

УДК 539.37

НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ*

© 2013 г.

М.С. Ганеева, В.Е. Моисеева

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

ganeeva@kfti.knc.ru

Поступила в редакцию 12.04.2013

Проведено сравнительное исследование нелинейного изгиба и устойчивости сферических и эллипсоидальных оболочек при разных видах нагружения, параметрах тонкостенности и характеристиках материала.

Ключевые слова: сферическая оболочка, эллипсоидальная оболочка, устойчивость, неосесимметричное нагружение.

Сферические оболочки во многих случаях имеют преимущества по характеристикам нелинейного изгиба и устойчивости [1] по сравнению с другими оболочками вращения. Однако при некоторых видах неосесимметричного нагружения эта картина может изменяться. В настоящей работе проведено сравнительное исследование нелинейного изгиба и устойчивости сферических и эллипсоидальных оболочек при разных видах нагружения, параметрах тонкостенности и характеристиках материала. Установлено, что при некоторых видах нагружения эллипсоидальные оболочки в силу переменности главных кривизн срединной поверхности выдерживают большие критические нагрузки потери устойчивости при меньшем уровне напряжений по сравнению со сферическими оболочками.

1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается оболочка вращения (рис. 1), замкнутая в окружном направлении [2]. За координатные линии приняты меридианы s , параллели φ и внешняя нормаль к срединной поверхности z . При этом $s_1 \leq s \leq s_N$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-0,5h \leq z \leq 0,5h$, $h(s)$ – толщина оболочки; $R_1(s)$, $R_2(s)$ – главные радиусы кривизны срединной поверхности; $r = R_2 \sin(\theta)$ – радиус параллели; $\theta \in [\theta_1, \theta_N]$ – угол между осью вращения оболочки x и нормалью к срединной поверхности z .

На оболочку действуют нагрузки $X_i^H(s, \varphi)$, $i = \overline{1, 3}$. Задача решается на основе уравнений теории оболочек Кирхгофа – Лява в геометрически нелинейной постановке при умеренных поворотах. Допускается работа материала за пределом упру-

* Работа выполнена при поддержке программой Президиума РАН «Фундаментальные проблемы механики и смежных наук в изучении многомасштабных процессов в природе и технике».

гости, связь между напряжениями и деформациями описывается уравнениями теории малых упругопластических деформаций [3]. Основные соотношения получены в недеформированных координатных линиях. Далее используются соотношения и обозначения работы [2].

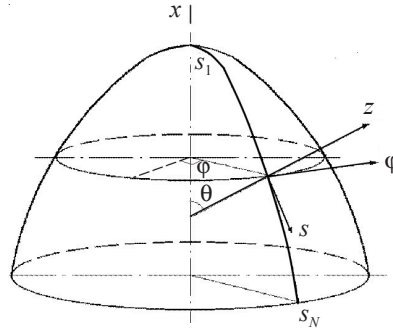


Рис. 1

Пусть действующие на оболочку нагрузки, граничные условия симметричны (антисимметричны) относительно некоторого меридионального сечения и представлены в виде тригонометрических рядов по координате φ :

$$X_i^H(s, \varphi) = \sum_{k=0}^n X_{i,k}^H(s) \cos k\varphi, \quad i=1,3; \quad X_2^H(s, \varphi) = \sum_{k=1}^n X_{2,k}^H(s) \sin k\varphi.$$

Для решения задачи используется метод разложения искомых функций

$$\mathbf{Y} = (T_{11}^H, T_{12}^H, Q_1^*, M_{11}, v_1, v_2, w, \vartheta_1)', \quad Q_1^* = Q_1^H + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi}$$

в тригонометрические ряды по окружной координате [4–6]:

$$w = \sum_{k=0}^L w_k(s) \cos k\varphi, \quad v_2 = \sum_{k=1}^L v_{2,k}(s) \sin k\varphi, \dots \quad (1.1)$$

В силу нелинейности задачи $L > n$, и значение L устанавливается численным экспериментом. Вводится вектор разрешающих функций для амплитуд гармоник рядов (1.1):

$$\mathbf{Z}_k = (T_{11,k}, T_{12,k}, Q_{1,k}, M_{11,k}, v_{1,k}, v_{2,k}, w_k, \vartheta_{1,k})', \quad k = \overline{0, L}. \quad (1.2)$$

