УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПОРИСТО-УПРУГИХ ВОЛН*

© 2013 г. **Л.А. Игумнов[1], И.С. Карелин[1], А.Н. Петров[1], А.Е. Петров[2]**

[1]*НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского*
[2]*Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского*

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 10.04.2013

На основе гранично-элементного подхода моделируются поверхностные волны пористо-упругого полупространства. Исследование проводилось в рамках модели Био с четырьмя базовыми функциями описания поведения среды – это перемещения упругого скелета и поровое давление. Пороупругие решения оцениваются решениями для дренированной и недренированной моделей сред.

Ключевые слова: поверхностные волны, пористо-упругое полупространство, граничный элемент.

Для пористо-упругого тела поверхностные волны (волны Рэлея, Лява и т.д.) представляют бо́льший интерес, чем для упругого тела, так как из-за эффекта медленной волны расширяется разнообразие проявления поверхностных волн. В настоящей работе представлен гранично-элементный подход для исследования поведения поверхностных пористо-упругих волн.

1. Математическая модель

Система дифференциальных уравнений в преобразованиях Лапласа (параметр s) для смещения u_i и порового давления p имеет следующий вид [1–3]:

$$Gu_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)u_{j,ij} - (\alpha - \beta)\, p_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\, u_i = 0,$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f} p_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{R} p - (\alpha - \beta)\, s u_{i,i} = 0,$$

$$\beta = \frac{k\rho_f \phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 k(\rho_a + \phi\rho_f)},$$

* Работа выполнена при частичном финансировании ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009–2013 годы (ГК 14.740.11.0872, соглашения 14.B37.21.1249, 14.B37.21.1137), Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и при поддержке РФФИ (гранты 12-01-00698-а, 12-08-00984-а, 12-08-31572, 13-08-00658).

где G, K – константы упругости; ϕ – пористость; k – проницаемость; α – эффективный коэффициент напряжений; ρ, ρ_a, ρ_f – пористости скелета, присоединенной массы и жидкой среды.

Систему уравнений запишем в символичной матричной форме [3]:

$$B^*(\partial)\upsilon = 0, \quad \upsilon = [u, p]^T,$$

где

$$B^* = \begin{bmatrix} A + B\partial_{11} & B\partial_{12} & B\partial_{13} & sC\partial_1 \\ B\partial_{12} & A + B\partial_{22} & B\partial_{23} & sC\partial_2 \\ B\partial_{13} & B\partial_{23} & A + B\partial_{33} & sC\partial_3 \\ C\partial_1 & C\partial_2 & C\partial_3 & D \end{bmatrix},$$

$$A = G\nabla^2 - s^2(\rho - \beta\rho_f), \quad B = K + \frac{1}{3}G, \quad C = \alpha - \beta, \quad D = \frac{\beta}{s\rho_f}\nabla^2 - \frac{\phi^2 s}{R},$$

R – параметр Био.

Фундаментальное решение для этой системы построено в [4]:

$$B(\partial)U + I\delta(x - y) = 0,$$

где $\delta(x - y)$ – функция Дирака, I – единичная матрица,

$$U = \begin{bmatrix} U_{ij}^s & U_i^f \\ P_j^s & P^f \end{bmatrix} = \frac{s\rho_f}{G\beta(K + 4/3G)} \begin{bmatrix} (F\nabla^2 + AD)\delta_{ij} - F\partial_{ij} & -ACs\partial_i \\ -AC\partial_i & (B\nabla^2 + A)A \end{bmatrix}\Psi,$$

$$F = \left(k + \frac{1}{3}G\right)D - (\alpha - \beta)^2 s,$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\phi^2 s^2\rho_f}{\beta R} + \frac{s^2(\rho - \beta\rho_f)}{K + 4/3G} + \frac{s^2\rho_f(\alpha - \beta)^2}{\beta(K + 4/3G)}\right] \pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\phi^2 s^2\rho_f}{\beta R} + \frac{s^2(\rho - \beta\rho_f)}{K + 4/3G} + \frac{s^2\rho_f(\alpha - \beta)^2}{\beta(K + 4/3G)}\right)^2 - 4\frac{s^4\phi^2\rho_f(\rho - \beta\rho_f)}{\beta R(K + 4/3G)}},$$

$$\lambda_3^2 = \frac{s^2(\rho - \beta\rho_f)}{G},$$

$$\Psi = \frac{1}{4\pi r}\left[\frac{e^{-\lambda_1 r}}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)} + \frac{e^{-\lambda_2 r}}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} + \frac{e^{-\lambda_3 r}}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)}\right].$$

