УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ МАТРИЦЫ ГРИНА*

Л.А. Игумнов, И.П. Марков, В.П. Пазин, А.А. Ипатов

НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 10.10.2012

Моделируется динамика составного тела, одна из однородных частей которого обладает сильно выраженным эффектом возникновения третьей волны. Задача рассматривается в рамках трехмерной динамической теории пороупругости. В качестве метода исследования применен метод граничных интегральных уравнений в прямой формулировке. Приводятся результаты численных исследований, полученные на основе гранично-элементного подхода.

Ключевые слова: метод граничных элементов, пороупругость, волна Био.

1. Математическая модель и метод решения

Рассматривается однородное тело $\Omega \in R^3$, $\Gamma = \partial\Omega$. Система дифференциальных уравнений в преобразованиях Лапласа (параметр s) для смещения $\hat{u}_i$ и порового давления $\hat{p}$ имеет следующий вид [1, 2]:

$$G\hat{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\hat{u}_{j,ij} - (\alpha - \beta)\hat{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\,\hat{u}_i = -\hat{F}_i,$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f}\hat{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{R}\hat{p} - (\alpha - \beta)\,s\hat{u}_{i,i} = -\hat{a},$$

$$\beta = \frac{k\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 k(\rho_a + \phi\rho_f)},$$

где G, K – константы упругости; ϕ – пористость; k – проницаемость; α – эффективный коэффициент напряжений; ρ, ρ_a, ρ_f – пористости скелета, присоединенной массы и жидкой среды; $\hat{F}_i$, $\hat{a}$ – плотности источников.

Интегральное представление прямого подхода записывается в виде [2, 3]:

$$\begin{bmatrix}\hat{u}_j\\ \hat{p}\end{bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix}\hat{U}_{ij}^s & -\hat{P}_j^s\\ \hat{U}_i^f & -\hat{P}^f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{t}_i\\ \hat{q}\end{bmatrix} d\Gamma - \int_\Gamma \begin{bmatrix}\hat{T}_{ij}^s & -\hat{Q}_j^s\\ \hat{T}_i^f & -\hat{Q}^f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{u}_i\\ \hat{p}\end{bmatrix} d\Gamma.$$

* Работа выполнена при частичном финансировании ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009–2013 годы (ГК 14.740.11.0872, соглашения 14.В37.21.1249, 14.В37.21.1137), Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и при поддержке РФФИ (гранты 12-01-00698-а, 12-08-00984-а, 12-08-31572, 13-08-00658).

Итоговая система граничных интегральных уравнений (ГИУ) имеет вид [2, 3]:

$$\begin{bmatrix} c_{ij}(y) & 0 \\ 0 & c(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(s,x) \\ p(s,x) \end{bmatrix} + \int\limits_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{ij}^{s}(s,y,x) & -Q_j^{s}(s,y,x) \\ T_i^{f}(s,y,x) & -Q^{f}(s,y,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(s,x) \\ p(s,x) \end{bmatrix} d\Gamma =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{ij}^{s}(s,y,x) & -P_j^{s}(s,y,x) \\ U_i^{f}(s,y,x) & -P^{f}(s,y,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i(s,x) \\ q(s,x) \end{bmatrix} d\Gamma.$$

Ядра допускают выделение особенностей [2]:

$$\hat{P}_i^s = O(r^0), \quad \hat{U}_i^f = O(r^0), \quad \hat{P}^f = \frac{\rho_f p}{4\pi\beta}\frac{1}{r} + O(r^0), \quad \hat{Q}^f = -\frac{r_{,n}}{4\pi r^2} + O(r^0),$$

$$\hat{U}_{ij}^s = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\{r_{,i}r_{,j} + \delta_{ij}(3-4\nu)\}\frac{1}{r} + O(r^0),$$

$$\hat{Q}_j^s = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\{\alpha(1-2\nu)(r_{,n}r_{,j} - n_j) - 2\beta(1-\nu)(r_{,n}r_{,j} + n_j)\}\frac{1}{r} + O(r^0),$$

$$\hat{T}_i^f = \frac{\rho_f p^2}{8\pi\beta}\left\{(\alpha-\beta)\frac{1-2\nu}{1-\nu}r_{,i}r_{,j} + n_i\frac{\alpha+\beta(1-2\nu)}{1-\nu}\right\}\frac{1}{r} + O(r^0),$$

$$\hat{T}_{ij}^s = \frac{-[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}]r_{,n} + (1-2\nu)(r_{,j}n_i - r_{,i}n_j)}{8\pi(1-\nu)r^2} + O(r^0).$$

