УДК 539.374

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

В.Г. Зубчанинов

Тверь

Представлена математическая модель сложного пластического деформирования материалов для траекторий малой и средней кривизны и многозвенных ломаных с точками излома.

1. Определяющие соотношения

В соответствии с постулатом физической определенности векторная форма определяющего соотношения в пятимерном векторном подпространстве E_5 А.А. Ильюшина имеет трехмерную локальную размерность в репере Френе $\{\hat{p}_k\}$ [1–3]:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + M\hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \tag{1.1}$$

где

$$\begin{cases} \hat{p}_1 = \dfrac{d\bar{Э}}{ds} = \alpha_{1k} \hat{i}_k, \quad \hat{p}_2 = \dfrac{1}{\kappa_1} \dfrac{d^2 \bar{Э}}{ds^2} = \dfrac{1}{\kappa_1} \alpha_{2k} \hat{i}_k, \\ \hat{p}_3 = \hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2 = \alpha_{3k} \hat{i}_k = \begin{vmatrix} \hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3 \\ Э'_1 & Э'_2 & Э'_3 \\ Э''_1 & Э''_2 & Э''_3 \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, 5) \end{cases} \tag{1.2}$$

– единичные орты подвижного репера Френе, $\hat{i}_k$ – единичные орты неподвижного репера А.А. Ильюшина в E_5;

$$\bar{\sigma} = \sigma\hat{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{Э} = Э\hat{Э} = Э_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 5) \tag{1.3}$$

– векторы напряжений и деформаций в E_5;

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \cos\vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin\vartheta_1 (\cos\vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin\vartheta_2 \hat{p}_3), \\ \hat{Э} = \cos\theta_1 \hat{p}_1 + \sin\theta_1 (\cos\theta_2 \hat{p}_2 + \sin\theta_2 \hat{p}_3) \end{cases} \tag{1.4}$$

– единичные векторы напряжений и деформаций; ϑ_1, ϑ_2 – углы сближения и депланации в репере Френе, определяемые из формул

$$\begin{cases} \cos\vartheta_1 = \hat{\sigma}\cdot\hat{p}_1 = \dfrac{1}{\sigma} S_k \alpha_{1k}, \\ \cos\vartheta_2 = \dfrac{\hat{\sigma}\cdot\hat{p}_2}{\sin\vartheta_1} = \dfrac{S_k\alpha_{2k}}{\sigma\sin\vartheta_1}; \end{cases} \tag{1.5}$$

θ_1, θ_2 – полярные углы вектора $\hat{Э}$ в репере Френе;

$$\kappa_1 = \left(\frac{d^2Э_k}{ds^2}\frac{d^2Э_k}{ds^2}\right)^{1/2} \quad (k = 1, 2, 3), \quad \kappa_2 = \frac{1}{\kappa_1}\begin{vmatrix} Э_1' & Э_2' & Э_3' \\ Э_1'' & Э_2'' & Э_3'' \\ Э_1''' & Э_2''' & Э_3''' \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

– параметры кривизны и кручения; s – длина дуги траектории деформирования;

$$\begin{cases} M = \dfrac{d\sigma}{ds} - M_1\cos\vartheta_1 - M_3\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2, \\ M_k = M_k\{Э, \varepsilon_0, \varphi, \kappa_1, \kappa_2, T, \beta, \omega\}_{s(t)}, \\ \dfrac{d\sigma}{ds} = P\cos\vartheta_1 \end{cases} \tag{1.7}$$

– функционалы пластического процесса, зависящие от инвариантов $\varepsilon_0, Э(s), \cos 3\varphi = 3\sqrt{6}\,|Э_{ij}|/Э^3$, тензора деформаций, параметров кривизны и кручения κ_1, κ_2, температуры T, других нетермомеханических физических параметров β, а также параметров ω структуры материала на мезоуровне, определяющих вместе с историей нагружения возникновение деформационной анизотропии материала. Для коэффициентов α_{ik} $(i, k = 1,2,3)$ имеем выражения:

$$\begin{cases} \alpha_{1k} = Э_k', \quad \alpha_{2k} = \dfrac{1}{\kappa_1}Э_k'', \\ \alpha_{31} = \dfrac{1}{\kappa_1}\left(Э_2'Э_3'' - Э_2''Э_3'\right), \quad \alpha_{32} = \dfrac{1}{\kappa_1}\left(Э_3'Э_1'' - Э_3''Э_1'\right), \quad \alpha_{33} = \dfrac{1}{\kappa_1}\left(Э_1'Э_2'' - Э_1''Э_2'\right). \end{cases}$$