Задача сводится к интегрированию ряда систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{Z}_k}{ds} = \mathbf{H}_k(s)\mathbf{Z}_k + \mathbf{g}_k(s, X_{i,k}^H) + \mathbf{\Gamma}_k(s, \mathbf{Y}) + \mathbf{\Phi}_k(s, \mathbf{Y}), \quad k = \overline{0, L} \quad (1.3)$$

при соответствующих граничных условиях:

$$\mathbf{A}_k \mathbf{Z}_k = \mathbf{a}_k \quad \text{при} \quad s = s_1, \quad \mathbf{B}_k \mathbf{Z}_k = \mathbf{b}_k \quad \text{при} \quad s = s_N, \quad k = \overline{0, L}. \quad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{H}_k(s)$ – матрица коэффициентов (8×8); \mathbf{g}_k – вектор (8×1) амплитуд нагрузочных членов; $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k$ – матрицы (4×8); $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k$ – векторы (4×1). При этом коэффициенты Фурье разложений, связывающих системы (1.3) геометрически и физически нелинейных членов $\mathbf{\Gamma}_k(s, \mathbf{Y}), \mathbf{\Phi}_k(s, \mathbf{Y})$ в ряды вида (1.1), подсчитываются численно по формулам Бесселя [7].

Для решения нелинейной краевой задачи (1.3), (1.4) используется метод последовательных приближений [4, 5] в сочетании с методом ортогональной прогонки [8]. Процесс последовательных приближений организован по ряду значений ведущего параметра, который обеспечивает сходимость процесса для получения полной картины характерной кривой зависимости параметров нагрузки и прогиба с определением предельных точек. Основу методики составляет алгоритм продолжения численного решения по интегральному параметру, который определяется эпюрой полуволны на амплитуде одной из основных гармоник прогиба в тригонометрическом ряду по окружной координате (1.1) [5, 6].

2. Нелинейный изгиб и устойчивость эллипсоидальной оболочки

Рассматривается деформирование сплюснутой полуэллипсоидальной оболочки: a, b – полуоси оболочки (a – радиус основания, b – высота полюса над основанием), h – толщина оболочки, $b/a = 0,5$; $\theta_1 = 0, \theta_N = \pi/2$. Главные радиусы кривизны срединной поверхности имеют вид [9]:

$$R_1 = \frac{b^2}{a} \left[\sin^2 \theta + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \theta \right]^{-1,5}, \quad R_2 = a \left[\sin^2 \theta + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \theta \right]^{-0,5}; \quad (2.1)$$

$$R_1(0) = R_2(0) = 2a; \quad R_1(\pi/2) = a/4, \quad R_2(\pi/2) = a; \quad R_1(0)/R_1(\pi/2) = 8.$$

Из (2.1) видно, что в окрестности экватора появляется подкрепляющий пояс за счет уменьшения радиуса кривизны меридиана R_1 . Особенность (2.1) отражается на всем напряженно-деформированном состоянии оболочки.

Материал оболочки следует закону линейного упрочнения [3] с коэффициентом упрочнения $\lambda = 0,9$; $\nu = 0,3$ – коэффициент Пуассона, $\sigma_s/E = 2,5 \cdot 10^{-3}$ – предел текучести, E – модуль упругости, $\sigma_i = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^{0,5}$ – интенсивность напряжений. Основание оболочки жестко заделано: $v_1 = 0, v_2 = 0, w = 0, \vartheta_1 = 0$.

Рассмотрены следующие случаи внешнего нормального давления X_3^H :

