

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕТЬЕЙ ВОЛНЫ В ТРЕХМЕРНОМ ПОРИСТО-УПРУГОМ ТЕЛЕ^{*)}

© 2012 г. Л.А. Игумнов¹, И.С. Карелин¹, А.В. Метрикин²,
А.Н. Петров¹, М.С. Банаев³

¹НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

²Делфтский технологический университет (Нидерланды)

³Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 10.10.2012

Проведено численное исследование возникновения медленной продольной волны в пористо-упругом теле. Краевые задачи решаются методом граничных интегральных уравнений. Для решения граничных интегральных уравнений применяется метод граничных элементов. Рассмотрены задачи о действии осевой силы в виде функции Хевисайда по времени на торец составного призматического пористо-упругого тела и действии вертикальной силы в виде функции Хевисайда по времени на поверхность составного пористо-упругого полупространства.

Ключевые слова: пористо-упругость, трехмерные задачи, нестационарность, граничный элемент, медленная волна.

Введение

Ключевым результатом в изучении распространения волн в полностью насыщенной пористой среде стало предсказание существования трех типов волн: быстрой и медленной продольных волн и поперечной волны. Быстрая продольная и поперечная волны по своей природе близки к волнам в упругой среде. Медленная продольная волна свойственна именно пористой среде. Она обладает значительными дисперсией и затуханием. Вызывается такая волна перемещением частиц наполнителя относительно упругого скелета.

В исследованиях применяется модель Био пористо-упругой среды. Теория Био учитывает взаимодействие фаз. Исторически именно на основе теории Био предсказано существование в пористой среде трех типов волн. Роль медленной волны более всего проявляется в случае большой сжимаемости среды, заполняющей поровое пространство. Экспериментально волну сложно обнаружить в естественных пористых средах. Трудности обнаружения связаны с тем, что она имеет значительно меньшую амплитуду, чем быстрая продольная волна. Игнорирование медленной

^{*)} Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Программы господдержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и при поддержке РФФИ (гранты 12-01-00698-а, 12-08-00984-а).

волны приводит к ошибкам при оценке затухания быстрой продольной и поперечной волн. Теория Био качественно и количественно правильно предсказывает скорости, амплитуды и частотные зависимости затухания всех трех типов волн в различных полностью насыщенных пористых средах.

Применение метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) и метода граничных элементов (МГЭ) к решению краевых задач трехмерной пористо-упругости находится на стадии становления [1, 2]. Развитие метода сопровождается не только интересными и практически важными результатами, но и неточностями и ошибками. Так, например, используемые в [2] ГИУ не соответствуют исходной начально-краевой задаче. Возникшая проблема обнаружена и решена в работах [3, 4]. Причина допущенной ошибки объяснена в работе [5]. Среди последующих исследований отметим работы авторов M. Schanz; D. Pryl; D.-Shebg J. et al.; M. Bouchon; J.-S. Pan; J.-F. Lu, D.-S. Jeng, S. Williams; D. Soares, J.C.F. Telles, W.J. Mansur; O. Maeso, J.J. Aznarez, F. Garcia; S.E. Kattis, D.E. Beckos, A.H.-D. Cheng; T. Senjuntichai, S. Mani, R.K.N.D. Rajapakse; J. Liang, H. You, V.W. Lee и др.

1. Моделирование медленной волны в призматическом пористо-упругом теле

На примере решения задачи о призматическом теле численно продемонстрируем волновой процесс с ярко выраженной волной Био. Гранично-элементная модель строится в соответствии с методикой из [1, 3, 6].

Рассмотрим составное пористо-упругое призматическое тело длиной 9 м, на которое действует осевая сила в виде функции Хевисайда: $f(t) = H(t)$ (рис. 1).

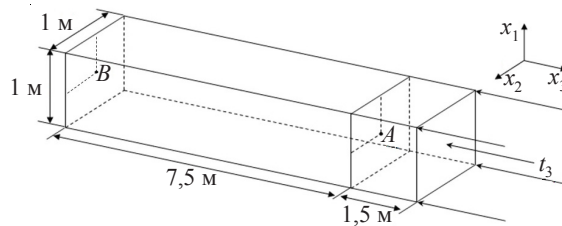


Рис. 1

На нагруженном торце компоненты поверхностной силы принимают следующие значения: $t_1=0, t_2=0, t_3=H(t)$, поровое давление $p=0; u_i (i=1,3), q$ – неизвестные перемещения и поток. На гранях $S_j (j=1,5): S_j \perp x_k, u_k=0, t_i=0 (i=1,3, i \neq k), q=0; u_i (i=1,3, i \neq k), t_k, p$ – неизвестны. На ребрах $d_{jm}=S_j \cap S_m: u_j=0, u_m=0, t_i=0 (i=1,3, i \neq j, i \neq m), q=0; u_i (i=1,3, i \neq j, i \neq m), t_j, t_m, q$ – неизвестны.