Определяющее соотношение (1.1) в скалярной форме имеет вид:

$$\frac{dS_{ij}}{ds} = N_1\frac{dЭ_{ij}}{ds} + M\frac{S_{ij}}{\sigma} + \frac{M_3}{\kappa_2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa_1}\frac{d^2Э_{ij}}{ds^2}\right), \tag{1.8}$$

где

$$N_1 = M_1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}M_3.$$

Для плоских траекторий $M_3 = 0$, $\kappa_2 = 0$.

Система уравнений (1.8) может быть проинтегрирована одним из численных методов, например, методом Рунге–Кутта.

Для определения ϑ_1, ϑ_2, характеризующих векторные свойства материала, в [1] получены дифференциальные уравнения

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 \cos\vartheta_2 = -\dfrac{N}{\sigma}\sin\vartheta_1, \\
\sin\vartheta_1\left(\dfrac{d\vartheta_2}{ds} + \kappa_2\right) = \kappa_1 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \dfrac{M_3}{\sigma}\cos\vartheta_2,
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

где

$$N = M_1 - M_3 \operatorname{ctg}\vartheta_1 \sin\vartheta_2. \tag{1.10}$$

При малом кручении κ_2 угол депланации $\vartheta_2 \approx 0$ [1] и из (1.8) следует

$$M_3 = M_3^0 = \sigma\kappa_2 \sin\vartheta_1.$$

При достаточно малых углах ϑ_2 принимаем

$$M_3 = \frac{M_3^0}{\cos\vartheta_2}.$$

Тогда (1.10) принимает вид:

$$N = M_1 - \sigma\kappa_2 \operatorname{ctg}\vartheta_1 \operatorname{tg}\vartheta_2. \tag{1.11}$$

Для функционалов M_1, P ранее предложены аппроксимации [1]:

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p)f^q, \quad P = 2G_k + (2G - 2G_k)f^p, \tag{1.12}$$

где

$$f = \frac{1-\cos\vartheta_1}{2}, \tag{1.13}$$

p, q – параметры, определяемые из опыта в испытаниях по типу веера. Секущий и касательный удвоенные модули сдвига

$$
\begin{gathered}
2G_p = 2G(1-\omega) = \frac{\Phi(Э)}{Э}, \quad 2G_k = 2G(1-\lambda) = \frac{d\Phi(Э)}{dЭ}; \\
\sigma = \Phi(Э) = \sigma^T + 2G_*(Э - Э^T) + \sigma_a\left[1 - e^{-\beta(Э-Э^T)}\right]
\end{gathered}
\tag{1.14}
$$

– аппроксимация выражения универсальной функции, $\sigma^T = 2GЭ^T = \sqrt{2/3}\,\sigma_T$, σ_T – предел текучести при растяжении. При расчетах принимается $\sigma^T = \sigma_{0,2}^T$, $2G_* = \sigma^b$, где σ^b – предел прочности материала на условной диаграмме σ–Э,

$$
\begin{cases}
\sigma_a = \sigma^b - \sigma^T\left(1 - 2G_*/2G\right) \approx \sigma^b - \sigma^T, \\
\beta = \dfrac{2G_k - 2G_*}{\sigma_a},
\end{cases}
$$

$2G_k^{0,2}$ – удвоенный модуль, соответствующий условному техническому пределу текучести $\sigma_{0,2}^T$. Возможен выбор σ^T с другим допуском на остаточную деформацию. Однако он не может быть слишком малым в силу неустойчивости по точности этой характеристики при малом допуске.