– осесимметричное нагружение

$$X_3^H = Q; \quad (2.2)$$

– неосесимметричные нагружения

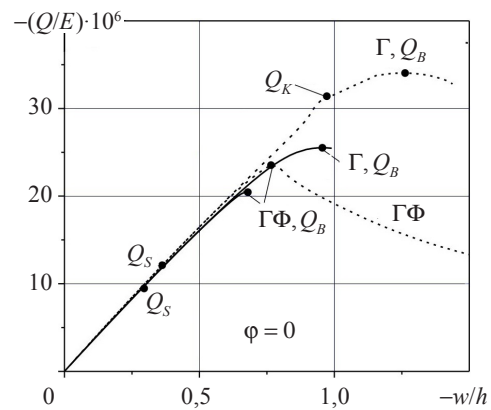
$$X_3^H = \begin{cases} Q, \theta \in [0, \theta_0], & \theta_0 = 0,03, \\ Q[1 + \sin(\theta - \theta_0)\cos\varphi], & \theta \in [\theta_0, \theta_N]; \end{cases} \quad (2.3)$$

$$X_3^H = \begin{cases} Q, \theta \in [0, \theta_0], & \theta_0 = 0,03, \\ Q[1 + \sin(\theta - \theta_0)(\cos\varphi + 0,5\cos 2\varphi)], & \theta \in [\theta_0, \theta_N]. \end{cases} \quad (2.4)$$

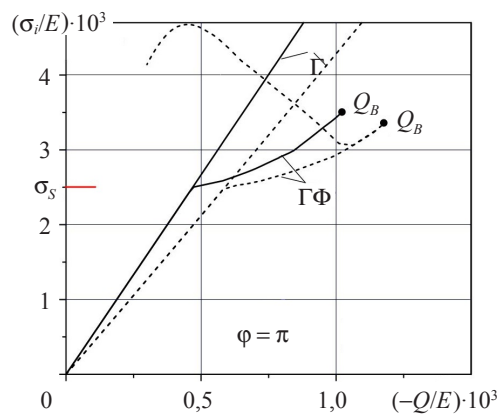
При одинаковом среднем давлении Q соотношения (2.2)–(2.4) задают одинаковый полный груз на поверхности оболочки. Далее приняты сокращения: Γ – геометрически нелинейное решение, $\Gamma\Phi$ – геометрически и физически нелинейное решение, НДС – напряженно-деформированное состояние, ГУ – граничные условия. Отметим, что Γ -решение соответствует случаю, когда материал оболочки имеет высокий предел текучести σ_s и оболочка деформируется упруго.

На рис. 2–4 представлены результаты вычислений для эллипсоидальной оболочки с параметром тонкостенности $a/h = 100$ ($b/a = 0,5$). На рис. 2 показана зависимость параметра нагрузки Q/E от параметра максимального прогиба $\max_{s,\varphi}(w/h)$

и максимальной интенсивности напряжений $\max_{s,\varphi,z}(\sigma_i/E)$ от параметра нагрузки для случая осесимметричного (2.2) (штриховые линии) и неосесимметричного нагружений (2.4) (сплошные линии). Отмечены следующие точки: Q_S – нагрузка, при которой достигается предел текучести $\max \sigma_i = \sigma_s$; Q_K – нагрузка волнообразования по параллели с числом волн $k=2$ при нагружении (2.2); Q_B – верхнее критическое значение параметра Q при нагружениях (2.2), (2.4). Из рис. 2 видно значительное влияние на НДС оболочки вида нагружения и учета Γ - и $\Gamma\Phi$ -нелинейностей, за исключением зависимости $Q(w)$ при прогибах $|w/h| \leq 0,6$ (см. рис. 2а).



а)



б)

Рис. 2

О характере поведения решения при нарастании параметра нагружения можно судить по рис. 3, 4, где приведены эпюры w/h и σ_i/E по меридиану оболочки s и параллели φ .

Для осесимметричного нагружения (2.2) видно, что на поверхности оболочки имеется область в окрестности основания, где прогиб всегда направлен противоположно действию давления (рис. 3а, б). С нарастанием нагрузки прогиб получает значительные вмятины в окрестности полюса (см. рис. 3а, б), что приводит к перемещению области $\max(\sigma_i/E)$ из окрестности заделки у основания $s = s_N$ в окрестность полюса (рис. 3в, г).

