

УДК 539.3

**ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
О ДЕЙСТВИИ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ТЕЛА
НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО
В ПОРИСТО-УПРУГОЙ ПОСТАНОВКЕ^{*)}**

© 2012 г. А.А. Белов, А.В. Аменицкий, С.Ю. Литвинчук, А.Н. Петров

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

belov_a2@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 20.10.2012

Рассматривается в трехмерной постановке численное решение задачи методом граничного элемента в сочетании с интегральным преобразованием Лапласа о действии нестационарной силы на деформируемый пористо-упругий штамп, жестко взаимодействующий с пористо-упругим полупространством. Построены отклики перемещений и потока. На откликах перемещений продемонстрирован эффект формирования волны Рэлея.

Ключевые слова: граничный элемент, пористо-упругий материал, полупространство, трехмерная постановка, деформируемый штамп, нестационарная динамика.

1. Постановка краевой задачи пористо-упругой динамики

Уравнения движения пористо-упругой деформируемой среды в области Ω имеют вид [1]:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i^s + \rho_f \ddot{w}_i, \quad i, j = \overline{1,3}.$$

Эти уравнения дополняются физическим соотношением, геометрическими соотношениями и динамическим законом Дарси [1]:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^s + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_{kk}^s \delta_{ij} - \alpha \delta_{ij} p,$$

$$\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{2}(u_{i,j}^s + u_{j,i}^s), \quad \varepsilon_{kk}^f = u_{k,k}^f,$$

$$\dot{w}_i = q_i = -\kappa \left(p_{,i} + \rho_f \ddot{u}_i^s + \frac{1}{\phi} \left(\frac{\rho_a}{\phi} + \rho_f \right) \ddot{w}_i - f_i^f \right),$$

^{*)} Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и при поддержке РФФИ (гранты 12-01-00698-а, 12-08-00984-а, 12-08-31572\12).

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжения, F_i, f_i^f – компоненты плотностей объемной силы и первой и второй фаз; u_i^s – вектор перемещения скелета, w_i – вектор перемещения фильтрации (просачивания), p – поровое давление; ρ, ρ_f, ρ_a – плотности двухфазной среды, упругого скелета, наполнителя и присоединенной массы; $\varepsilon_{kl}^s, \varepsilon_{kl}^f$ – компоненты тензора деформации упругого скелета и наполнителя; K, G – объемный модуль и модуль сдвига скелета; κ – проницаемость; $\phi = V^f/V$, где V^f – объем взаимосвязанных пор в образце объема V .

Здесь и далее применяется соглашение Эйнштейна для суммирования, запятая обозначает частное дифференцирование по пространственным координатам, точка над функцией обозначает дифференцирование по времени.

Формальное применение преобразования Лапласа с параметром s к уравнениям позволяет свести систему уравнений к дифференциальной форме записи в виде уравнений в частных производных в изображениях по Лапласу [1]:

$$Bv = F, \quad v = (u, p), \quad (1)$$

$$B = \begin{bmatrix} G\nabla^2 + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\partial_i\partial_j & -s^2(\rho - \beta\rho_f) - (\alpha - \beta)\partial_i \\ -s(\alpha - \beta)\partial_j & \frac{\beta}{s\rho_f}\nabla^2 - \frac{\phi^2 s}{R} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Здесь $\alpha = 1 - K/K^s$ – коэффициент эффективного напряжения,

$$\beta = -\frac{K\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 K(\rho_a + \phi\rho_f)},$$

$$R = \frac{\phi^2 K^f K^s s^2}{K^f(K^s - K) + \phi K^2(K^s - K^f)},$$

где K^s – объемный модуль зерен скелета, K^f – объемный модуль наполнителя.

Добавим граничные условия:

$$v(x, s) = v \text{ на } S^u, \quad t_i(x, s) = t_{ni}(x, s) = t_{ni}, \quad t_4(x, s) = q \text{ на } S^\sigma, \quad (3)$$

где S^u и S^σ – части границы S тела Ω , по которым заданы соответственно обобщенные перемещения и поверхностные силы; t_{ni} – граничные значения изображения по Лапласу поверхностной силы; q – граничные значения изображения по Лапласу порового потока.

