

УДК 539.3+534.1

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ДИНАМИКИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ТРУБОПРОВОДА  
С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ<sup>\*)</sup>**

© 2012 г. **А.А. Горбунова, Д.В. Капитанов, Л.В. Смирнов**

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского*

labdin@mech.unn.ru

*Поступила в редакцию 13.04.2012*

Представлены результаты аналитического исследования динамики криволинейного трубопровода простой геометрической формы при волновом процессе в потоке жидкости. Показана опасность возбуждения вынужденных колебаний трубопровода при близости и совпадении частот собственных колебаний последнего и основной гармоники возникающей гидродинамической силы. Результаты предназначены для контролирования работы имеющегося универсального программного комплекса и получения качественного представления о характере процессов и их зависимости от параметров и возмущения.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, трубопровод, сжимаемая жидкость, гидравлический удар, волновой процесс, аналитические методы, колебания, резонанс.

Рассматриваются колебания гидроупругой системы, представляющей собой трубопровод с нестационарным потоком жидкости. Для такого типа систем в общем случае характерно самосогласованное взаимодействие двух подсистем разной физической природы: упругой конструкции (механическая подсистема) и потока жидкости (гидродинамическая подсистема). Не обращаясь к общим представлениям о динамике гидроупругих систем [1], рассмотрим математическую модель трубопровода с потоком жидкости как частный вид такой системы в предположении, что гидродинамическое воздействие на упругую конструкцию не зависит от ее деформации.

При исследовании низкочастотных процессов динамической деформации достаточно длинный трубопровод можно представить в виде криволинейного стержня с одномерным потоком транспортируемой жидкости. В общем случае математическая модель рассматриваемой гидроупругой системы состоит из двух систем уравнений. Во-первых, это векторное уравнение в частных производных взаимосвязанных изгибно-продольно-крутильных динамических деформаций рассматриваемой как пространственный стержень оболочки трубопровода. Уравнение имеет двенад-

---

<sup>\*)</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-08-97040-р\_Поволжье\_а), Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (ГК № 16.740.11.0087).

цатый порядок по отсчитываемой вдоль оси продольной координате (механическая подсистема). Во-вторых, это система уравнений течения сжимаемой жидкости, движущейся вдоль оси трубопровода, имеющая второй порядок по продольной координате (гидравлическая подсистема).

Вывод и анализ таких уравнений, а также примеры исследования с их использованием представлены в литературе (например, обобщения многочисленных публикаций авторов в монографиях [1, 2]). Эти математические модели и соответствующая программная реализация, используемая при проектировании и анализе результатов эксплуатации современных технических систем, достаточно сложны (см., например, [1–3]). Практическое использование получаемых численными методами частных решений при исследованиях, проводимых в проектно-конструкторских и научно-исследовательских организациях, требует дополнительного обоснования в виде анализа качественной и количественной зависимости этих решений от параметров, начальных условий и возмущений. Получить такую информацию на основе только частных решений не удастся. В связи с этим целесообразно проведение исследований относительно простых, иногда предельных случаев, когда появляется возможность получения необходимой информации с помощью применения аналитических методов. Результаты такого исследования представлены далее.

### 1. Математическая модель колебаний трубной оболочки

Рассматривается случай низкочастотных колебаний трубопровода в виде расположенного в вертикальной плоскости и содержащего поток жидкости длинного стержня, который состоит из трех прямолинейных участков. Концы трубопровода жестко закреплены. Схема трубопровода и участка гидросистемы представлена на рис. 1.

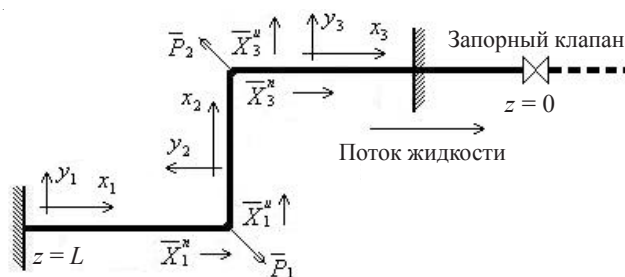


Рис. 1

В рассматриваемом случае движения трубопровода в плоскости конструкции и перпендикулярной ей плоскости не связаны. Обусловленные волновыми гидродинамическими процессами силы воздействия на трубопровод лежат в плоскости конструкции и вызывают его колебания в этой же плоскости.