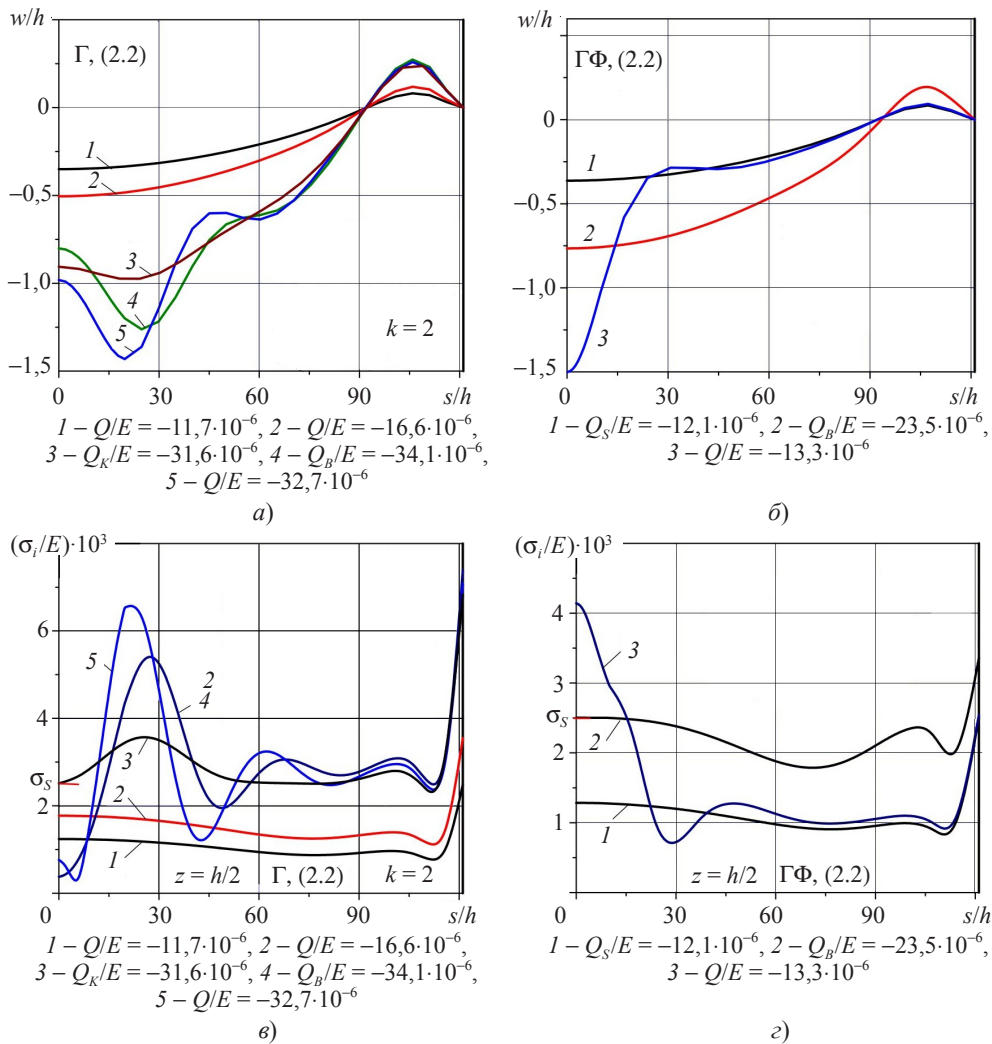


Рис. 3

При неосесимметричном нагружении (2.4) характеристики НДС эллипсоидальной оболочки значительно изменяются по ее поверхности (см. рис. 4). В окрестности полюса $w/h < 0$, на меридиане $\varphi = 0$ наблюдается $\max w$ (рис. 4а). В окрестности основания $w/h > 0$, $\max w$ наблюдается при $\varphi = \pi$ (рис. 4б). Другими словами, в силу особенности геометрии эллипсоидальной оболочки (2.1) при внешнем неосесимметричном давлении (2.4) в окрестности основания имеется пояс с $w/h > 0$. Оболочка выдавливается наружу, но неравномерно: окрестность меридиана $\varphi = 0$ имеет малые прогибы, а значительные прогибы наблюдаются на меридиане $\varphi = \pi$. Таким образом, окрестность меридиана $\varphi = \pi$ у основания претерпевает значительное деформирование, что обуславливает $\max_{s, \varphi, z}(\sigma_i/E)$ при $\varphi = \pi, s = s_N$ (рис. 4в, г).