Уравнения (1)–(3) полностью описывают краевую задачу в изображениях трехмерной изотропной динамической теории пороупругости.

Рассмотрим кусочно-однородное тело Ω в трехмерном евклидовом пространстве с декартовой системой координат R^3 . Границу тела обозначим через S , границы однородных частей Ω_k ($k = 1, \dots, K$) – через S_k . Предполагается, что Ω_k являются изотропными пористо-упругими телами. Параметры материала каждой однородной части Ω_k маркируем верхним индексом k . Динамическое состояние каждой части тела Ω_k описывается системой дифференциальных уравнений в обобщенных перемещениях [2]:

$$B^k u^k = 0, \quad v^k = (u^k, p^k),$$

$$B^k = \begin{bmatrix} G^k \nabla^2 + \left(K^k + \frac{1}{3} G^k \right) \partial_i \partial_j & -s^2 (\rho^k - \beta^k \rho_f^k) - (\alpha^k - \beta^k) \partial_i \\ -s (\alpha^k - \beta^k) \partial_j & \frac{\beta^k}{s \rho_f^k} \nabla^2 - \frac{\phi^k s}{R^2} \end{bmatrix},$$

где $v^k(x, s)$ – изображение по Лапласу с параметром s вектора обобщенных перемещений точки $x = (x_1, x_2, x_3)$. Пусть оригинал по времени обобщенного вектора перемещений удовлетворяет нулевым начальным условиям.

Будем рассматривать следующие типы граничных условий для Ω_k :

$$\begin{aligned} v_l^k(x, s) &= f_l^k(x, s), \quad x \in S^u \cap S_k, \quad l = \overline{1, 4}; \\ \tilde{t}_l^k(x, s) &= g_l^k(x, s), \quad \tilde{t}_n = (t_n, q), \quad x \in S^\sigma \cap S_k; \\ v_l^k(x, s) &= v_l^s(x, s), \quad \tilde{t}_l^k(x, s) = -\tilde{t}_l^s(x, s), \quad x \in S'_{ks}, \end{aligned}$$

где S'_{ks} – граница контакта частей Ω_k и Ω_s . Функции $f_l^k(x, s)$ и $g_l^k(x, s)$ являются заданными изображениями соответствующих граничных векторов.

2. Результаты численных исследований

Используя граничные интегральные уравнения [3] и гранично-элементную схему [4, 5], рассмотрим задачу о действии вертикальной силы $P(t) = t^0 f(t)$, $t^0 = -1000$ Н/м² на деформируемый пористо-упругий штамп в форме параллелепипеда $2 \times 2 \times 1$ м³, расположенный на пористо-упругом полупространстве (рис. 1). В качестве закона изменения приложенной нагрузки возьмем функцию $f(t) = P_0(H(t) - H(t - 0,005))$, где $H(t)$ – функция Хевисайда. Дневная поверхность полупространства свободная и проницаемая: на дневной поверхности задано поровое давление $p = 0$ и поверхностные силы $t_i(t) = 0$ ($i = \overline{1, 3}$), в области жесткого контакта штампа и полупространства задан поток $q = 0$. Расчеты проводились с использованием гранично-элементных сеток с разной степенью дискретизации, сведения о которых приведены в таблице 1. Сетка 1 приведена на рис. 2, сетка 2 – на рис. 3, сетка 3 – на рис. 4, сетка 4 – на рис. 5.