Для решения проблемы обращения интегрального преобразования Лапласа применяется вариант метода Дурбина [4]:

$$f(0) \approx \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(F_{k+1} - F_k)\Delta_k}{2\pi}\right],$$

$$f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{\pi t^2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{F_{k+1} - F_k}{\Delta_k}(\cos(\omega_{k+1}t) - \cos(\omega_k t)) + \frac{G_{k+1} - G_k}{\Delta_k}(\sin(\omega_{k+1}t) - \sin(\omega_k t))\right],$$

где

$$\Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k, \; F_k = \mathrm{Re}[\bar{f}(\alpha + i\tau_k)], \; G_k = \mathrm{Im}[\bar{f}(\alpha + i\tau_k)].$$

Тело D состоит из однородных пороупругих частей Ω. Добавление для каждой из однородных частей условий контакта для обобщенных поверхностных сил и перемещений позволяет сформулировать краевую задачу для тела D и поставить ей в соответствие систему граничных интегральных уравнений (ГИУ).

2. Гранично-элементная дискретизация

Чтобы ввести гранично-элементную (ГЭ) дискретизацию, рассмотрим регуляризованное ГИУ [3–6]. Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности $\partial\Omega$ на N_E граничных элементов E_e ($1 \le e \le N_E$). Граничные элементы четырехугольные восьмиузловые биквадратичные. На каждом элементе вводится локальная система координат $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$. Глобальные координаты произвольной точки элемента N_k выражаются через локальные координаты с помощью функций формы. В качестве функций формы выбраны квадратичные полиномы интерполяции. Неизвестные граничные поля интегрируются через узловые значения в интерполяционных узлах. Множество интерполяционных узлов отличается от множества геометрических узлов, а множество интерполяционных функций не совпадает с множеством функций формы. Рассмотрим случай, называемый согласованным интерполированием, где для аппроксимации граничных перемещений применим билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил – постоянные элементы. При этом для расчетного значения параметра s будем иметь следующие выражения граничных перемещений и поверхностных сил внутри элемента S_k:

$$\upsilon_i(y) = \sum_{l=1}^{4} R^l(\xi)\upsilon_i^l, \quad i = 1,2,3; \quad y \in S_k,$$

$$\tilde{t}_i(y) = \tilde{t}_i^{\,l}, \quad i = 1,2,3; \quad y \in S_k.$$

Здесь $R^l(\xi)$ – функции формы для линейного четырехугольного элемента.

Для получения дискретного аналога ГИУ применяется метод коллокации. В качестве узлов коллокации выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций, и формируется система линейных алгебраических уравнений.

Необходимо отметить, что все коэффициенты дискретных аналогов ГИУ в упругом случае имеют особенности типа $1/r$ или $1/r^2$. Принципиальным отличием поведения фундаментальных и сингулярных решений пороупругости от соответствующих решений для упругого случая является то, что разные компоненты матриц пороупругости имеют разные особенности [3]. Это определяет специфику вычислительного процесса.

3. Численные результаты

Рассмотрим задачу о действии силы на торец пороупругого призматического тела – составную консоль длиной $l = l_1 + l_2 = 9$ м (рис. 1). Будем исследовать перемещения и давление в точке A, удаленной на $l_2 = 1{,}5$ м от нагруженного торца. Граничные условия на плоскости $x_3 = 0$ следующие: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, а неизвестными являются t_1, t_2, t_3. Граничные условия на плоскости $x_3 = l$ следующие: $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$ Н/м^2, а неизвестными являются u_1, u_2, u_3. Граничные условия на боковой поверхности следующие: $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0$, а неизвестными являются: u_1, u_2, u_3. Для нахождения численного решения используется ГЭ-сетка, состоящая из 340 элементов. В исследовании материал обеих частей первоначально выбирался с одинаковыми свойствами, затем увеличивался коэффициент проницаемости части тела длиной l_2, контактирующей с другой однородной частью по плоскости, проходящей через точку A и параллельной координатной плоскости x_2Ox_1. Проведено исследование влияния изменения коэффициента проницаемости на граничные динамические отклики.