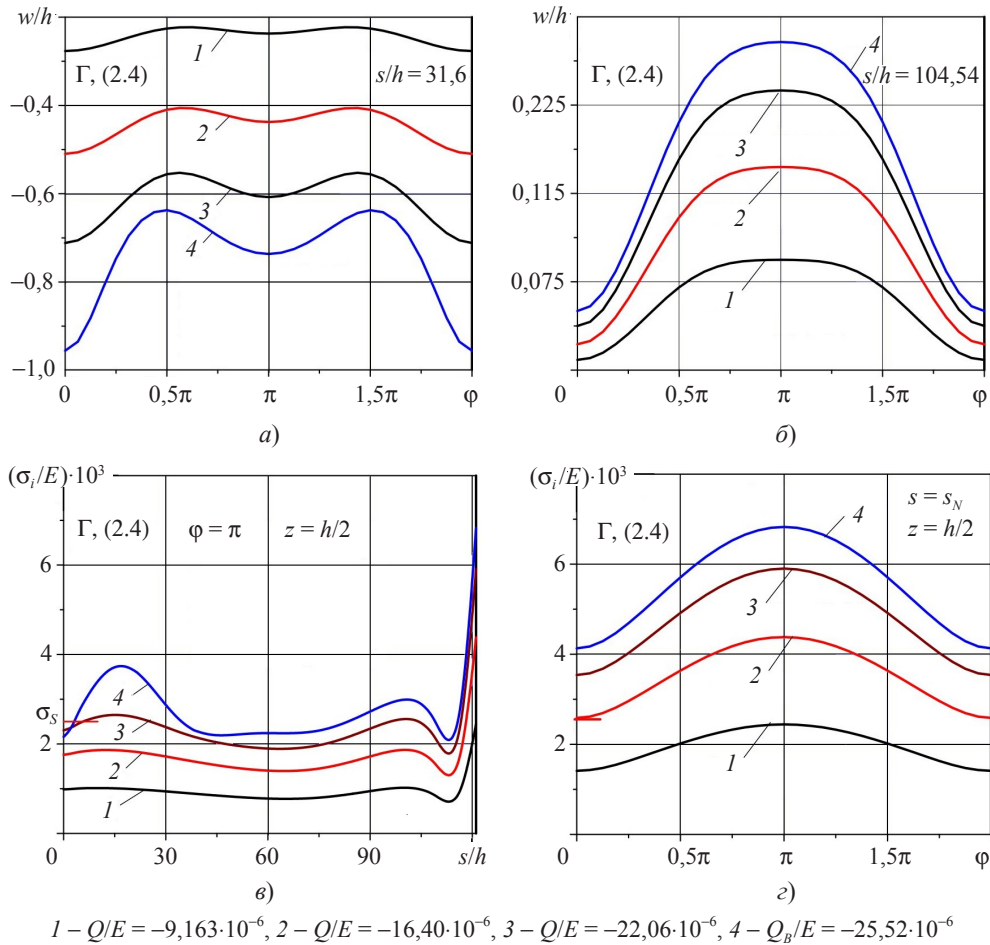


Рис. 4

3. Нелинейный изгиб и устойчивость сферической оболочки

Рассматривается деформирование сферической оболочки, для которой толщина h , радиус основания a , высота полюса над основанием $H = a/2$, характеристики материала, ГУ совпадают с данными для эллипсоидальной оболочки из п. 2. При этом $\theta_1 = 0, \theta_N = 0,9273$. Рассмотрены случаи осесимметричного нагружения (2.2) и неосесимметричных нагружений:

$$X_3^H = \begin{cases} Q, & \theta \in [0, \theta_0], \quad \theta_0 = 0,048, \\ Q[1 + 1,2976 \sin(\theta - \theta_0) \cos \varphi], & \theta \in [\theta_0, \theta_N]; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$X_3^H = \begin{cases} Q, & \theta \in [0, \theta_0], \quad \theta_0 = 0,048, \\ Q[1 + \sin(\theta - \theta_0)(1,2976 \cos \varphi + 0,6488 \cos 2\varphi)], & \theta \in [\theta_0, \theta_N]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Нагрузки (2.3), (2.4) и (3.1), (3.2) в силу различия в геометрии оболочек несколько различаются между собой в окрестности основания оболочек по направлению, но совпадают по величинам давления.