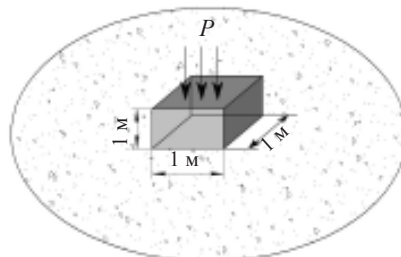


Рис. 1

Таблица 1

Номер сетки	Штамп		Полупространство	
	Кол-во элементов	Кол-во точек	Кол-во элементов	Кол-во точек
1	64	66	132	134
2	256	258	548	550
3	576	580	1252	1254
4	1024	1026	2308	2310

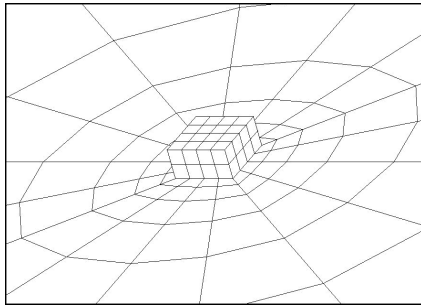


Рис. 2

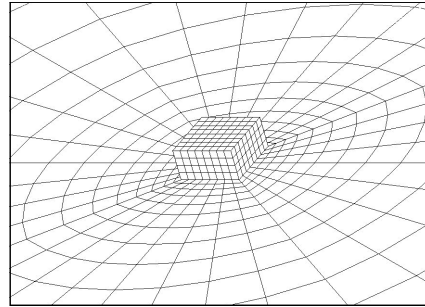


Рис. 3

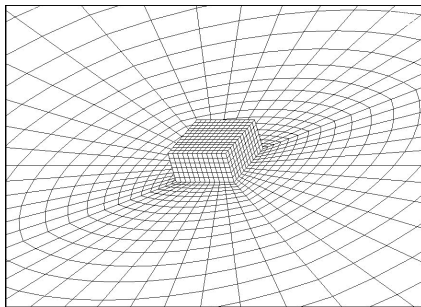


Рис. 4

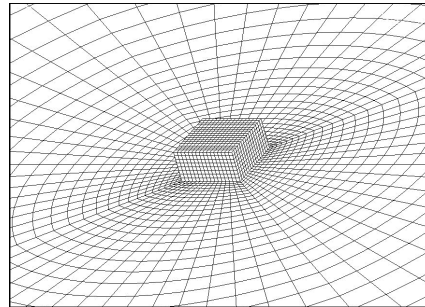


Рис. 5

В качестве пористо-упругого материала возьмем водонасыщенный песок с параметрами: $K = 2,1 \cdot 10^8$ Н/м², $G = 9,8 \cdot 10^7$ Н/м², $\rho = 1884$ кг/м³, $\phi = 0,48$, $K_s = 1,1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho_f = 1000$ кг/м³, $K_f = 3,3 \cdot 10^9$ Н/м², $k = 3,55 \cdot 10^{-9}$ м⁴/(Н·с). Рассмотрим точку полупространства на расстоянии 15 м от места нагружения. Сходимость решения в перемещениях продемонстрирована на рис. 6, 7, сходимость решения для потока показана на рис. 8.