В связи с этим и в соответствии с подходом Рэлея решение задачи ищется в виде  $\bar{U}(x,t) = \bar{X}(x)\tau(t)$ , где  $\bar{U}(x,t)$  – представленный продольными и поперечными в плоскости конструкции деформациями вектор перемещения, который для каждого прямолинейного участка ищется отдельно из условия статического равновесия системы.

Уравнения статической деформации под действием веса и получающиеся при их интегрировании формы, соответствующие изгибу и растяжению прямолинейных участков, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 EI \frac{d^4 U_1^u(x_1)}{dx_1^4} &= mg, & EIU_1^u(x_1) &= \frac{mgx_1^4}{24} + \frac{c_1 x_1^3}{6} + \frac{c_2 x_1^2}{2} + c_3 x_1 + c_4; \\
 EF \frac{d^2 U_1^n(x_1)}{dx_1^2} &= 0, & EFU_1^n(x_1) &= c_5 x_1 + c_6; \\
 EI \frac{d^4 U_2^u(x_2)}{dx_2^4} &= 0, & EIU_2^u(x_2) &= \frac{c_7 x_2^3}{6} + \frac{c_8 x_2^2}{2} + c_9 x_2 + c_{10}; \\
 EF \frac{d^2 U_2^n(x_2)}{dx_2^2} &= mg, & EFU_2^n(x_2) &= \frac{mgx_2^2}{2} + c_{11} x_2 + c_{12}; \\
 EI \frac{d^4 U_3^u(x_3)}{dx_3^4} &= mg, & EIU_3^u(x_3) &= \frac{mgx_3^4}{24} + \frac{c_{13} x_3^3}{6} + \frac{c_{14} x_3^2}{2} + c_{15} x_3 + c_{16}; \\
 EF \frac{d^2 U_3^n(x_3)}{dx_3^2} &= 0, & EFU_3^n(x_3) &= c_{17} x_3 + c_{18}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $x_j$  – продольная координата, меняющаяся от нуля до  $l_j$  ( $j=1, 3$  – номер участка);  $EI$  – изгибная жесткость;  $F$  – площадь поперечного сечения оболочки трубопровода;  $mg$  – вес оболочки и жидкости, приходящийся на единицу длины; верхние индексы  $u, n$  соответствуют изгибной и продольной деформациям.

Постоянные интегрирования  $c_i, i=1, 18$ , ищутся с учетом согласования граничных условий на концах указанных участков.

В закрепленных концах граничные условия таковы:

$$\begin{aligned}
 U_1^u(x_1) \Big|_{x_1=0} &= U_1^n(x_1) \Big|_{x_1=0} = U_3^u(x_3) \Big|_{x_3=l_3} = U_3^n(x_3) \Big|_{x_3=l_3} = 0, \\
 \frac{\partial U_1^u(x_1)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} &= \frac{\partial U_3^u(x_3)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=l_3} = 0.
 \end{aligned}$$

В точках соединения прямолинейных участков граничные условия представлены в виде равенства сил, моментов сил и смещений:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U_1^u(x_1)}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=l_1} &= \frac{\partial^2 U_2^u(x_2)}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0}, & EI \frac{\partial^3 U_1^u(x_1)}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=l_1} &= EF \frac{\partial U_2^n(x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0}, \\
 EF \frac{\partial U_1^n(x_1)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1} &= -EI \frac{\partial^3 U_2^u(x_2)}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=0}, & U_1^u(x_1) \Big|_{x_1=l_1} &= U_2^n(x_2) \Big|_{x_2=0}, \\
 U_1^n(x_1) \Big|_{x_1=l_1} &= -U_2^u(x_2) \Big|_{x_2=0}, & \frac{\partial U_1^u(x_1)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1} &= \frac{\partial U_2^u(x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0}, \\
 \frac{\partial^2 U_2^u(x_2)}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=l_2} &= \frac{\partial^2 U_3^u(x_3)}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=0}, & EF \frac{\partial U_2^n(x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2} &= EI \frac{\partial^3 U_3^u(x_3)}{\partial x_3^3} \Big|_{x_3=0},
 \end{aligned}$$

$$EI \frac{\partial^3 U_2^u(x_2)}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=l_2} = -EF \frac{\partial U_3^n(x_3)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0}, \quad U_2^n(x_2) \Big|_{x_2=l_2} = U_3^u(x_3) \Big|_{x_3=0},$$

$$U_2^u(x_2) \Big|_{x_2=l_2} = -U_3^n(x_3) \Big|_{x_3=0}, \quad \frac{\partial U_2^u(x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2} = \frac{\partial U_3^u(x_3)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0}.$$