На рис. 5, 6 приведены результаты вычислений для сферической оболочки с параметром тонкостенности $a/h = 100$ ($H/a = 0,5$).

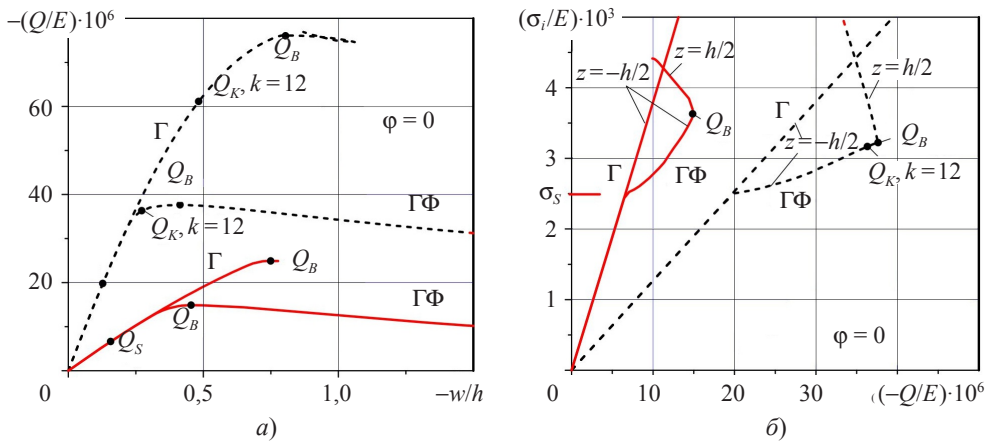
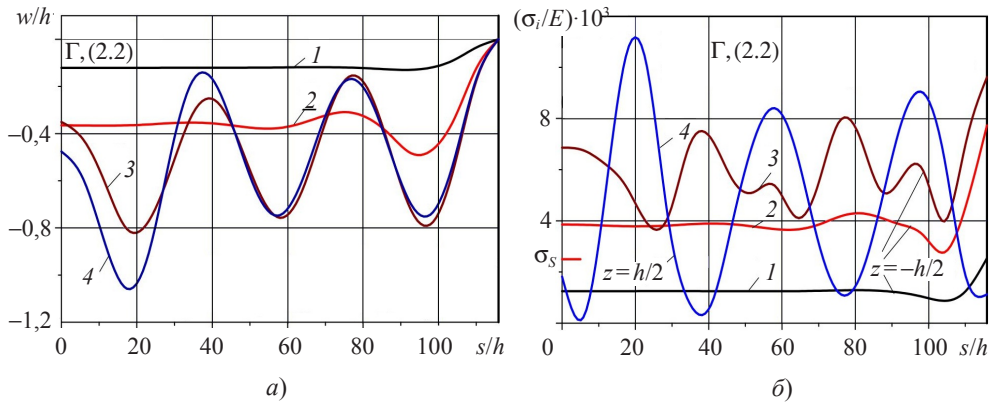
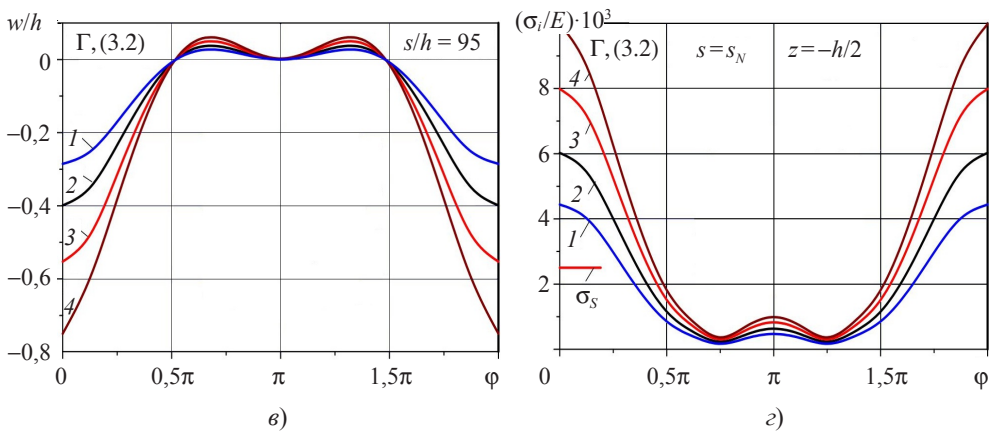