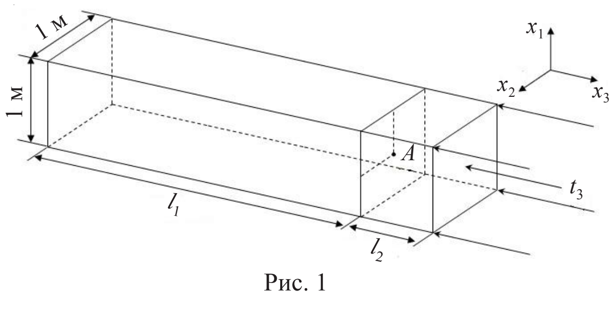

Рис. 1

На рис. 2, 3 представлены ГЭ-решения: соответственно отклики смещения и давления в точке A для следующих параметров пороупругого материала [2]: $K = 2{,}1 \cdot 10^8$ Н/м², $G = 9{,}8 \cdot 10^7$ Н/м², $\phi = 0{,}48$, $K_s = 1{,}1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $K_f = 3{,}3 \cdot 10^9$ Н/м², $k = 3{,}55 \cdot 10^{-9}$ м⁴/(Н·с), $\rho = 1884$ кг/м³, $\rho_f = 1000$ кг/м³.

Кривые на рис. 2, 3 построены для соответствующих коэффициентов k: *1* – для $k = 3{,}5 \cdot 10^{-9}$, *2* – для $k = 3{,}5 \cdot 10^{-7}$, *3* – для $k = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$.

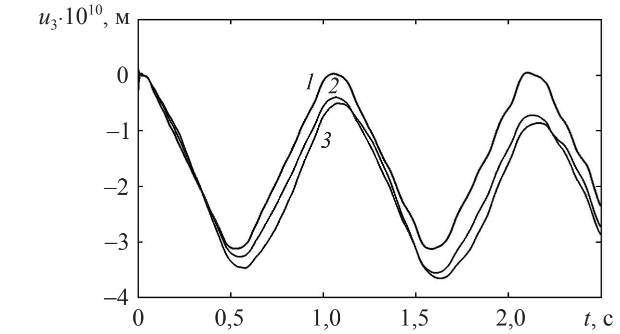

Рис. 2

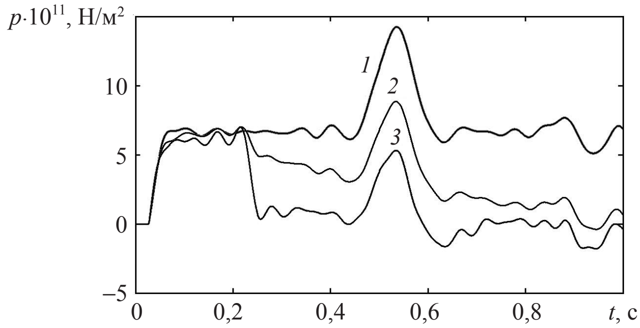

Рис. 3

На рис. 4, 5 представлены ГЭ-решения: отклики смещения и давления в точке A для следующих параметров пороупругого материала: $K = 8 \cdot 10^9$ Н/м², $G = 6 \cdot 10^9$ Н/м², $k = 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м⁴/(Н·с), $\rho = 2458$ кг/м³, $\rho_f = 1000$ кг/м³, $\phi = 0{,}19$, $K_s = 3{,}6 \cdot 10^9$ Н/м², $K_f = 3{,}3 \cdot 10^9$ Н/м². Кривые на рис. 4, 5 построены для соответствующих коэффициентов k: *1* – для $k = 1{,}9 \cdot 10^{-10}$, *2* – для $k = 1{,}9 \cdot 10^{-8}$, *3* – для $k = 1{,}9 \cdot 10^{-7}$.

