

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СОСТАВНОГО ПОРОУПРУГОГО ТЕЛА*

© 2013 г.

Л.А. Игумнов¹, С.Ю. Литвинчук¹,
Д.В. Тарлаковский², Н.А. Локтева²

¹НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

²Московский авиационный институт

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 20.12.2012

Рассматривается краевая задача динамической теории пороупругости для составного тела. Дано описание гранично-элементной дискретизации. Итоговая система линейных алгебраических уравнений составлена из систем линейных алгебраических уравнений для каждой из подобластей и условий контакта. Приведены численные результаты решения задач.

Ключевые слова: пороупругость, составное тело, граничный элемент.

1. Постановка краевой задачи пороупругой динамики

Система уравнений динамики пороупругого однородного тела $\Omega \in R^3$ имеет вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + F_i &= \rho \ddot{u}_i^s + \rho_f \ddot{w}_i, \quad i, j = \overline{1, 3}, \\ \sigma_{ij} &= 2G\varepsilon_{ij}^s + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_{kk}^s \delta_{ij} - \alpha \delta_{ij} p, \\ \varepsilon_{ij}^s &= \frac{1}{2} (u_{i,j}^s + u_{j,i}^s), \quad \varepsilon_{kk}^f = u_{k,k}^f, \\ \dot{w}_i = q_i &= -k \left(p_{,i} + \rho_f \ddot{u}_i^s + \frac{1}{\phi} \left(\frac{\rho_a}{\phi} + \rho_f \right) \ddot{w}_i - f_i^f \right), \end{aligned}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжения; F_i – компоненты плотностей объемной силы; u_i^s – компоненты вектора перемещения скелета; w_i – компоненты вектора перемещения фильтрации (просачивания); ρ , ρ_f , ρ_a – плотности упругого скелета, наполнителя и присоединенной массы; ε_{kl}^s , ε_{kl}^f – компоненты тензора деформации упругого скелета и наполнителя; K и G – объемный модуль и модуль сдвига скелета; k – проницаемость; ϕ – пористость, p – поровое давление. Здесь и далее применяется

* Исследование выполнено при поддержке Министерством образования и науки РФ, соглашение 14.В37.21.2019 «Проблемы динамического состояния сложных сред и конструкций».

соглашение Эйнштейна для суммирования, запятая обозначает частное дифференцирование по пространственным координатам, точка над функцией обозначает дифференцирование по времени.

Применение преобразования Лапласа к уравнениям позволяет свести систему уравнений к дифференциальной форме записи в виде уравнений в частных производных в изображениях по Лапласу [1–3]. Добавим граничные условия:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}(x, s) = \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}(u_1, u_2, u_3, p) \text{ на } S^u; \\ t_i(x, s) = t_{ni}(x, s) = t_{ni}, \quad t_4(x, s) = q \text{ на } S^\sigma, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где S^u и S^σ – части границы S тела Ω , по которым заданы соответственно обобщенные перемещения и поверхностные силы; t_{ni} – граничные значения изображения по Лапласу поверхностной силы; q – граничные значения изображения по Лапласу порового потока.

Рассмотрим составное (кусочно-однородное) тело. Границу тела обозначим через S , границы однородных частей Ω_k ($k = 1, \dots, K$) – через S_k . Предполагается, что Ω_k являются изотропными однородными пороупругими телами.

Для составного тела Ω_k будем рассматривать следующие типы граничных условий:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_l^k(x, s) = f_l^k(x, s), \quad x \in S^u \cap S_k, \quad l = \overline{1, 4}; \\ \tilde{t}_l^k(x, s) = g_l^k(x, s), \quad \tilde{t}_n = (t_n, q), \quad x \in S^\sigma \cap S_k; \\ \mathfrak{v}_l^k(x, s) = \mathfrak{v}_l^s(x, s), \quad \tilde{t}_l^k(x, s) = -\tilde{t}_l^s(x, s), \quad x \in S'_{ks}, \end{aligned}$$

где S'_{ks} – граница контакта частей Ω_k и Ω_s . Функции $f_l^k(x, s)$ и $g_l^k(x, s)$ являются заданными изображениями соответствующих граничных векторов.

2. Гранично-элементная дискретизация

Чтобы ввести гранично-элементную (ГЭ) дискретизацию для однородной пороупругой части Ω_i , рассмотрим регуляризованное уравнение [3–5]:

$$\begin{aligned} \alpha_\Omega \mathfrak{v}_k^l(x, s) + \int_S (T_{ik}^l(x, y, s) \mathfrak{v}_i(y, s) - T_{ik}^{l0}(x, y, s) \mathfrak{v}_i(x, s) - U_{ik}^l(x, y, s) t_i(y, s)) dS = 0, \\ (x \in S), \quad t = [t_1, t_2, t_3, q]^T, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}(u_1, u_2, u_3, p), \end{aligned}$$

где U_{ik}^l, T_{ik}^l – матрицы фундаментальных и сингулярных решений исходной системы уравнений однородной пороупругой динамики; T_{ik}^{l0} – матрица компонент, содержащих особенности.