Рис. 5



1 - $Q/E = -20,00 \cdot 10^{-6}$, 2 - $Q_K/E = -61,00 \cdot 10^{-6}$, 3 - $Q_B/E = -76,10 \cdot 10^{-6}$, 4 - $Q/E = -74,60 \cdot 10^{-6}$



1 - $Q/E = -11,68 \cdot 10^{-6}$, 2 - $Q/E = -15,76 \cdot 10^{-6}$, 3 - $Q/E = -20,73 \cdot 10^{-6}$, 4 - $Q_B/E = -24,91 \cdot 10^{-6}$

Рис. 6

На рис. 5 представлены зависимости параметра нагрузки Q/E от параметра максимального прогиба $\max(w/h)$ и максимальной интенсивности напряжений $\max(\sigma_i/E)$ от параметра нагрузки для случая осесимметричного (2.2) (штриховые линии) и неосесимметричного нагружения (3.2) (сплошные линии).

Сравним особенности НДС сферической и эллипсоидальной оболочек. Зависимости $Q(w)$ для нагружений (2.2) и (3.2) различаются значительно с начального этапа деформирования. В случае осесимметричного нагружения (2.2) до верхней критической нагрузки Q_B $\max(w/h)$ наблюдается в окрестности основания оболочки $s/h \approx 95$, $\max(\sigma_i/E)$ – у заделанного основания s_N ; с нарастанием нагружения опасные области НДС оболочки перемещаются в окрестность полюса (рис. 6а, б). В случае неосесимметричного нагружения (3.2) наибольшему деформированию подвержена область наиболее нагруженного меридиана $\varphi = 0$: $\max(w/h)$ при $\varphi = 0$, $s/h \approx 95$, $\max(\sigma_i/E)$ при $s = s_N$ (рис. 6в, г).

4. Результаты исследования

В таблицах 1, 2 дано сравнение НДС эллипсоидальной и сферической оболочек. Приведены безразмерные значения параметра нагрузки Q/E , максимальных значений прогиба $\max(w/h)$ и интенсивности напряжений $\max(\sigma_i/E)$ при нагружениях (2.2)–(2.4), (3.1), (3.2), значения параметра L в рядах (1.1), необходимые для получения нелинейного решения при неосесимметричном нагружении. Сравниваются критические значения параметра нагрузки потери устойчивости для сферической Q_B^C и эллипсоидальной Q_B^3 оболочек. Приняты сокращения: СФ – сферическая оболочка, ЭЛ – эллипсоидальная оболочка.

В таблице 1 представлено решение для оболочек с параметром $a/h = 100$. В строках 1–4 даны результаты в окрестности предела текучести σ_s , для получения которых достаточно $L = 4$.

Таблица 1

Нагружение		(2.2)	(3.1)	(2.3)	(3.2)	(2.4)	№ строки
Оболочка		СФ	ЭЛ	СФ	ЭЛ	СФ	
Окрестность $\max \sigma_i = \sigma_s$	L	0	0	4	4	4	1
	$-(Q_s/E) \cdot 10^6$	19,80	12,12	8,465	9,264	6,617	9,468
	$-w/h$	0,128	0,363	0,154	0,275	0,157	0,287
	$(\sigma_i/E) \cdot 10^3$	2,501	2,508	2,506	2,501	2,500	2,503
Окрестность $Q_B; \Gamma$	L	0	0	18	6	20	12
	$-(Q_B/E) \cdot 10^6$	76,10	34,05	32,51	29,25	24,91	25,52
	$-w/h$	0,814	1,246	0,693	1,012	0,750	0,956
	$(\sigma_i/E) \cdot 10^3$	9,633	7,389	9,828	7,934	9,979	6,825
Окрестность $Q_B; \Gamma\Phi$	L	0	0	18	6	20	12
	$-(Q_B/E) \cdot 10^6$	37,64	23,54	18,40	22,74	14,88	20,45
	$-w/h$	0,411	0,765	0,408	0,845	0,455	0,677
	$(\sigma_i/E) \cdot 10^3$	3,222	3,360	3,498	4,298	3,629	3,504

Для получения решения в окрестности параметра Q_B требуется увеличение значения L . При осесимметричном нагружении ($L = 0$) $Q_B^C \gg Q_B^{\exists}$. Однако при неосесимметричном нагружении значения Q_B^C, Q_B^{\exists} или сближаются – при высоких механических характеристиках материала (строка 6), или $Q_B^{\exists} > Q_B^C$ (строка 10).