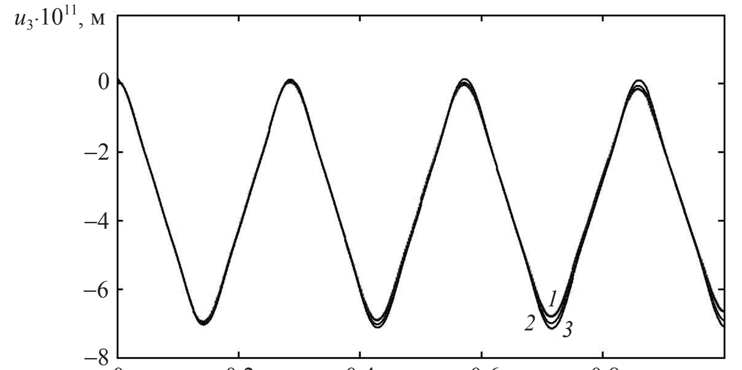

Рис. 4

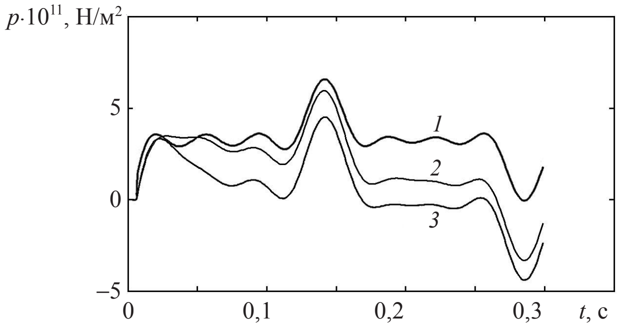

Рис. 5

Из анализа изменения давлений видно, что с ростом значения параметра проницаемости возникает эффект возбуждения в пороупругом теле волны Био: происходит падение амплитуды отклика давлений. Подобный эффект третьей волны демонстрируется в работах [6–8] на примере аналитического решения для пороупругого одномерного стержня.

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы $t_3(t) = t^0 f(t)$, $t^0 = -1000$ Н/м^2, на поверхность составного пороупругого полупространства (рис. 6). В качестве закона изменения приложенной нагрузки возьмем функцию Хэвисайда $f(t) = H(t)$. Дневная поверхность полупространства свободная и проницаемая: $p = 0$, поверхностные силы $t_i(t) = 0 \ \ (i = \overline{1,3})$, кроме участка *abcd*, где $t_3(t) = t^0 f(t)$. Площадь участка *abcd* составляет 1 м^2. Исследовались отклики в точках A, B, C и D дневной поверхности, удаленные от источника силы на 7,4, 9,6, 12,1 и 15,0 м соответственно. Кроме того, исследовалась точка E, расположенная под центральной точкой O, заглубленная на 10 м.

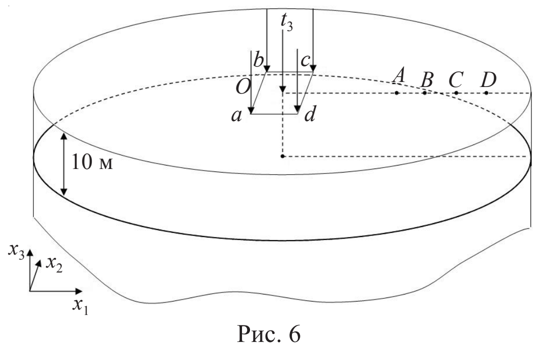

Рис. 6

В численных исследованиях пороупругие свойства слоя и полупространства выбирались одинаковыми, а затем в слое увеличивалось значение коэффициента проницаемости. При увеличении значений коэффициента проницаемости в однородном пороупругом теле наблюдается эффект распространения волны Био [2, 3]. В численных исследованиях ГЭ-сетка состоит из 1536 элементов на дневной поверхности и 1536 элементов в области контакта.

Рассмотрим следующие параметры пороупругого материала, соответствующие водонасыщенному песку: $K = 2{,}1\cdot10^8$ Н/м^2, $G = 9{,}8\cdot10^7$ Н/м^2, $\rho = 1884$ кг/м^3, $\phi =$ $= 0{,}48$, $K_s = 1{,}1\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $K_f = 3{,}3\cdot10^9$ Н/м^2, $k = 3{,}55\cdot10^{-9}$ м^4/(Н·с). Проведено исследование влияния изменения коэффициента проницаемости верхнего слоя полупространства на волновую картину. На рис. 7–9 приведены отклики перемещений   соответственно в точках E, A, D с различными значениями коэффициента проницаемости k. Кривые на рис. 7–9 построены для соответствующих коэффициентов k: *1* – для $k = 3{,}5\cdot10^{-9}$, *2* – для $k = 3{,}5\cdot10^{-7}$, *3* – для $k = 3{,}5\cdot10^{-6}$.

Влияние величины коэффициента проницаемости на отклик перемещений ярко выражено. С ростом коэффициента проницаемости увеличивается скорость волны Рэлея и изменяется величина амплитуды.