Будем аппроксимировать границу S области совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиугольных биквадратичных элементов S_k ($k = 1, \dots, N$) [3, 5–7]. Для аппроксимации обобщенных граничных перемещений применим билинейные элементы, а для аппроксимации обобщенных поверхностных сил – постоянные элементы. Под $\mathfrak{v}_i^m(s)$ понимаются компоненты вектора перемещений в узле с номером m при фиксированном комплексном параметре s интегрального преобразования Лапласа. Под $t_{ni}^k(s)$ понимаются компоненты вектора обобщенных поверхностных сил в центре элемента с номером k при фиксированном комплексном параметре s интегрального преобразования Лапласа. Рассматривая граничные интегральные уравнения (ГИУ) в ряде коллокационных точек, получим систему алгебраических урав-

нений относительно неизвестных обобщенных граничных значений. Коэффициентами системы будут интегралы по граничной поверхности от ядер ГИУ с весовыми функциями, определяемыми аппроксимацией обобщенных граничных функций. Точки коллокации выбираются в узлах интерполяции обобщенных граничных значений перемещений и усилий. Построение дискретных аналогов сводится к проблеме численного интегрирования, а значит, к выбору квадратурной формулы и при необходимости к дополнительному разбиению элемента на подэлементы, а также к способу раскрытия особенностей [3–7]. При вычислении нерегулярных интегралов граничный элемент разбивается на два вырожденных четырехугольника в случае, когда точка коллокации совпадает с узлом интерполяции обобщенных граничных значений, а в случае, когда точка коллокации расположена в центре элемента, – на четыре. Интегральные коэффициенты дискретных аналогов ГИУ вычисляются при помощи квадратурной формулы Гаусса. Использование метода Дурбина численного обращения преобразования Лапласа требует получения искомого ГЭ-решения на всем частотном интервале и затем решения проблемы обращения – построения оригинала искомого решения.

Коэффициенты дискретных аналогов параметризованы комплексной переменной Лапласа s . Кусочно-однородная задача решается добавлением к условиям контакта соответствующих ГИУ со всем комплексом гранично-элементных аппроксимаций и сведением ГИУ к системам линейных алгебраических уравнений. Системы линейных алгебраических уравнений, записанные для каждой из подобластей, при учете условий контакта позволяют составить итоговую систему линейных алгебраических уравнений.

3. Результаты численных исследований

Рассмотрим составную консоль длиной 9 м (рис. 1). Будем исследовать давление и поток в точке A , удаленной на 1,5 м от нагруженного торца. Вместе с тем будем строить отклик давления на закрепленном торце для анализа времени прихода волн.

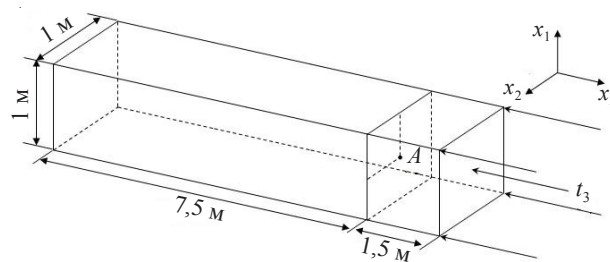


Рис. 1

В рассматриваемом случае имеют место граничные условия:

- на нагруженном торце: $t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = -f(t), p = 0$ – известные; $u_i (i = \overline{1,3}), q$ – неизвестные;
- на остальных гранях $S_j (j = \overline{1,5}), S_j \perp x_k : u_k = 0, t_i = 0 (i = \overline{1,3}, i \neq k), q = 0$ – известные; $u_i (i = \overline{1,3}, i \neq k), t_k, p$ – неизвестные;
- на ребрах $d_{jm} = S_j \cap S_m : u_j = 0, u_m = 0, t_i = 0 (i = \overline{1,3}, i \neq j, i \neq m), q = 0$ – известные; $u_i (i = \overline{1,3}, i \neq j, i \neq m), t_j, t_m, q$ – неизвестные.

При получении решения выбирались приведенные частоты $\omega \in [0; 0,6]$ с шагом $\Delta\omega = 0,005$ и $\omega \in [0,6; 300]$ с шагом $\Delta\omega = 0,05$. Параметр Дурбина $\alpha = 0,3$. На рис. 2, 3 представлены ГЭ-решения задачи – перемещения и давления в точке A .