В таблице 2 приведены значения для более тонкостенных оболочек ($a/h = 200$). Выводы по таблице 1 при $L = 0$ в таблице 2 сохраняются. При $L > 0$ наблюдается малое влияние ГФ-нелинейности со сближением параметров Q_B^C, Q_B^{\exists} .

Таблица 2

Нагружение		(2.2)		(3.2)	(2.4)	№ строки
Оболочка		СФ	ЭЛ	СФ	ЭЛ	
Окрестность $\max \sigma_i = \sigma_s$ s, φ, z	L	0	0	6	6	1
	$-(Q_s/E) \cdot 10^6$	9,889	5,629	3,298	4,547	2
	$-w/h$	0,266	0,699	0,326	0,577	3
	$(\sigma_i/E) \cdot 10^3$	2,500	2,506	2,505	2,501	4
Окрестность $Q_B; \Gamma$	L	0	0	26	10	5
	$-(Q_B/E) \cdot 10^6$	19,24	8,399	6,315	6,506	6
	$-w/h$	0,843	1,223	0,693	0,951	7
	$(\sigma_i/E) \cdot 10^3$	4,996	3,759	4,858	3,591	8
Окрестность $Q_B; \Gamma\Phi$	L	0	0	24	10	9
	$-(Q_B/E) \cdot 10^6$	15,40	8,396	5,783	6,504	10
	$-w/h$	0,572	1,199	0,626	0,956	11
	$(\sigma_i/E) \cdot 10^3$	2,875	2,761	3,005	2,708	12

Таким образом, установлено, что в отличие от сферических оболочек в эллипсоидальной оболочке при внешнем нормальном давлении в окрестности основания возникает подкрепляющий пояс в виде прогибов, противоположных направлению действия нагрузки. Эта особенность приводит к развитию максимальных напряжений в окрестности основания слабо нагруженной области $\varphi = \pi$ при неосесимметричном внешнем давлении. Также при таком нагружении критические нагрузки потери устойчивости эллипсоидальной оболочки или сближаются, или превышают их значения для сферической оболочки со снижением уровня напряжений по сравнению со случаем осесимметричного нагружения.

Список литературы

1. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Физматлит, 1978. 360 с.
2. Ганеева М.С. Прочность и устойчивость оболочек вращения. М.: Наука, 1992. 161 с.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч. I. Упругопластические деформации. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948. 376 с.
4. Ганеева М.С., Моисеева В.Е. Методика расчета больших прогибов непологих упруго-пластических оболочек вращения при неосесимметричном нагружении // Изв. вузов. Авиационная техника. 2007. № 4. С. 3–7.
5. Ганеева М.С., Моисеева В.Е., Скворцова З.В. Расчет нелинейного напряженно-деформированного состояния непологих оболочек вращения под действием ветровой нагрузки // Изв. вузов. Проблемы энергетики. 2009. № 9–10. С. 89–98.
6. Ганеева М.С., Моисеева В.Е. Нелинейное деформирование оболочек вращения с полюсом под действием неосесимметричного нагружения // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2009. №3. С. 31–38.

7. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа: Справочное руководство. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.

8. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1961. Т. 16, №3. С. 171–174.

9. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

**NONLINEAR BENDING AND STABILITY OF SPHERICAL
AND ELLIPSOIDAL SHELLS UNDER NON-AXISYMMETRIC LOADING**

M.S. Ganeeva, V.E. Moiseeva

The paper gives a comparative analysis of nonlinear bending and stability of spherical and ellipsoidal shells with various wall thickness and material characteristics under various types of loading.

Keywords: spherical shell, ellipsoidal shell, stability, non-axisymmetric loading.