При сложном нагружении для траекторий среднего и малого кручения на участке без излома принимается $\sigma = \Phi(s) \approx \Phi(Э)$, то есть

$$\sigma = \Phi(s) = \sigma^T + 2G_*(s - s^T) + \sigma_a\left[1 - e^{-\beta(s-s^T)}\right]. \tag{1.15}$$

Угол депланации ϑ_2 при достаточно малом кручении определяется из приближенного уравнения

$$\frac{d\vartheta_2}{ds} = \kappa_1 \operatorname{ctg}\vartheta_1 \sin\vartheta_2. \tag{1.16}$$

Это же уравнение (1.16) описывает поведение ϑ_2 на плоской траектории ($\kappa_2 = 0$) после предшествующего ей участка изогнуто-скрученной траектории деформирования [1].

2. Линеаризация основных уравнений

Дифференциальные уравнения (1.8) подстановкой

$$x = t\cos\vartheta_2, \quad y = t\sin\vartheta_2, \quad t = \operatorname{tg}\vartheta_{1/2} \tag{2.1}$$

приводим к виду [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = -nx + \kappa_2 y - \dfrac{\kappa_1}{2}(1 + x^2 - y^2), \\ \dfrac{dy}{ds} = -\kappa_2 x - ny + \dfrac{m}{2}(1 + x^2 + y^2), \end{cases} \tag{2.2}$$

где обозначено

$$n(s) = \frac{M_1}{\sigma}, \quad m(s) = \frac{M_3}{\sigma}. \tag{2.3}$$

Линеаризуя (2.1), (2.2), получаем

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = -nx + \kappa_2 y - \dfrac{\kappa_1}{2}, \\ \dfrac{dy}{ds} = -\kappa_2 x - ny + \dfrac{m}{2}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где

$$x \approx t, \quad y \approx t\vartheta_2.$$

Для малого кручения в рамках точности принятой аппроксимации $m = 2\kappa_2 t$. Тогда второе уравнение (2.4) упрощается и принимает вид:

$$\frac{dy}{ds} = -ny, \tag{2.5}$$

откуда после интегрирования получаем

$$y = C_2 \exp\left\{\int_{s_0}^{s} n(s)ds\right\}. \tag{2.6}$$

Из условия $s = s_0$ имеем $C_2 = t_0 \vartheta_2^0$, $t_0 = \operatorname{tg} \vartheta_1^0 / 2$.

Первое уравнение (2.4) с учетом (2.6) принимает вид:

$$\frac{dt}{ds} + nt = -\frac{\kappa_1}{2} + \kappa_2 t_0 \vartheta_2^0 \exp\left\{\int_{s_0}^{s} n(s)ds\right\}. \tag{2.7}$$

Используя общее решение однородного уравнения и метод вариации постоянных Коши, получаем решение (2.7) в виде:

$$t = \left\{t_0\left[1 + \vartheta_2^0 \int_{s_0}^{s} \kappa_2(s)\,ds\right] - \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s} \kappa_1(s) \exp\left[\int_{s_0}^{s} n(\tau)d\tau\right] ds\right\} \exp\left[-\int_{s_0}^{s} n(s)\,ds\right], \tag{2.8}$$

$$y = t_0 \vartheta_2^0 \exp\left[-\int_{s_0}^{s} n(s)ds\right]. \tag{2.9}$$

Для функционала $n(s)$ на основании (1.12) может быть принята аппроксимация

$$n = \frac{1}{s} + k, \tag{2.10}$$

где

$$k = \frac{\alpha 2G}{\sigma^T} f^q(\vartheta_1^0) \tag{2.11}$$

– постоянная величина. Решения (2.8), (2.9) запишутся в виде:

$$\begin{cases} t = \dfrac{s_0}{s} e^{-k(s-s_0)} \left\{ t_0 \left[1 + \vartheta_2^0 \displaystyle\int_{s_0}^{s} \kappa_2(s)ds\right] - \dfrac{1}{2s_0} \displaystyle\int_{s_0}^{s} \kappa_1(s) s e^{k(s-s_0)} ds \right\}, \\ \vartheta_2 = \dfrac{s_0}{s} t_0 \vartheta_2^0 e^{-k(s-s_0)}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Для винтовых траекторий постоянной кривизны и кручения из (2.12) получаем