В результате для компонент вектора  $\bar{X}_i(x)$  имеем аппроксимации форм продольных  $X_i^n(x)$  и изгибных  $X_i^u(x)$  колебаний для каждого участка.

Закон движения представляется в виде:

$$\bar{U}_i(x_i, t) = \bar{X}_i(x_i) \tau(t) = \left( \bar{X}_i^u(x_i) + \bar{X}_i^n(x_i) \right) \tau(t).$$

Выражение для кинетической энергии трубопровода при колебаниях имеет вид:

$$T = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{m}{2} \left( \frac{d\bar{U}_i(x_i, t)}{dt} \right)^2 dx_i = \sum_{i=1}^3 \frac{m l_i}{2} \int_0^1 \left[ \left( \bar{X}_i^u(x_i) + \bar{X}_i^n(x_i) \right) \frac{d\tau(t)}{dt} \right]^2 dx_i,$$

где  $l_i$  – длина соответствующего участка.

Выражение для потенциальной энергии, определяющееся поперечной и продольной деформациями участков, записывается в виде:

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{l_i} EI \left( \frac{\partial^2 X_i^u(x_i)}{\partial x_i^2} \tau(t) \right)^2 dx_i + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} EF \left( \frac{\partial X_i^n(x_i)}{\partial x_i} \tau(t) \right)^2 dx_i \right].$$

Выражение учтенной в модели работы непотенциальных сил включает в себя два слагаемых. Во-первых, это работа силы вязкого трения на поперечном перемещении:

$$\delta A_{mp} = - \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \xi \left( \frac{\partial (X_i^u(x_i) \tau(t))}{\partial t} \right) \delta (X_i^u(x_i) \tau(t)) dx_i = - \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \xi (X_i^u(x_i))^2 \left( \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \right) \delta \tau(t) dx_i;$$

во-вторых, это работа определяющихся давлением гидродинамических сил  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$  в точках поворота потока [1]:

$$\delta A_p = \delta A_{p1} + \delta A_{p2},$$

$$\delta A_{p1} = \bar{P}_1 \cdot \delta \bar{U}_1(l, t) = \bar{P}_1 \cdot \bar{X}_1(l) \delta \tau(t), \quad \delta A_{p2} = \bar{P}_2 \cdot \delta \bar{U}_3(0, t) = \bar{P}_2 \cdot \bar{X}_3(0) \delta \tau(t).$$

Давления в этих точках находятся из решения гидродинамической задачи.

Выражения для  $T$ ,  $\Pi$ ,  $\delta A_{mp}$ ,  $\delta A_p$  в дальнейшем используются для получения представленной в п. 3 модели в виде уравнения Лагранжа второго рода.

## 2. Математическая модель одномерного неуставившегося движения сжимаемой жидкости

Используемая в теории гидравлического удара математическая модель неуставившегося квазиодномерного движения однородной сжимаемой жидкости имеет вид [4]:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - i, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x},$$

где  $z$  – координата вдоль оси потока;  $v(z, t)$  – скорость жидкости;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $y = h + p/(\rho g)$  – пьезометрический напор;  $p(z, t)$  – давление;  $a$  – скорость звука с учетом радиальной податливости стенок трубопровода;  $\rho$  – плотность жидкости;  $h$  – пьезометрическая высота, считающаяся постоянной;  $i$  – гидравлический уклон, определяющийся потерями на трение.

Эта система неразрешима в квадратурах из-за наличия нелинейной зависимости потерь на трение от скорости.