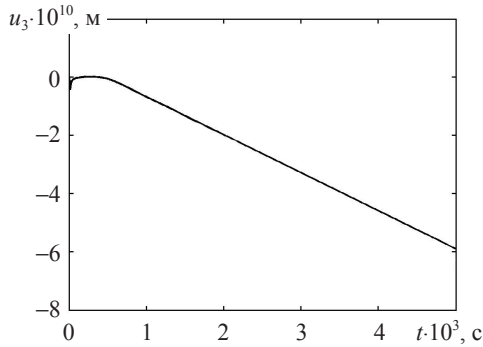


Рис. 2

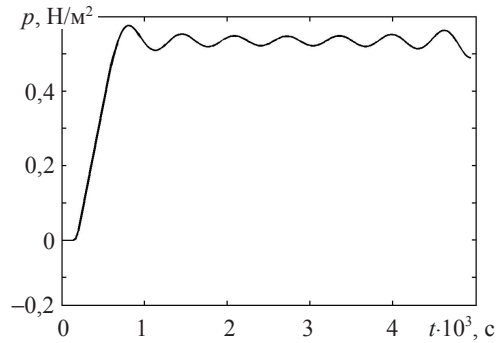


Рис. 3

На рис. 4 представлено ГЭ-решение задачи – изменение давления на закрепленном торце.

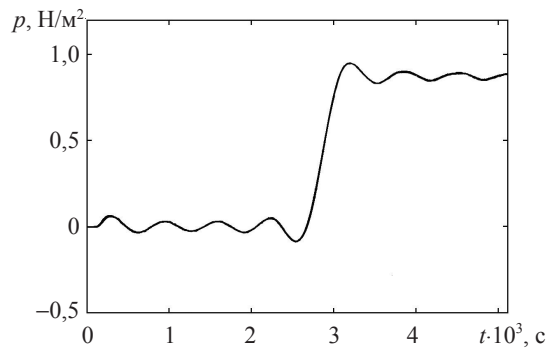


Рис. 4

Волнообразное поведение откликов на рис. 3, 4 следует рассматривать как следствие выбранного частотного интервала при применении метода Дурбина. Добиться погашения этих колебаний, не имеющих физической природы, можно путем увеличения частотного интервала.

Рассмотрим составное призматическое тело, на торец которого действует сила $f(t) = 1 \text{ Н/м}^2$ (рис. 5). Граничные условия:

– на нагруженном торце: $t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = -f(t), p = 0$ – известные; $u_i (i = \overline{1,3}), q$ – неизвестные;

– на остальных гранях $S_j (j = \overline{1,5}), S_j \perp x_k : u_k = 0, t_i = 0 (i = \overline{1,3}, i \neq k), q = 0$ – известные; $u_i (i = \overline{1,3}, i \neq k), t_k, p$ – неизвестные;

– на ребрах $d_{jm} = S_j \cap S_m : u_j = 0, u_m = 0, t_i = 0 (i = \overline{1,3}, i \neq j, i \neq m), q = 0$ – известные; $u_i (i = \overline{1,3}, i \neq j, i \neq m), t_j, t_m, q$ – неизвестные.

Подобласти жестко связаны между собой. Рассмотрим влияние изменения жесткости каждой из подобластей на отклик перемещений и давлений на свободном торце, контакте и закрепленном торце составного тела. В качестве пористого материала возьмем песчаник Berea со следующими свойствами [1]: $K = 8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, G = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \rho = 2458 \text{ кг/м}^3, \phi = 0,19, K_s = 3,6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3,$

$K_f = 3,3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $k = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$. Используем одинаковые параметры поропругих материалов для обеих подобластей и исследуем влияние модуля Юнга подобласти на отклики. Параметр Дурбина $\alpha = 0,3$.

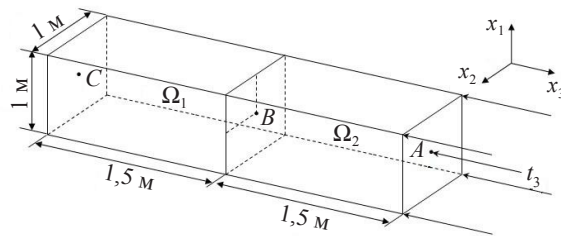


Рис. 5

Рассмотрим случай изменения модуля Юнга для подобласти Ω_1 . На рис. 6 приведены кривые перемещения во времени на свободном торце в точке A , а на рис. 7, 8 представлены кривые перемещения и давления на контакте подобластей в точке B . На рисунках маркерами обозначены кривые, соответствующие значениям модуля Юнга: $\circ - E = 1,44 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\Delta - E = 3,44 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $* - E = 6,44 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$.