Интегральное представление прямого подхода имеет следующий вид [4]:

$$\begin{bmatrix} u_j \\ p \end{bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix} U_{ij}^s & -P_j^s \\ U_i^f & -P^f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_i \\ q \end{bmatrix} d\Gamma - \int_\Gamma \begin{bmatrix} T_{ij}^s & -Q_j^s \\ T_i^f & -Q^f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ p \end{bmatrix} d\Gamma,$$

где

$\begin{bmatrix} T_{ij}^s & -Q_j^s \\ T_i^f & -Q^f \end{bmatrix}$ – матрица анизотропных решений, q – поток, t – поверхностная сила.

Итоговая система ГИУ примет вид [5]:

$$\begin{bmatrix} c_{ij}(y) & 0 \\ 0 & c(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(s,x) \\ p(s,x) \end{bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{ij}^s(s,y,x) & Q_j^s(s,y,x) \\ T_i^f(s,y,x) & Q^f(s,y,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(s,x) \\ p(s,x) \end{bmatrix} d\Gamma d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{ij}^s(s,y,x) & -P_j^s(s,y,x) \\ U_i^f(s,y,x) & -P^f(s,y,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i(s,x) \\ q(s,x) \end{bmatrix} d\Gamma d\tau.$$

2. Гранично-элементная дискретизация

Чтобы ввести гранично-элементную (ГЭ) дискретизацию, рассмотрим регуляризованное уравнение [4–6].

Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности $\partial\Omega$ на N_E граничных элементов E_e $(1 \le e \le N_E)$ совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы, каждый из которых отображается на контрольный элемент Δ_e (каждый Δ_e – это либо квадрат $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$, либо треугольник $0 \le \xi_1 + \xi_2 \le 1$, $\xi_1 \ge 0$, $\xi_2 \ge 0$).

Неизвестные граничные поля (υ, t) определяются через узловые значения $\upsilon^k = \upsilon(z^k)$ и $t^k = t(z^k)$ в интерполяционных узлах. При этом для расчетного значения параметра s будем иметь следующие выражения граничных перемещений и поверхностных сил внутри элемента S_k:

$$\upsilon_i(y) = \sum_{l=1}^{4} R^l(\xi)\upsilon_i^l, \quad i = 1,2,3; \;\; y \in S_k,$$

$$t_i(y) = t_i^l, \quad i = 1,2,3; \;\; y \in S_k.$$

Здесь $R^l(\xi)$ – функции формы для линейного четырехугольного элемента.

Для получения дискретного аналога граничного интегрального уравнения (ГИУ) применим метод коллокации. В качестве узлов коллокации y^m будем выбирать узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируется система линейных алгебраических уравнений.

3. Гранично-элементное моделирование поверхностных волн

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы $t_3(t) = t^0 f(t)$, $t^0 = -1000$ Н/м^2, на поверхность однородного пористо-упругого полупространства (рис. 1).

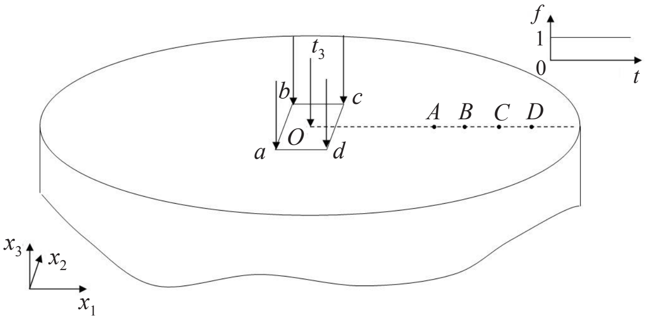

Рис. 1

В качестве закона изменения приложенной нагрузки возьмем функцию Хэвисайда $f(t) = H(t)$. Дневная поверхность полупространства свободная и проницаемая: на дневной поверхности задано поровое давление $p = 0$ и поверхностные силы $t_i(t) = 0$ $(i = \overline{1,3})$, кроме участка *abcd*, где $t_3(t) = t^0 f(t)$. Площадь участка *abcd* составляет 1 м^2.

Расчеты проводились с использованием ГЭ-сеток с разной степенью дискретизации, сведения о которых приведены в таблице 1. Точки снятия динамических откликов – *A*, *B*, *C*, *D*.