$$\begin{cases} t = \dfrac{s_0}{s} e^{-k(s-s_0)} \left\{ t_0 \left[1 + \kappa_2 \vartheta_2^0 (s - s_0)\right] + \dfrac{\kappa_1}{2k}\left(1 - \dfrac{1}{ks_0}\right)\right\} - \dfrac{\kappa_1}{2k}\left(1 - \dfrac{1}{ks}\right), \\ \vartheta_2 = \dfrac{s_0}{s} \dfrac{t_0 \vartheta_2^0}{t} e^{-k(s-s_0)}, \end{cases} \tag{2.13}$$

где считаем для плоских траекторий $\kappa_1 < 0$, $\kappa_2 = 0$.

Введем обозначение

$$t_* = \operatorname{tg}\frac{\vartheta_1^*}{2} = -\frac{\kappa_1}{2k}. \tag{2.14}$$

Из (2.13) при $s \to \infty$ получаем $t \to t_*$, $\vartheta_2 \to 0$. Следовательно, при $s \to \infty$ имеем $\vartheta_1 \to \vartheta_1^*$, $\vartheta_2 \to 0$. Это соответствует стремлению угла сближения ϑ_1 вернуться в соприкасающуюся плоскость и стабилизации процесса по углу ϑ_1.

Для плоских траекторий при малых углах ϑ_1 таких, что $\operatorname{tg}\vartheta_1/2 \approx \vartheta_1/2$, из (2.13) получаем формулу

$$\vartheta_1 = \frac{s_0}{s} e^{-k(s-s_0)} \left\{ \vartheta_1^0 - \vartheta_1^* \left(1 - \frac{1}{ks_0} \right) \right\} + \vartheta_1^* \left(1 - \frac{1}{ks} \right). \tag{2.15}$$

Данное решение совпадает с решением, полученным в [4].

Для двузвенных ломаных из (2.13), (2.15) следует $(\vartheta_1^* = 0)$:

$$t = \frac{s_0}{s} t_0 e^{-k(s-s_0)}, \quad \vartheta_1 = \frac{s_0}{s} \vartheta_1^0 e^{-k(s-s_0)}. \tag{2.16}$$

Для траектории вида логарифмической спирали, кривизна и длина дуги которой определяются формулами

$$\rho = Re^{\gamma\varphi}, \quad \kappa_1 = \frac{1}{\gamma s}, \quad s = \rho\sqrt{1+\gamma^2}\big/\gamma, \tag{2.17}$$

из (2.9) получаем

$$t = \frac{s_0}{s} e^{-k(s-s_0)} \left[t_0 + \frac{1}{2k\gamma s_0} \right] - \frac{1}{2k\gamma s}, \tag{2.18}$$

а для малых ϑ_1 имеем

$$\vartheta_1 = \frac{s_0}{s} e^{-k(s-s_0)} \left(\vartheta_1^0 + \frac{1}{k\gamma s_0} \right) - \frac{1}{k\gamma s}.$$

Соотношение

$$\frac{d\sigma}{ds} = P\cos\vartheta_1 \tag{2.19}$$

позволяет после интегрирования определить закономерность изменения σ после излома траектории. До излома траектории средней и малой кривизны и малого кручения принимается закон (1.15). Для функции А.А. Ильюшина P имеем выражение

$$P = 2G_k + (2G - 2G_k) f^{\,p} = \frac{d\Phi}{d\text{Э}} + 2G\lambda f^{\,p}, \tag{2.20}$$

где

$$\lambda = \left(1 - \frac{2G_*}{2G} \right) \left[1 - e^{-\beta(s-s_0)} \right], \quad 2G_k = \frac{d\Phi}{d\text{Э}} \approx \frac{d\Phi}{ds}. \tag{2.21}$$

В результате получаем

$$\sigma = \Phi(s) + \int_{s_0}^{s} P\cos\vartheta_1 ds = \Phi(s) + 2G\int_{s_0}^{s} \lambda f^{\,p} ds, \tag{2.22}$$