Если положить  $i = 0$ , полученную систему можно проинтегрировать аналитически. Дифференцируя первое уравнение по  $z$ , а второе по  $t$ , исключим из них переменную  $v$ , а затем, дифференцируя первое уравнение по  $t$ , а второе по  $z$ , исключим переменную  $y$ . В результате получим:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Это волновые уравнения, общие интегралы которых соответственно имеют вид:

$$y = y_0 = F\left(t - \frac{z}{a}\right) + f\left(t + \frac{z}{a}\right), \quad v = v_0 = \frac{g}{a} \left[ F\left(t - \frac{z}{a}\right) + f\left(t + \frac{z}{a}\right) \right],$$

где  $y_0$  и  $v_0$  – значения до возникновения неустановившегося режима,  $F$  и  $f$  – соответствующие прямой и обратной (отраженной) волнам произвольные функции, определяемые начальными условиями.

В рассматриваемом случае причиной возникающего волнового процесса является мгновенное закрытие запорного клапана (см. рис. 1), и волна гидравлического удара движется от точки установки клапана ( $z = 0$ ), в которой  $v(z, t)$  обращается в нуль, вдоль оси потока в направлении сечения  $z = L$ , в котором поддерживается постоянное давление  $p(L, t)$ . Дальнейший процесс определяется многократным отражением волны в точках  $z = L$  и  $z = 0$  в соответствии с указанными граничными условиями.

Форма волн возникающего гидравлического удара существенно зависит от определяющего изменения скорости в точке  $z = 0$  закона закрытия установленного в этой точке запорного клапана. В случае его мгновенного закрытия начальный скачок давления может быть оценен по формуле Н.Е. Жуковского [4]:

$$p - p_0 = \rho v_0 a.$$

Закон изменения давления в точках изгиба имеет вид:

$$p_i\left(\frac{z_i}{a}, t\right) = F\left(t - \frac{z_i}{a}\right) + f\left(t + \frac{z_i}{a}\right), \quad i = 1, 2;$$

здесь  $z_i$  – координата соответствующей точки изгиба, отсчитываемая от места нахождения клапана (см. рис. 1).

Для возникающего в рассматриваемом случае волнового процесса имеем аналитическое выражение:

$$F\left(\frac{z}{a}, t\right) = \begin{cases} 0, & t < \frac{4Ln}{a} + \frac{z}{a}, \\ V_0 a \rho, & \frac{4Ln}{a} + \frac{z}{a} \leq t \leq \frac{2(2n+1)L}{a} - \frac{z}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & t > \frac{2(2n+1)L}{a} - \frac{z}{a}; \end{cases}$$

$$f\left(\frac{z}{a}, t\right) = \begin{cases} 0, & t < \frac{2(2n-1)L}{a} + \frac{z}{a}, \\ -V_0 a p, & \frac{2(2n-1)L}{a} + \frac{z}{a} \leq t \leq \frac{4Ln}{a} - \frac{z}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & t > \frac{4Ln}{a} - \frac{z}{a}. \end{cases}$$

Здесь  $n$  – номер так называемой фазы гидравлического удара, равной  $2L/a$ , определяющей моменты времени, когда происходит скачкообразное изменение давления [4].

Выражение для силы  $P(t)$ , действующей на оболочку трубопровода и определяющей давлениями в двух точках изгиба, имеет вид:

$$P(t) = (p(z_2, t)X_3''(0) - p(z_1, t)X_1''(l_1))S,$$

где  $S$  – площадь сечения прохода.

### 3. Результаты расчета колебаний трубопровода при волновом процессе в потоке транспортируемой среды

С использованием представленных в п.1 выражений для  $T$ ,  $\Pi$ ,  $\delta A_{mp}$ ,  $\delta A_p$  получим математическую модель в виде уравнения Лагранжа второго рода, применяемую для аналитического, а при необходимости и численного определения движения трубопровода при рассмотренных волновых процессах в потоке:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\tau}(t)} - \frac{\partial T}{\partial \tau(t)} + \frac{\partial \Pi}{\partial \tau(t)} = Q,$$

где

$$Q \delta \tau(t) = \delta A_{mp} + \delta A_p.$$

При  $t \leq 0$ , то есть до мгновенного закрытия клапана, трубопровод находился в покое:

$$U(z, t)|_{t=0} = 0 \Rightarrow \tau(t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{dU(z, t)}{dt}|_{t=0} = 0 \Rightarrow \frac{d\tau(t)}{dt}|_{t=0} = 0.$$