Таблица 1

ГЭ-сетки	а	б	в	г
Количество элементов	512	1008	1536	2160

В качестве пористо-упругого материала возьмем скальную породу с параметрами [3]: $K = 8 \cdot 10^9$ Н/м^2, $G = 6 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\rho = 2458$ кг/м^3, $\phi = 0{,}19$, $K_s = 3{,}6 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $K_f = 3{,}3 \cdot 10^9$ Н/м^2, $k = 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м^4/(Н·с). Для идентификации графиков отклика, построенных на сетке «а», используется маркер «○», на сетке «б» – маркер «Δ», на сетке «в» – маркер «□», на сетке «г» – маркер «∗». Рассмотрим точку *D* на расстоянии 15 м от места нагружения. Сходимость решения в перемещениях продемонстрирована на рис. 2, 3, сходимость решения для потока – на рис. 4.

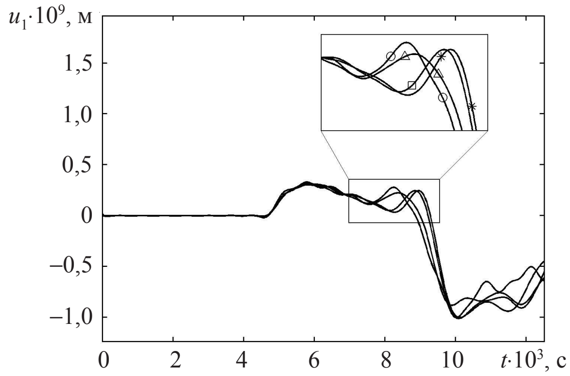

Рис. 2

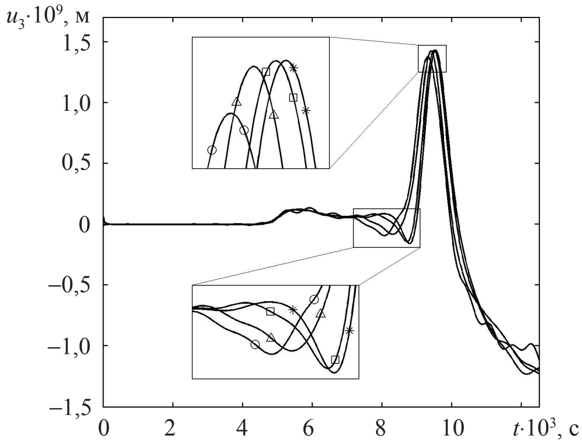

Рис. 3

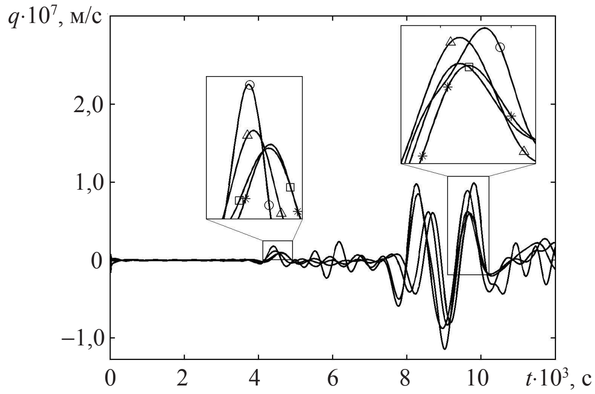

Рис. 4

Исследуем влияние изменения коэффициента проницаемости на динамические отклики перемещений и потока в точке D дневной поверхности полупространства. В качестве пористо-упругого материала возьмем водонасыщенный песок. На рис. 5, 6 представлены графики перемещений. Для идентификации графиков, построенных при значении коэффициента проницаемости $k = 3{,}55{\cdot}10^{-9}$, использован маркер «○», при значении $k = 3{,}55{\cdot}10^{-7}$ – маркер «∗», при $k = 3{,}55{\cdot}10^{-6}$ – маркер «Δ», при $k = 3{,}55{\cdot}10^{-5}$ – маркер «□».