где угол сближения изменяется в интервале $0 \le \vartheta_1 \le \pi/2$, поскольку при $\vartheta_1 > \pi/2$ будет происходить разгрузка материала и $P\cos\vartheta_1 = 2G$. В действительности в процесс деформирования вмешивается ползучесть материала и упругая разгрузка может начинаться при некотором угле $\vartheta_1^* < 90°$. В этом случае нужно принять

$$\frac{d\sigma}{ds} = P\cos\left(\vartheta_1 + \frac{\pi}{2} - \vartheta_1^*\right).$$

3. Частичная разгрузка материала

Если угол излома траектории ϑ_1^0 велик и лежит в интервале $\pi/2 \le \vartheta_1 \le \pi$, то полученные в п. 2 решения неправомерны. После излома траектории происходит сложная или *частичная разгрузка* материала по криволинейной либо линейной траектории. На диаграмме деформирования возникает "нырок". Напряжение σ_k^T в точке излома и начале "нырка" уменьшается на величину $\gamma\sigma^T$, где величина γ зависит от угла излома ϑ_1^0 и определяется из базового опыта по типу веера. "Нырок" заканчивается при напряжении $\sigma_{\text{вт}}^T = \sigma_k^T - \gamma\sigma^T$ в момент "протыкания" предельной поверхности и возникновения вторичных пластических деформаций, то есть при смене процесса упругой разгрузки на активный процесс деформирования. В этот момент угол $\vartheta_1 \approx \pi/2$. Экспериментальные исследования показывают, что упругая частичная разгрузка по любой криволинейной траектории практически линейна и может быть представлена законом [1]:

$$\sigma = \sigma_k^T - 2G(s - s_0), \tag{3.1}$$

где

$$\sigma_k^T = 2G(s_k - s_0) = 2G\Delta s_k. \tag{3.2}$$

При частичной упругой разгрузке из (2.6), (2.7) получаем при $n = 2G/\sigma$:

$$t = (\Delta s_k - \Delta s)\left\{\frac{t_0}{\Delta s_k}\left[1 + \vartheta_2^0\int_{s_0}^{s}\kappa_2 ds\right] - \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s}\frac{\kappa_1(s)ds}{\Delta s_k - \Delta s}\right\}, \tag{3.3}$$

$$\vartheta_2 = \frac{\vartheta_2^0 t_0}{t}\left(1 - \frac{\Delta s_k}{\Delta s}\right). \tag{3.4}$$

В частности, для двузвенных ломаных $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, и из (3.3) следует простая формула

$$t = t_0\left(1 - \frac{\Delta s}{\Delta s_k}\right). \tag{3.5}$$

Из (2.19) для минимального напряжения σ на "нырке" следует $\vartheta_1 = \pi/2$. Учитывая $\Delta s_k = \sigma_k^T / 2G$ и полагая в момент окончания разгрузки $\Delta s = \gamma\sigma^T / 2G$, получаем из (3.5) формулу для вычисления параметра

$$\gamma = \gamma_0\left(1 - \frac{1}{t_0}\right)^m, \tag{3.6}$$

где введена корректирующая степень m, определяемая из базового эксперимента по типу веера для каждого материала.

4. Вторичное пластическое деформирование

После окончания частичной разгрузки наступает этап вторичного пластического деформирования. Участок диаграммы на этом этапе в соответствии с (1.15) описывается выражением

$$\sigma_3 = \Phi_3(\Delta s) = C_p + 2G'_*\Delta s + \sigma'_a\left[1 - e^{-\beta\Delta s}\right], \tag{4.1}$$

где

$$\Delta s = s - s_0^\gamma, \quad s_0^\gamma = s_0 + \frac{\gamma\sigma^T}{2G}, \quad \sigma_1 = \Phi(s), \tag{4.2}$$

$$C_p(\Delta s) = \sigma_{\text{вт}}^T(1 + A\Delta s^n)$$

– функция изотропного упрочнения материала;

$$\sigma_{\text{вт}}^T = \sigma_k^T - \gamma\sigma^T, \quad \sigma_k^T = \gamma_0\sigma^T$$

– вторичный предел текучести материала в момент “протыкания” предельной поверхности; A, n – экспериментально подбираемые параметры, зависящие от угла излома траектории. При отсутствии изотропного упрочнения $C_p = \sigma_{\text{вт}}^T$.