Для демонстрации особенностей поведения системы трубопровод–жидкость был рассмотрен поток воды в стальной трубе:  $E = 200$  ГПа,  $\rho_{mp} = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{ж} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Длины каждого прямолинейного участка равны 3 м, внешний радиус нормального сечения трубы  $R_1 = 0,1365$  м, внутренний радиус  $R_2 = 0,1285$  м. В силу симметрии системы движение горизонтальных участков трубопровода описывается только изгибными смещениями, причем  $X_1''(l) = X_3''(0)$ . Определяющую частоту основной гармоники вынуждающей силы общую длину  $L$  рассматриваемого участка гидросистемы изменяли с целью продемонстрировать возможные критические случаи. Начальная скорость потока жидкости  $v_0 = 1,65$  м/с, а скорость звука  $a$  в расчетах принята равной 1000 м/с.

В случае отсутствия трения общий вид уравнения движения в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$\ddot{\tau}(t) + k^2 \tau(t) = \Phi(t).$$

Параметр  $k$  и функция  $\Phi(t)$  выражаются через параметры системы.

Рассмотрены три варианта длины участка гидросистемы  $L$ .

Характер колебаний трубопровода определяется соотношением частот его собственных колебаний и обусловленных основной гармоникой волнового процесса вынужденных колебаний. Для анализа случая сильного различия этих частот длина рассматриваемого участка гидросистемы  $L$  выбрана равной 10 м. На рис. 2 последовательно представлены функции изменения отклонения давления в нижней и верхней точках изгиба трубопровода  $p(L-3, t)$ ,  $p(L-6, t)$  и закон изменения обобщенной силы, то есть функция  $P(t)$ .

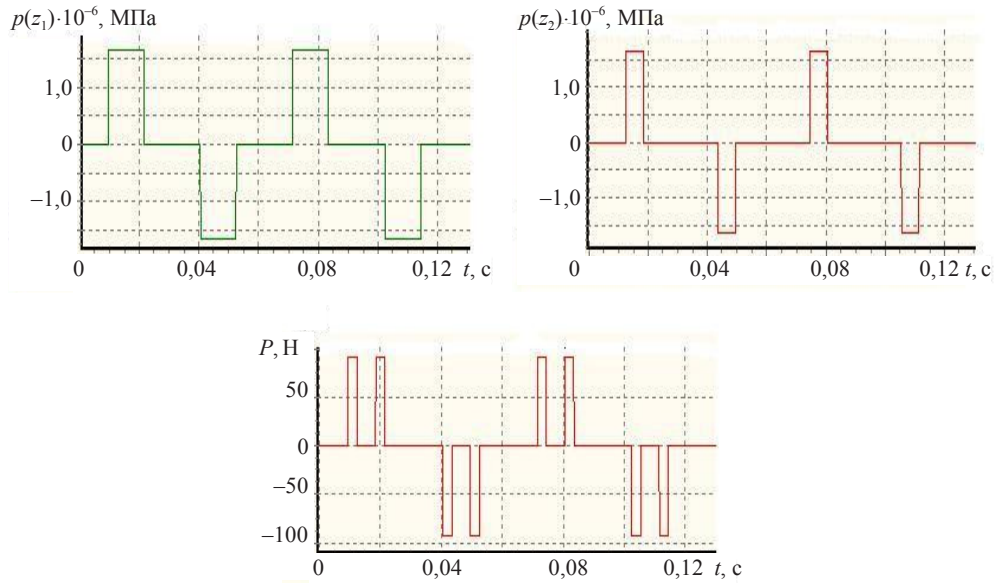


Рис. 2

Важным фактором, определяющим характер вынужденных колебаний трубопровода, является соотношение частот собственных колебаний и основной гармоники вынуждающей силы  $P(t)$ . При заданной скорости звука  $a$  частота основной гармоники определяется величиной  $L$ .