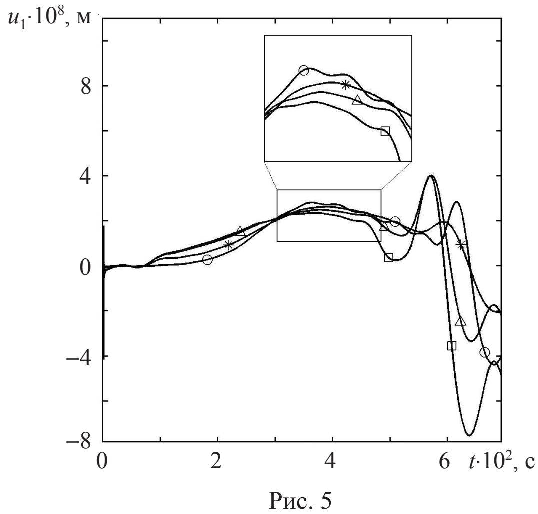

Рис. 5

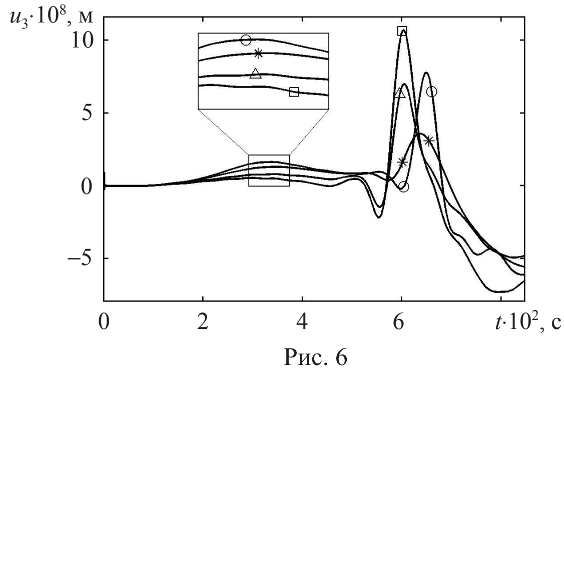

Рис. 6

На рис. 7 представлены графики порового потока при сохранении принятой маркировки.

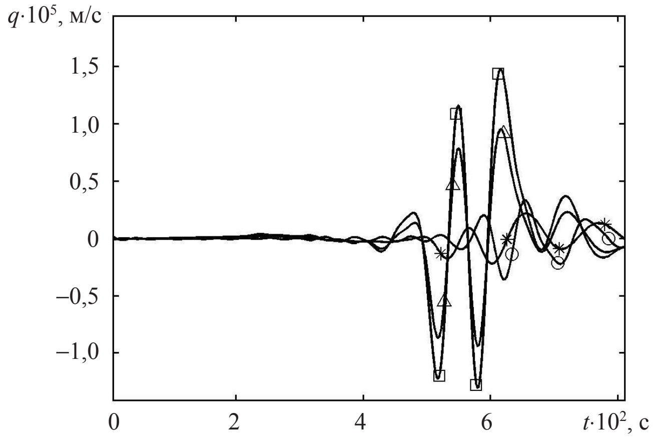

Рис. 7

Исследование свидетельствует о том, что значение коэффициента проницаемости пористо-упругого материала в динамическом законе Дарси существенно влияет не только на амплитуду поверхностной волны, но и на скорость ее распространения.

Продемонстрируем влияние второй фазы на динамику отклика перемещений во времени в точке D полупространства. Краевые условия задачи сохранены: на всей дневной поверхности задано поровое давление $p = 0$ и поверхностные силы $t_i(t) = 0$ $(i = \overline{1,3})$, кроме участка $abcd$, где $t_3(t) = t^0 f(t)$. Площадь участка $abcd$ составляет 1 м^2. В качестве пористо-упругого материала возьмем водонасыщенный песок с параметрами [3]: $K = 2{,}1{\cdot}10^8$ Н/м^2, $G = 9{,}8{\cdot}10^7$ Н/м^2, $\rho = 1884$ кг/м^3, $\phi = 0{,}48$, $K_s = 1{,}1{\cdot}10^{10}$ Н/м^2, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $K_f = 3{,}3{\cdot}10^9$ Н/м^2, $k = 3{,}55{\cdot}10^{-9}$ м^4/(Н·с). Для моделирования упругого полупространства возьмем две модели упругого материала: недренированную модель водонасыщенного песка с константами $E = 2{,}9{\cdot}10^8$ Н/м^2, $\nu = 0{,}49$, $\rho = 1884$ кг/м^3 и дренированную модель водонасыщенного песка с константами $E = 2{,}5{\cdot}10^8$ Н/м^2, $\nu = 0{,}298$, $\rho = 1884$ кг/м^3. В исследованиях [8] эти константы используются для построения упругих решений. При этом в [8] предполагается, что эти решения должны быть верхним и нижним пределами для пористо-упругой модели водонасыщенного песка.

