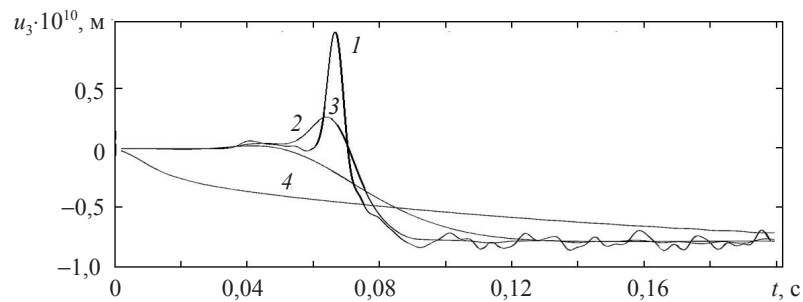


Рис. 6

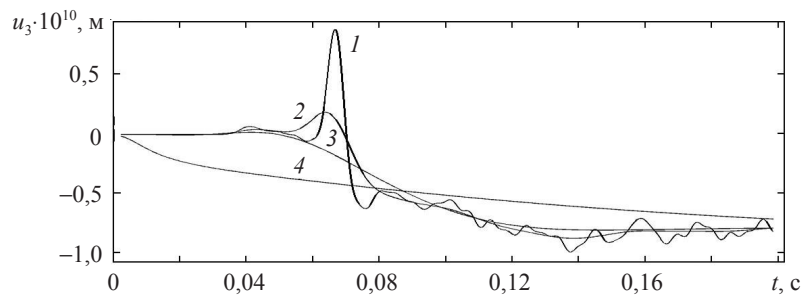


Рис. 7

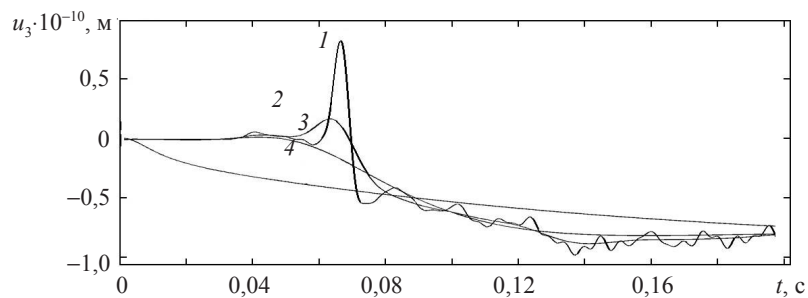


Рис. 8

Проведенные исследования подтверждают важность построения пористо-упругих решений. Амплитуды откликов поверхностных волн Рэлея, полученные на основе дренированной и недренированной моделей, дают заниженный результат, однако в квазистатических оценках достаточно решений, получаемых по таким моделям.

Работа выполнена при частичном финансировании ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009–2013 годы (проекты №14.740.11.0872, 14.В37.21.1249, 14.В37.21.1137), Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и РФФИ (гранты 12-01-00698, 12-08-00984, 13-08-00658).

#### Список литературы

1. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
2. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанс. ун-та, 1986. 295 с.
3. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
4. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. P. 168–191.
5. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости / А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2009. Вып. 71. С. 164–171.
6. Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости / А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин, С.Ю. Литвинчук // Труды МАИ: Электрон. ж. 2010. Вып. 40. С. 1–20.
7. Игумнов Л.А., Карелин И.С., Петров А.Н. Гранично-элементное исследование влияния коэффициента проницаемости на динамический отклик в составном пороупругом теле // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2011. Вып. 73. С. 98–104.
8. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.

**BOUNDARY-ELEMENT ANALYSIS OF WAVES OVER ELASTIC,  
PORO- AND VISCOELASTIC HALF-SPACES**

**L.A. Igumnov, A.S. Okonechnikov, D.V. Tarlakovsky, A.A. Belov**

Dynamic boundary-value problems for elastic, viscoelastic and poroelastic half-spaces in 3D formulations are considered. The boundary can have single or double coupling and consists of a daily plane and the surface of a spherical or a cubic cavity submerged into a half-space. Solutions in poroelastic formulations are constructed in the frame of complete Biot's compressible model and are evaluated based on the solutions for drained and non-drained material models. Kelvin – Foigt model is used to assess the effect of viscosity on wave responses. The direct formulation of the boundary integral equation method is applied.

*Keywords:* half-space, boundary element, cavity, poroelasticity, viscoelasticity, elasticity.