На рис. 3 последовательно представлены для разных  $L$  графики перемещения правого конца первого участка трубопровода при отсутствии трения. При близости этих частот ( $L = 14,7$  м) наблюдаются биения, а при их равенстве ( $L = 15,49$  м) – резонанс. При биениях амплитуда значительно больше, чем в нерезонансной ситуации ( $L = 10$  м), а при резонансе амплитуда линейно растет до бесконечности.

При наличии трения уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{\tau}(t) + 2\xi\dot{\tau}(t) + k^2\tau(t) = \Phi(t),$$

где  $\xi$  – коэффициент, характеризующий трение.

На рис. 4 приведены результаты расчетов при уровне затухания, принятом равным 5% от критического. Соответственно представлены графики перемещения правого конца первого участка трубопровода при тех же значениях  $L$ , когда частоты собственных и вынужденных колебаний соответственно различны, близки и совпадают.

Обращает на себя внимание значительное различие амплитуд колебаний при биении и резонансе по сравнению со случаем, когда частоты сильно отличаются.

Влияние потерь на трение состоит в быстром затухании собственных колебаний, в фактическом исчезновении биений и ограничении установившейся резонансной амплитуды колебаний при совпадении и близости частот.

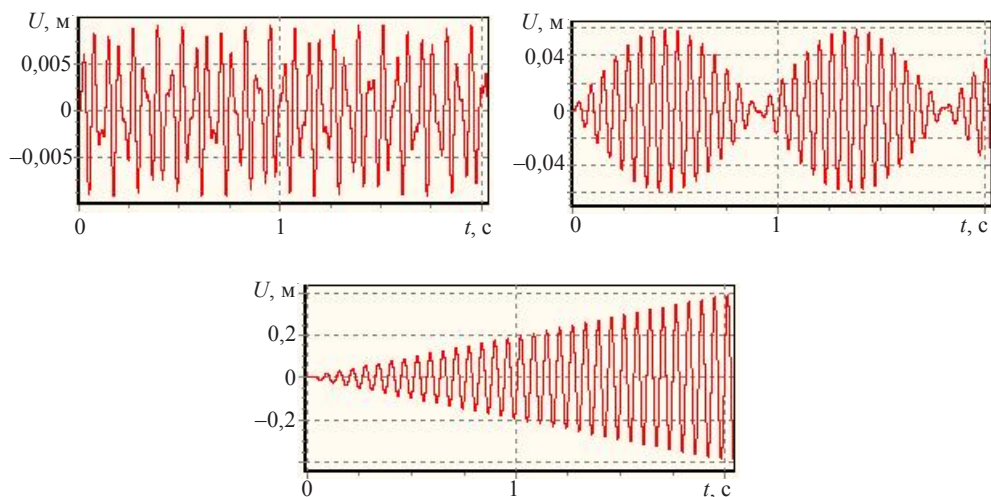


Рис. 3

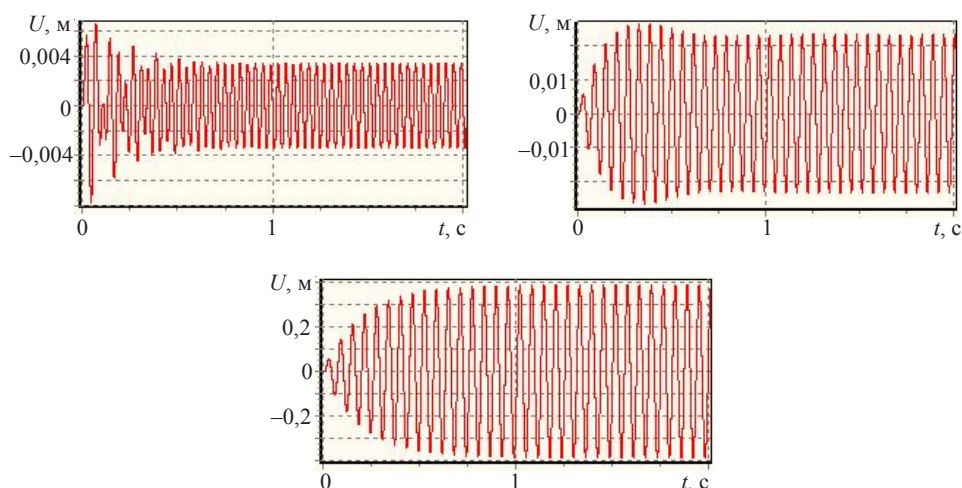


Рис. 4

Были также проведены расчеты с использованием программного комплекса RANT [3], разработанного для расчета трубопроводов на статическую прочность, вибропрочность и сейсмические воздействия. Получено совпадение результатов.