Двухфазную среду при определенных условиях – когда движение жидкости относительно упругого скелета имеет пренебрежительно малое влияние на распространение волн – можно рассматривать как однофазную. В этом случае структурная неоднородность среды проявляется на величинах значений упругих параметров однородной среды.

На рис. 8, 9 представлены результаты проведенных исследований: графики перемещений в точке D дневной поверхности. Маркерами обозначено: «○» – пористо-упругая модель, «Δ» – недренированная модель, «□» – дренированная модель.

Исследование не подтвердило вывод из [8]: после прохода волны Рэлея ($t >$ $> 0{,}09$ с) компонента u_3 пороупругого решения находится между упругими решениями для дренированной и недренированной моделей песка. Относительно поведения компоненты u_1 исследование подтвердило вывод из [8]: после прохода волны

Рэлея ($t > 0{,}09$ с) кривая горизонтальных смещений u_1 пороупругого решения находится выше, чем кривые соответствующих компонент упругих решений. Следовательно, решения для дренированного и недренированого песка не являются верхним и нижним пределами для пороупругого решения.

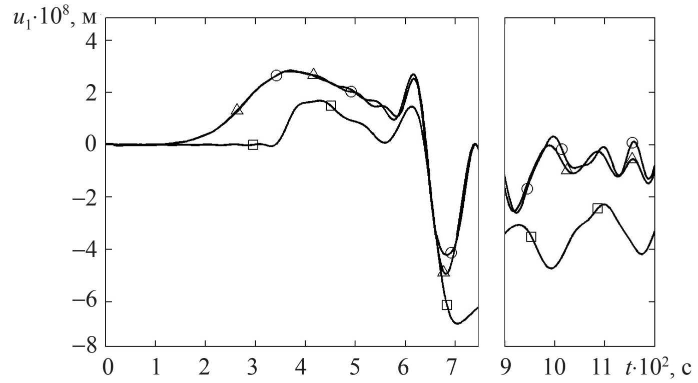

Рис. 8

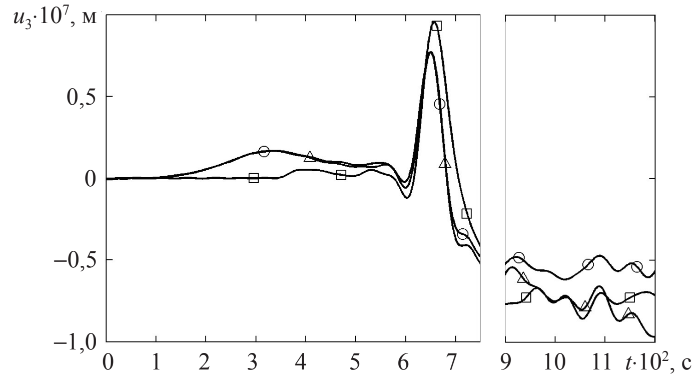

Рис. 9

Список литературы

1. *Deresiewicz H.* The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: IV. Surface waves in a half-space // Bulletin of the Seismological Society of America. 1962. **52**. P. 627–638.

2. *Deresiewicz H.* The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: II. Love wave in a porous layer // Bulletin of the Seismological Society of America. 1961. **51**. P. 51–59.

3. *Schanz M.* Wave propogation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.

4. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости / А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2009. Вып. 71. С. 164–171.

5. Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости / А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин, С.Ю. Литвинчук // Труды МАИ: Электрон. ж. 2010. Вып. 40. С. 1–20.

6. *Аменицкий А.В.*, *Игумнов Л.А.*, *Карелин И.С.* Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2008. Вып. 70. С. 71–78.

7. *Игумнов Л.А.*, *Карелин И.С.* Моделирование поверхностных волн на границе пороупругого полупространства // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XIV Междунар. конф. Ростов-на-Дону, 19–24 июня 2010 г. / Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2010. С.129–133.

8. *Schanz M.*, *Antes H.* Waves in poroelastic half space: Boundary element analyses – Porous media: theory, experiments, and numerical applications. Berlin: Springer, 2002. P. 383–412.

BOUNDARY-ELEMENT ANALYSIS OF SURFACE POROELASTIC WAVES

L.A. Igumnov, I.S. Karelin, A.N. Petrov, A.E. Petrov

Based on the boundary-element approach, surface waves of a poroelastic half-space. The analysis was done in the frame of Biot's model with four basic functions for describing the behavior of the media: displacements of an elastic skeleton and pore pressure. Poroelastic solutions are verified by solutions for drained and nor drained media models.

Keywords: surface waves, poro-elastic half-space, boundary element.