Будем исследовать давление и поток в точке, удаленной на 1,5 м от нагруженного торца. Для демонстрации времени прихода волн строим график давления на закрепленном торце.

Пусть материал имеет такие параметры: $K=4,8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, G=7,2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \rho=2458 \text{ кг/м}^3, \phi=0,19, K_s=3,6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \rho_f=1000 \text{ кг/м}^3, K_f=3,3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, k=3,6 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$. При получении решения выбирались приведенные частоты $\omega \in [0; 0,6]$ с шагом $\Delta\omega=0,005$ и $\omega \in [0,6; 300]$ с шагом $\Delta\omega=0,05$. Параметр Дурбина $\alpha=0,3$.

Для исследования сходимости метода использовались три равномерные прямоугольные гранично-элементные (ГЭ) сетки: a – сетка из 224 элементов, b – сетка из

504 и ϵ – из 896 элементов. На рис. 2 приведены кривые перемещений во времени в точке A для аналитического решения и указанных трех видов ГЭ-сетки. На рис. 3 приведены кривые давления во времени в точке B для аналитического решения и тех же видов ГЭ-сетки. На рис. 2 и 3 маркером Δ помечено аналитическое решение, маркером $*$ – решение на сетке a , маркером \square – решение на сетке b , маркером \circ – решение на сетке ϵ , штриховыми линиями обозначены ГЭ-решения [7].

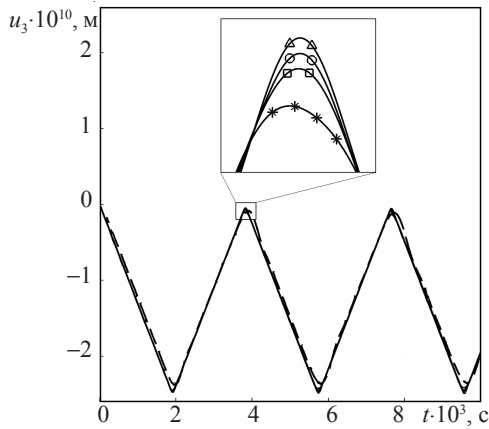


Рис. 2

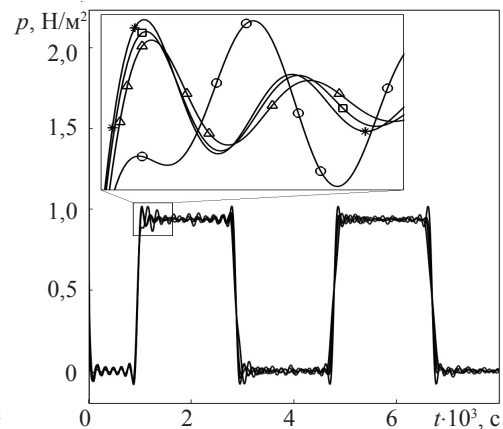


Рис. 3

Графики перемещений и давлений показывают, что решения, полученные на сетках b и ϵ , ближе к аналитическому решению, чем решения, полученные на сетке a . Таким образом, используемая схема МГЭ позволяет получить высокоточные численные результаты. В качестве рабочей сетки для проведения дальнейших численных экспериментов выбрана сетка b .

На рис. 4 и 5 представлены ГЭ-решения изменения во времени давления и потока в точке A , полученные методом ГЭ. Здесь и далее для идентификации графиков, построенных при значении коэффициента проницаемости $k=1,9 \cdot 10^{-10}$, использован маркер \circ , при $k=1,9 \cdot 10^{-7}$ – маркер Δ и при $k=1,9 \cdot 10^{-6}$ – маркер \square .