Таким образом, проведенное исследование позволяет получить качественное представление о характере возбуждения волнового процесса, о вызываемых этим процессом вынужденных колебаниях трубопровода и о зависимости процесса от параметров. Сравнение с результатами, полученными с применением универсального программного комплекса, свидетельствует о правильной работе последнего. Этот вывод важен с точки зрения использования результатов проведенного исследования в качестве проверки и обоснования необходимости коррекции сложных



математических моделей и их программной реализации. Пример численного расчета для аналогичной задачи с использованием программного комплекса RANT представлен в работе [5].

Рассмотрение относительно простого случая, позволяющего применять аналитические методы и упрощенные численно-аналитические исследования, имеет методическое значение и будет использовано в учебном процессе.

Исследование случаев более сложного вида начального возмущения при различных законах закрытия клапана, при учете потерь на трение при течении жидкости может быть проведено аналогично, но уже на базе численных расчетов. Качественное влияние этих факторов понятно и без такого исследования.

Для рассмотрения трубопровода более сложной формы, например с учетом сложной пространственной конфигурации, разветвлений, промежуточных опор, используется универсальный подход (см. [1–3]). В этом случае исключается возможность применения аналитических методов, а результаты проведенного исследования являются базой для постановки сложных задач и анализа результатов численных исследований.

Важным с практической точки зрения результатом исследования является демонстрация опасности возникновения значительной деформации трубопровода, обусловленной волновым процессом, возникающим в содержащей трубопровод гидросистеме, а не просто скачком давления, рассчитываемым по формуле Жуковского [4]. Понимание физической сущности этого явления, имеющиеся и продемонстрированные на простом примере возможности его расчета необходимы для обоснования надежной работы трубопроводов и гидросистем в целом.

#### *Список литературы*

1. Динамика конструкций гидроаэроупругих систем / К.В. Фролов, Н.А. Махутов, С.М. Каплунов, Л.В. Смирнов и др. / Отв. ред. С.М. Каплунов, Л.В. Смирнов. М.: Наука, 2002. 397 с.
2. Динамика и прочность водо-водяных энергетических реакторов / Н.А. Махутов, И.Г. Драгунов, К.В. Фролов, Л.В. Смирнов и др. / Отв. ред. Н.А. Махутов. М.: Наука, 2004. 440 с.
3. Программный комплекс RANT. Программа расчета трубопроводов на статическую прочность, вибропрочность и сейсмические воздействия. Рег. номер ПС в ЦОЭП при РЦН КИ №496 от 10.11.2002 г. Рег. номер паспорта аттестации ПС №155 от 28.03.2003 г.
4. Аронович Г.В., Картвелишвили Н.А., Любимцев Я.К. Гидравлический удар и уравнивательные резервуары. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., Наука, 1968. 248 с.
5. Динамика трубопровода при гидравлическом ударе в потоке транспортируемой жидкости / Л.В. Смирнов, В.Ф. Овчинников и др. // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2010. Вып. 72. С. 73–79.

### **NUMERICAL AND ANALYTICAL ANALYSIS OF DYNAMICS OF A CURVILINEAR PIPELINE WITH UNSTEADY COMPRESSIBLE FLUID FLOW**

**A.A. Gorbunova, D.V. Kapitanov, L.V. Smirnov**

The results of analytically investigating the dynamics of a curvilinear pipeline of a simple geometry with a wave process in the liquid flow are presented. It is shown that, when the natural vibration frequencies of the pipeline are close to or coincide with the main harmonic of the induced hydrodynamic force, there is a risk of exciting forced oscillations of the pipeline. The results are

intended for controlling the functioning of the available software complex and for obtaining qualitative insight into the character of the processes and their dependence on the parameters and perturbation.

*Keywords:* mathematic modeling, pipeline, compressible fluid, water hammer, wave process, analytical methods, vibrations, resonance.