Из (1.15), (4.1) получаем

$$\sigma_3 = \sigma_1 + (C_p - \sigma^T) - 2G'_*(s_0^\gamma - s^T) + \sigma'_a[1 - e^{\beta(s_0^\gamma - s^T)}]e^{-\beta(s - s^T)} +$$

$$+ (2G'_* - 2G_*)(s - s^T) + (\sigma'_a - \sigma_a)[1 - e^{-\beta(s - s^T)}]. \tag{4.3}$$

При совпадении свойств анизотропного упрочнения материала до и после частичной разгрузки имеем $G'_* = G_*, \sigma'_a = \sigma_a$. Из (4.3) получаем

$$\sigma_3 = \sigma_1 + (C_p - \sigma^T) - 2G_*(s_0^\gamma - s^T) + \sigma_a[1 - e^{\beta(s_0^\gamma - s^T)}]e^{-\beta(s - s^T)}. \tag{4.4}$$

Если формально принять в (4.4) $C_p = \sigma^T$ для любого угла излома, то придем к соотношению, используемому в теории пластического течения [5] при угле излома траектории на 180°.

Обобщением принципа Мазинга при сложном нагружении с учетом частичной разгрузки может служить выражение

$$\sigma_3 = C_p(\Delta s) + \gamma\sigma_1 - \gamma\sigma^T. \tag{4.5}$$

В этом случае, с учетом (1.15), находим

$$\sigma_3 = C_p(\Delta s) + \gamma\left\{2G_*(s - s_0^\gamma) + \sigma_a[1 - e^{-\beta(s - s_0^\gamma)}]\right\}. \tag{4.6}$$

Сравнивая (4.3), (4.6), получаем

$$2G'_* = 2G_*, \quad \sigma'_a = \gamma\sigma_a. \tag{4.7}$$

Из (1.15), (4.6), (4.7) для $s \geq s_0^\gamma$ следует

$$\sigma_3 = \sigma_1 + (C_p - \sigma^T) - \gamma\left\{2G_*(s_0^\gamma - s^T) + \sigma_a[1 - e^{\beta(s_0^\gamma - s^T)}]e^{-\beta(s - s^T)}\right\} +$$

$$+(\gamma-1)\left\{2G_*(s-s^T)+\sigma_a\left[1-e^{-\beta(s-s^T)}\right]\right\}. \qquad (4.8)$$

При $\gamma=1$ из (4.8) получаем соотношение (4.4). Если $\gamma\neq 1$, то свойства анизотропного упрочнения материала до и после частичной разгрузки не совпадают.

В варианте модели пластического деформирования типа теории течения [5] частичная разгрузка материала не учитывается и “нырок” не описывается. Не принимается во внимание также участок пластического деформирования после излома при $\sigma_3 < \sigma^T$. Угол излома траектории ограничивается случаем $\vartheta_1^0=\pi$. В связи с этим эта модель не использует все свои возможности. Она следует, как частный случай, из описанной выше новой упрощенной модели пластического деформирования материалов в рамках теории процессов [1, 2]. Для использования модели достаточно провести базовые испытания по типу веера при углах излома 0, 60, 90, 120, 150 и 180°, $s_0 \geq (1\div 2)\%$, и определить параметры σ^T, G_*, σ_a, γ, β, A, n.

Литература

1. *Зубчанинов, В.Г.* Математическая теория пластичности / В.Г. Зубчанинов. – Тверь: Изд-во ТГТУ, 2003. – 300 с.

2. *Ильюшин, А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.

3. *Ильюшин, А.А.* Труды 1946–1966. Пластичность. Т. 2 / А.А. Ильюшин. – М.: Физматлит, 2004. – 479 с.

4. *Дао Зуй Бик*. О гипотезе локальной определенности в теории пластичности / Бик Дао Зуй // Вестник МГУ. Серия математика, механика. – 1965.– №2. – С. 67–75.

5. *Бондарь, В.С.* Неупругость. Варианты теории / В.С. Бондарь. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.

[5.07.2005]