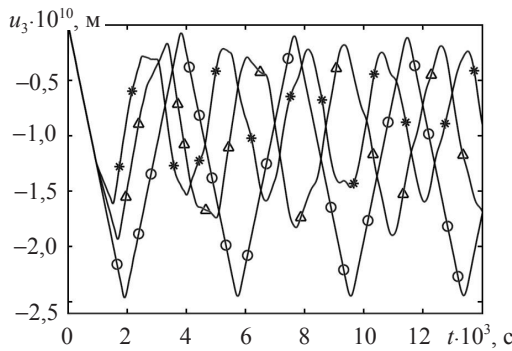


Рис. 6

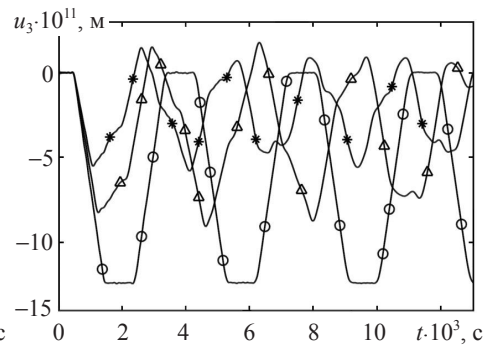


Рис. 7

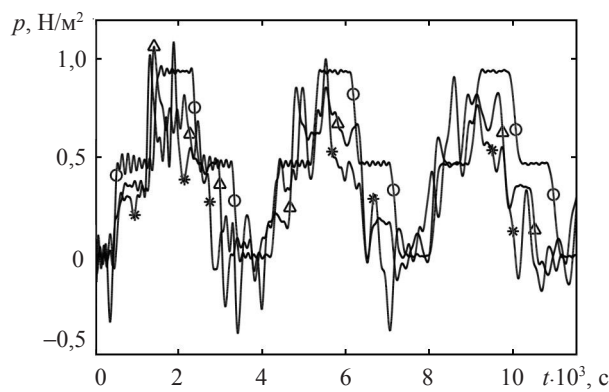


Рис. 8

На рис. 9 приведены кривые давления во времени на закрепленном торце тела в точке C (маркировка кривых аналогична маркировке на рис. 6–8).

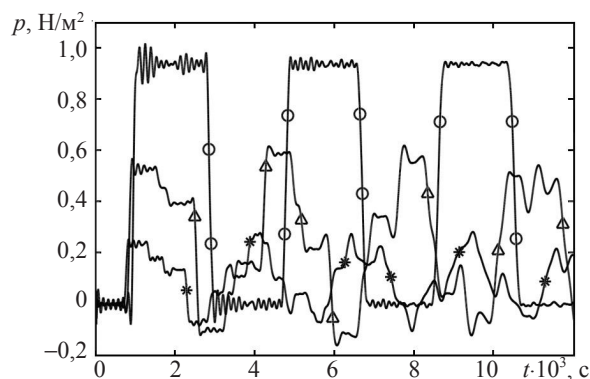


Рис. 9

Проведенные результаты ГЭ-расчетов свидетельствуют о возможностях ГЭ-методики решения задач пороупругости с существенно более мягким или более жестким скелетом одной из подобластей.

Работа выполнена при частичном финансировании ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009–2013 годы (проекты №14.740.11.0872, 14.В37.21.1249, 14.В37.21.1137), Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и РФФИ (гранты 12-01-00698, 12-08-00984, 13-08-00658).

Список литературы

1. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
2. Biot M. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // J. Acoust. Soc. Amer. 1962. V. 34, №9. P. 1256–1264.
3. Игумнов Л.А., Карелин И.С., Петров А.Н. Гранично-элементное исследование влияния коэффициента проницаемости на динамический отклик в составном пороупругом теле // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2011. Вып. 73. С. 98–104.
4. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1986. 295 с.
5. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости / А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2009. Вып. 71. С. 164–171.
6. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
7. Аменицкий А.В., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2008. Вып. 70. С. 71–78.

**NUMERICALLY MODELING THE DYNAMICS
OF A COMPOUND POROELASTIC BODY**

L.A. Igumnov, S.Yu. Litvinchuk, D.V. Tarlakovsky, N.A. Lokteva

A boundary-value problem of the dynamic poroelasticity theory for a compound body is considered. The boundary element discretization is described. The resulting set of linear algebraic equations is made up of the sets of linear algebraic equations for each of the sub-regions and the contact conditions. The results of numerically analyzing the problems are presented.

Keywords: poroelasticity, compound body, boundary element.