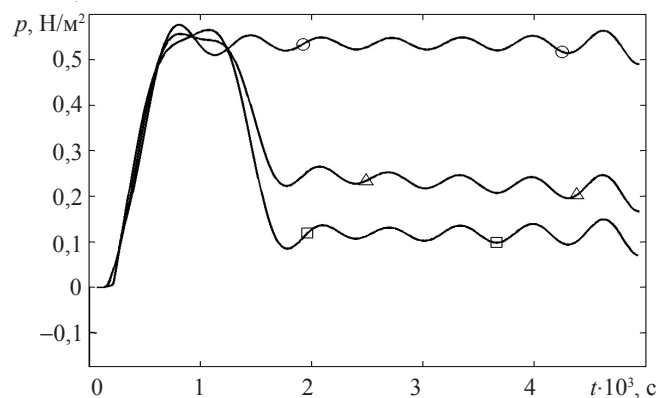


Рис. 4

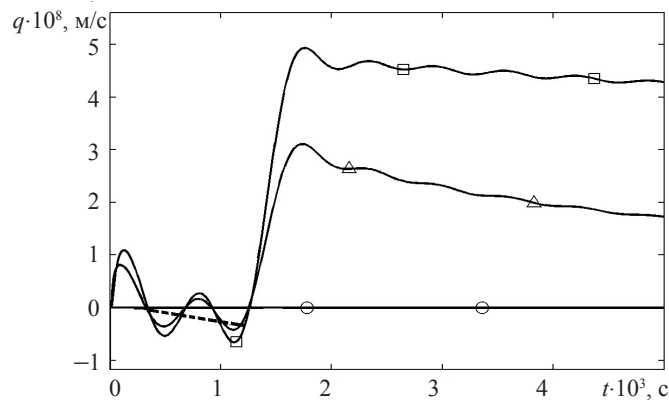


Рис. 5

На рис. 6 представлено ГЭ-решение – изменения давления на закрепленном торце.

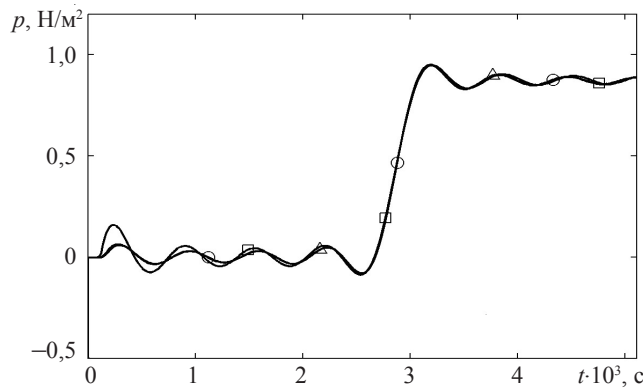


Рис. 6

Так как задача в одномерной постановке имеет аналитические решения в изображениях по Лапласу, то применение формулы численного обращения преобразования Лапласа позволяет получить графики откликов в виде функции времени с использованием того же числа точек частотного спектра, как и при построении ГЭ-решения. Графическое изображение результатов аналитического и ГЭ-решения представлено на рис. 7–9. На этих рисунках кривые, полученные с помощью аналитического решения, не маркированы. Построение аналитического решения на большем числе частот позволит устранить малоамплитудные колебания. Соответствующие решения рис. 7–9 графически неразличимы. На рис. 9 представлен график изменения давления на закрепленном торце.

Анализ кривых давления позволяет сделать вывод, что с ростом значения параметра проницаемости можно продемонстрировать эффект возбуждения в пористо-упругом теле медленной продольной волны: происходит падение амплитуды отклика давлений до некоторого ненулевого значения с параллельным нарастанием амплитуды порового потока. В работах [2, 8] на примере аналитического решения для пористо-упругого одномерного стержня продемонстрирован подобный эффект проявления третьей волны в отклике давления (график поведения отклика порового потока не приведен).