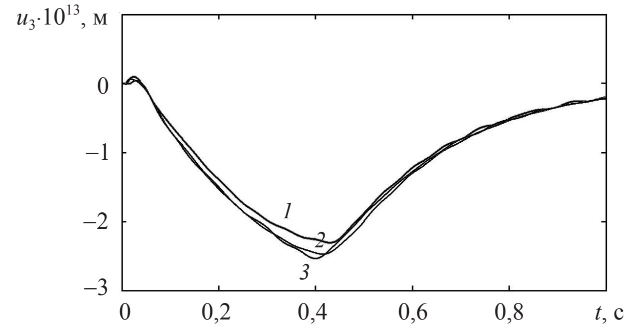

Рис. 7

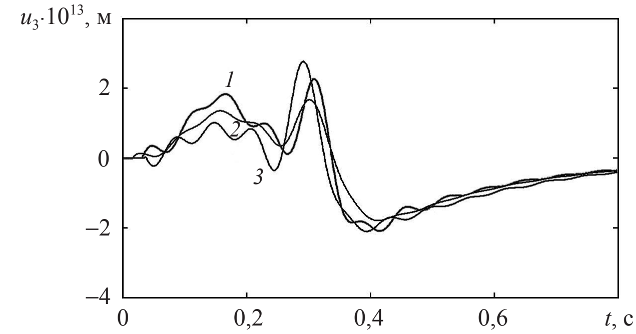

Рис. 8

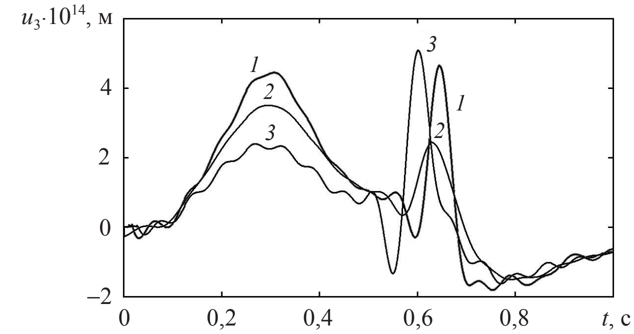

Рис. 9

На рис. 10 приведен отклик порового давления в точке E для различных значений коэффициента проницаемости (кривая *1* – для $k = 3{,}5\cdot10^{-9}$, *2* – для $k = 3{,}5\cdot10^{-7}$, *3* – для $k = 3{,}5\cdot10^{-6}$).

Приведенные исследования наглядно демонстрируют изменение динамических откликов в зависимости от того, насколько сильно выражен эффект проявления волн Био в одной из однородных частей составного пороупругого тела. Для конечного составного тела это наиболее наглядно демонстрируется на поровых давлениях, а для составного полупространства такое явление наиболее наглядно иллюстрирует отклик перемещений.

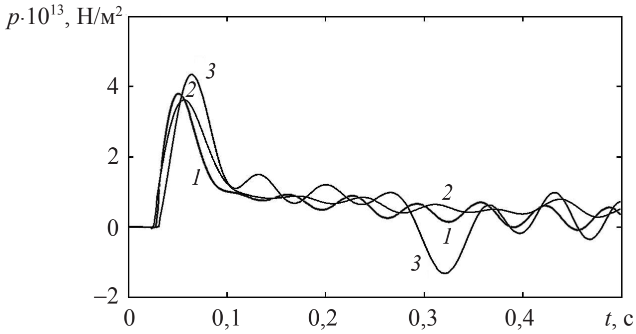

Рис. 10

Список литературы

1. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-suturated porous solid // J. Acust. Soc. Amer. 1956. V. 28. P. 168–191.

2. *Schanz M.* Wave propogation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.

3. *Аменицкий А.В.*, *Игумнов Л.А.*, *Карелин И.С.* Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2008. Вып. 70. С. 71–78.

4. *Баженов В.Г.*, *Белов А.А.*, *Игумнов Л.А.* Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. госуниверситета, 2009. 180 с.

5. *Баженов В.Г.*, *Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

6. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости / А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2009. Вып. 71. С. 164–171.

7. *Белов Л.А.*, *Карелин И.С.* Частные решения динамической пороупругости в одномерной постановке // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2010. Вып. 72. С.159–164.

8. *Schanz M.*, *Antes H.* Waves in poroelastic half space: Boundary element analyses – Porous media: theory, experiments, and numerical applications. Berlin: Springer, 2002. P. 383–412.

BOUNDARY-ELEMENT CONSTRUCTION OF SOLUTIONS FOR A 3D GREEN'S MATRIX

L.A. Igumnov, I.P. Markov, V.P. Pazin, A.A. Ipatov

The dynamics of a compound body, with one of its homogeneous parts showing a pronounced third-wave formation effect, is modeled. The problem is analyzed in the frame of the 3D dynamic poroelasticity theory. The boundary integral equation method in a direct formulation is used for the analysis. The results of numerical investigation obtained by using the boundary-element approach are given.

Keywords: boundary-element method, poroelasticity, Biot's wave.