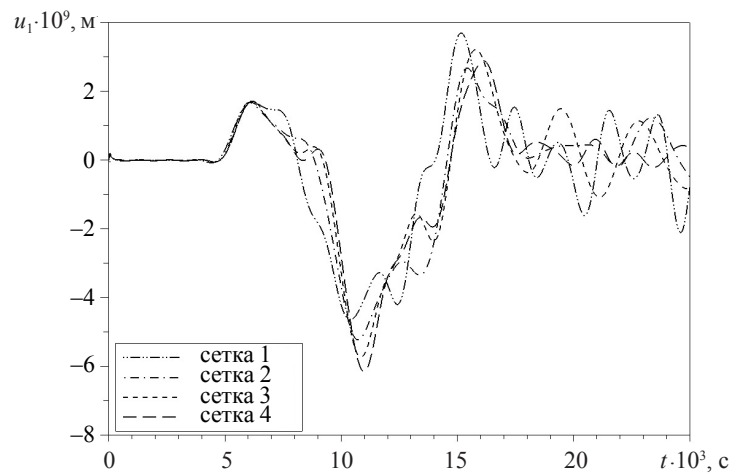


Рис. 6

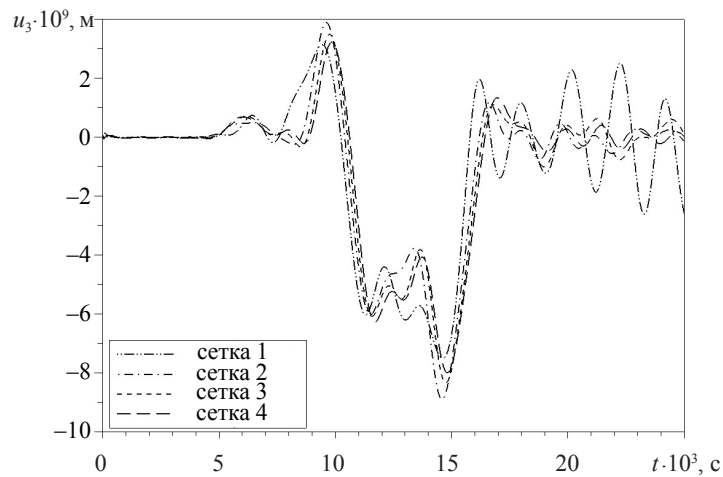


Рис. 7

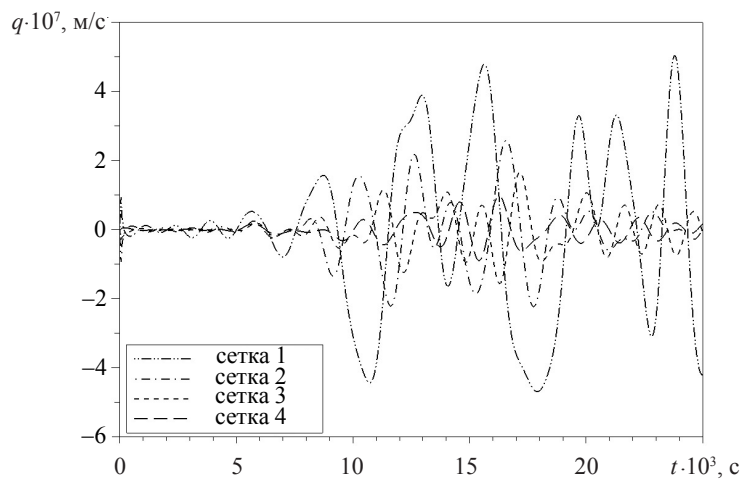


Рис. 8

Численные результаты, построенные на разных сетках, демонстрируют хорошую сходимость. Так как решения, полученные на сетках 3 и 4, достаточно близки, то для расчетов вполне можно использовать сетку 3, гарантируя достоверность получаемых значений граничных откликов. Из графиков u_1 , u_3 на рис. 6, 7 отчетливо виден эффект прихода волны Рэлея. Время $t = 0,01$ с на графиках перемещений соответствует времени прихода волны Рэлея.

Список литературы

1. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
2. Игумнов Л.А., Карелин И.С., Петров А.Н. Гранично-элементное исследование влияния коэффициента проницаемости на динамический отклик в составном пороупругом теле // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2011. Вып. 73. С. 98–104.
3. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости / А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин // Проблемы

прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2009. Вып. 71. С. 164–171.

4. *Аменицкий А.В., Игумнов Л.А., Карелин И.С.* Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2008. Вып. 70. С. 71–78.

5. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

BOUNDARY-ELEMENT ANALYSIS OF THE PROBLEM OF A PRISMATIC BODY ACTING ON A HALF-SPACE IN A POROUS-ELASTIC FORMULATION

A.A. Belov, A.V. Amenitskiy, S.Yu. Litvinchuk, A.N. Petrov

The action of a non-stationary force on a deformed porous-elastic die rigidly interacting with a porous-elastic half-space is analyzed in a 3D formulation, using BEM in combination with the integral Laplace transform. The displacement and flow responses are constructed. The displacement responses are used to demonstrate the effect of formation of Raleigh wave.

Keywords: boundary element, porous-elastic material, half-space, 3D formulation, deformed die, non-stationary dynamics.