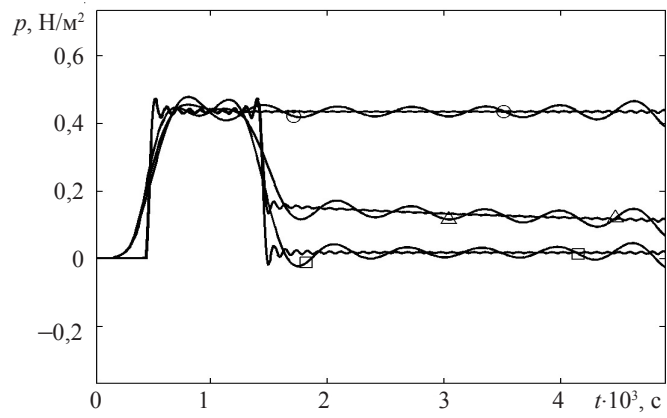


Рис. 7

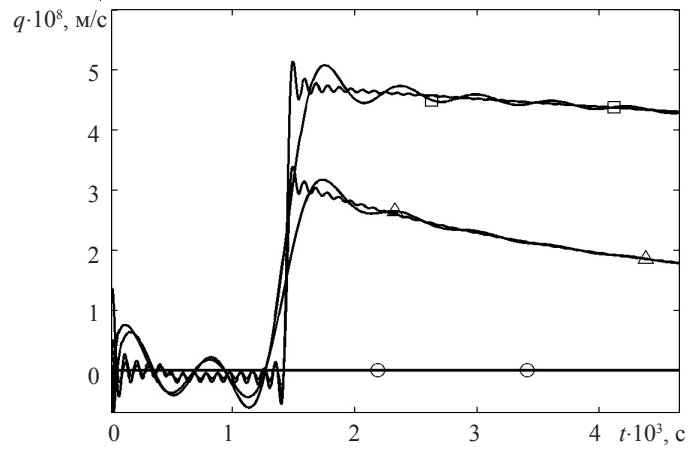


Рис. 8

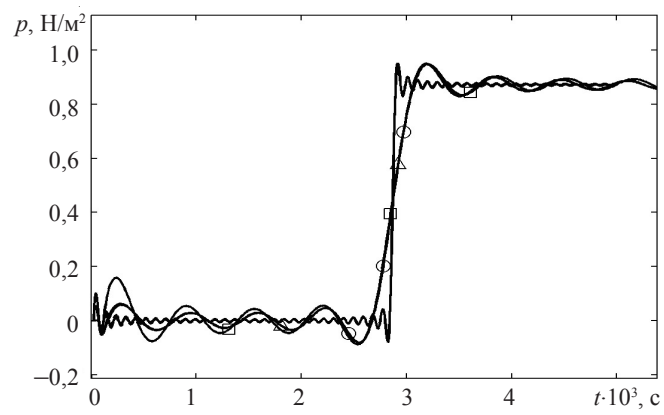


Рис. 9

2. Гранично-элементное моделирование третьей волны в пористо-упругом полупространстве

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы $t_3(t) = t^0 f(t)$, $t^0 = -1 \text{ Н/м}^2$ на поверхность однородного пористо-упругого полупространства с фиктивной границей (рис. 10).

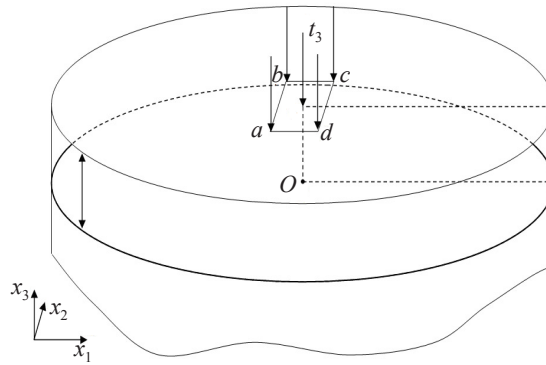


Рис. 10

Возьмем площадку нагружения $abcd$ размером $6 \times 6 \text{ м}^2$. Толщина верхнего слоя полупространства $h = 4 \text{ м}$. В качестве закона изменения приложенной нагрузки возьмем функцию Хевисайда $f(t) = H(t)$. Дневная поверхность полупространства свободная и непроницаемая: на всей дневной поверхности поровый поток $q = 0$, поверхностные силы $t_i(t) = 0$ ($i = 1, 3$), кроме участка $abcd$, где $t_3(t) = t^0 \cdot f(t)$ и поровое давление $p = 0$. В качестве пористо-упругого материала возьмем скальную породу с параметрами: $K = 8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $G = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\rho = 2458 \text{ кг/м}^3$, $\phi = 0,19$, $K_s = 3,6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $K_f = 3,3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $k = 3,6 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$. Исследовалась точка E , расположенная под точкой O и заглубленная на 4 м . ГЭ-сетка состоит из 1536 элементов на дневной поверхности и 1536 элементов в области контакта (рис. 11).

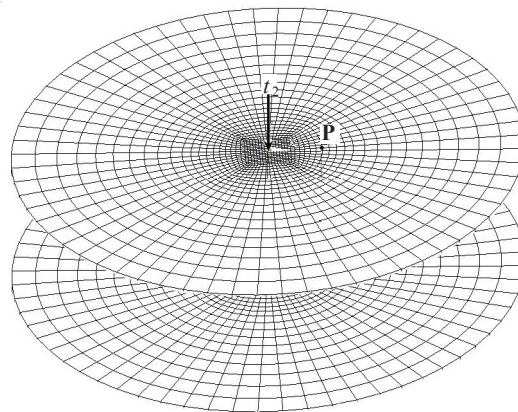


Рис. 11

На рис. 12, 13 представлены кривые давления и потока в точке E . Проявление эффекта возбуждения медленной волны, как и в случае исследований с призматическим телом, выражается в существенном изменении амплитуды отклика.

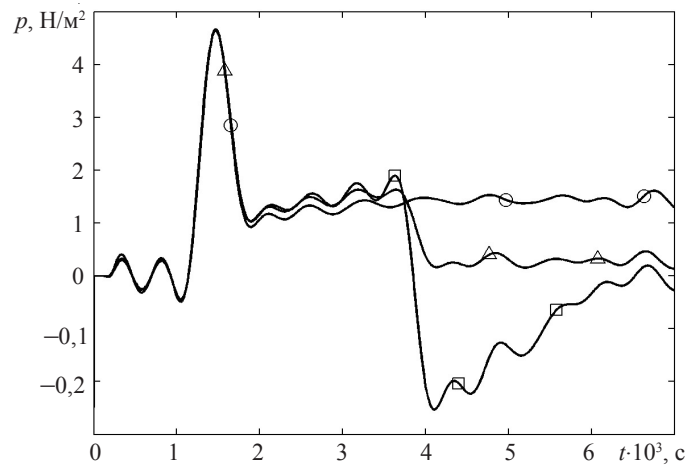


Рис. 12

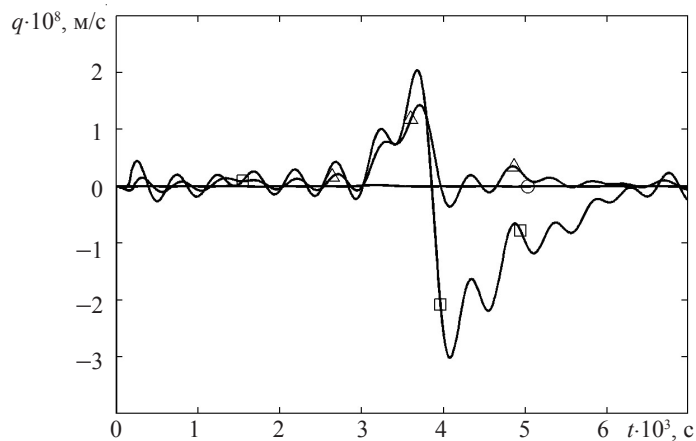


Рис. 13

Заключение

Для пористо-упругого полупространства со свободной границей при отсутствии затухания в среде поверхностную волну образуют три взаимодействующие волны. Дисперсность поверхностной волны Рэлея зависит от вклада в нее медленной волны. Для проницаемой границы существует одна поверхностная волна, слабо затухающая вдоль направления распространения. Основная часть энергии, которую переносит волна, сосредоточена в упругом скелете.

Список литературы

1. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
2. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
3. Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Численное моделирование волн в пороупругих телах и средах // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XIII Международ.

конф. Ростов-на-Дону, 12-15 окт. 2009 г. Ростов-на-Дону: ООО «ЦВВР», 2009. С. 27–31.

4. *Pryl D.* Influences of poroelasticity on wave propagation: A time stepping boundary element formulation. *Mechanik-Zentrum der Technischen Universität Braunschweig*, 2005. 128 p.

5. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости / А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2009. Вып. 71. С. 164–171.

6. *Игумнов Л.А., Карелин И.С.* Гранично-элементное моделирование поверхностных волн для пористо-упругого полупространства // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Матер. XVII Международ. симпоз. им. А.Г. Горшкова. М.: ООО «ТР-принт», 2011. Т. 1. С. 82.

7. *Schanz M.* Application of 3D boundary element formulation to wave propagation in poroelastic solids // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2001. 25(4-5). P. 363–376.

8. *Schanz M.* Poroelastodynamics: linear models, analytical solution, and numerical methods // *Applied Mechanics Reviews*. 2008. 3. 43 p.

NUMERICALLY MODELING THE THIRD WAVE IN A 3D POROELASTIC BODY

L.A. Igumnov, I.S. Karelin, A.V. Metrikin, A.N. Petrov, M.S. Banayev

The appearance of the slow longitudinal wave in a poroelastic body is studied. Boundary-value problems are analyzed using the boundary integral equation (BIE) method. The BIE's are solved using the boundary element method (BEM). The problems of the effect of an axial force in the form of a time Heaviside function acting on the end of a composite prismatic porous elastic body and the effect of a vertical force in the form of a time Heaviside function acting on the surface of a composite porous elastic half-space are considered.

Keywords: poroelasticity, 3D problems, non-stationary problems, boundary element, slow wave.