

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПО УСТОЙЧИВОСТИ

© 2012 г. А.К. Любимов, О.А. Сергеев, В.Г. Киселев, С.А. Сергеева

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

nnsosa@rambler.ru

Поступила в редакцию 29.06.2012

Изложен метод оптимизации для геометрически нелинейных стержневых конструкций, содержащих случайные глобальные несовершенства. Начальные несовершенства распределены случайно по нормальному закону. Оптимизация ведется при ограничениях на вероятность безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости и ограничениях на варьируемые параметры. Формулируются критерии для обнаружения асимметричной, симметричной особых точек бифуркации первого или второго типа, предельной точки. Выводятся функции плотностей распределения вероятностей критических нагрузок потери устойчивости для этих четырех типов критических точек. Метод оптимизации основан на квадратичной аппроксимации целевой функции и линейной аппроксимации ограничений на вероятность, что конструкция не потеряет устойчивость. Метод апробирован на трех тестовых конструкциях.

Ключевые слова: оптимизация, геометрически нелинейные стержневые конструкции, случайные глобальные несовершенства, вероятность безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости, некратные особые точки бифуркации, некратные предельные точки.

Введение

При оптимизации конструкции обычно не имеется информации относительно несовершенств. В большинстве работ [1–3] рассматривают несовершенства, которые считаются известными в дискретных точках, или изучают нахождение самой худшей формы несовершенств, которая дает наибольшее уменьшение значения критической нагрузки потери устойчивости конструкции.

В [4] В.В. Болотин первым допустил, что критическую нагрузку потери устойчивости конструкции можно представить как функцию случайных несовершенств. Следовательно, важными оказываются две задачи:

1. Определение критической нагрузки потери устойчивости конструкции для различных типов критических точек.
2. Получение функций плотностей распределения вероятностей критических нагрузок потери устойчивости для различных типов критических точек, для того чтобы сформулировать ограничение на вероятность безотказной работы конструк-

ции в задаче оптимизации.

В настоящей работе глобальные несовершенства рассматриваются как случайные и анализируются вероятностные свойства критических нагрузок потери устойчивости для различных типов критических точек. Рассматриваются случаи, когда при случайных несовершенствах у конструкции значение критической нагрузки потери устойчивости, тип критической точки изменяются или значение критической нагрузки потери устойчивости изменяется, а тип критической точки не меняется. Вероятностная нагрузка общей потери устойчивости конструкции включается в ограничения задачи оптимизации.

1. Постановка задачи оптимизации

Требуется определить такие значения управляемых параметров \mathbf{X}^* из области допустимых значений, для которых масса конструкции минимальна:

$$W(\mathbf{X}^*) = \min_{\mathbf{X} \in F} W(\mathbf{X}), \quad (1)$$

где \mathbf{X} – вектор управляемых параметров. Область допустимых значений F определяется следующими ограничениями:

– на вероятность безотказной работы конструкции [5]

$$1 - P(0 < \Lambda^{imp}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}) < 1) \geq \delta, \quad (2)$$

где Λ^{imp} – некратный критический множитель внешней консервативной нагрузки \mathbf{P}_0 , $P(0 < \Lambda^{imp}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}) < 1)$ – вероятность общей потери устойчивости конструкции, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор случайных глобальных несовершенств, δ – заданный допуск;

– на предельные значения управляемых параметров

$$\mathbf{X}_{min} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{max}, \quad (3)$$

где \mathbf{X}_{min} и \mathbf{X}_{max} – нижние и верхние значения для параметров проектирования.

Случайные глобальные несовершенства входят в полную потенциальную энергию, уравнения равновесия конструкции и т.д. Компоненты вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ являются малыми величинами.

2. Основные уравнения

Рассмотрим нелинейную упругую конструкцию, для которой полная потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{u}, \Lambda, \boldsymbol{\varepsilon})$ зависит от вектора перемещений \mathbf{u} , пропорционального множителя нагрузки Λ , случайного вектора глобальных несовершенств $\boldsymbol{\varepsilon}$. Для упрощения уравнений будем использовать одно случайное несовершенство ε и считаем, что все компоненты внешней нагрузки пропорциональны одному изменяющемуся параметру Λ . Полная потенциальная энергия конструкции со случайным несовершенством записывается как

$$\Pi(\mathbf{u}, \Lambda, \varepsilon) = \varphi(\mathbf{u}, \varepsilon) - \Lambda \mathbf{u}^T \mathbf{P}_0, \quad (4)$$

где $\varphi(\mathbf{u}, \varepsilon)$ – энергия деформации, \mathbf{P}_0 – вектор внешних консервативных нагрузок.

Уравнения равновесия конструкции для критического состояния имеют вид:

$$\mathbf{r}^c(\mathbf{u}^{imp}, \Lambda^{imp}, \varepsilon) = \frac{\partial \Pi^c}{\partial u_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где верхний индекс *imp* означает зависимость от несовершенства ε .

Дифференцируя уравнение равновесия (5) по параметру продвижения t вдоль кривой критических состояний, во всех точках которой касательная матрица жесткости является особенной, запишем:

$$\mathbf{K}^c \dot{\mathbf{u}}^{imp} + \mathbf{r}_\Lambda^c \dot{\Lambda}^{imp} + \mathbf{r}_\varepsilon^c \dot{\varepsilon} = 0, \quad (6)$$

где точка сверху обозначает дифференцирование по t , $\mathbf{K}^c = \partial \mathbf{r}^c / \partial \mathbf{u}$ – особенная касательная матрица жесткости.

Уравнение (6) будет использоваться для классификации некротных критических точек.

3. Классификация некротных особых точек бифуркации и предельной точки

Умножим слева уравнение (6) на Φ_1^T , где Φ_1 – первая форма потери устойчивости конструкции. Тогда можно записать:

$$\Phi_1^T (\mathbf{K}^c \dot{\mathbf{u}}^{imp} + \mathbf{r}_\Lambda^c \dot{\Lambda}^{imp} + \mathbf{r}_\varepsilon^c \dot{\varepsilon}) = 0. \quad (7)$$

Из (7) приходим к условию потери устойчивости конструкции [1]:

$$\dot{\Lambda}^{imp} \Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c + \dot{\varepsilon} \Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c = 0, \quad (8)$$

которое будем использовать для классификации некротных особых точек бифуркации и предельной точки.

Точка, для которой выполняется

$$\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad \Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c \neq 0, \quad \dot{\Lambda}^{imp} \neq 0, \quad \dot{\varepsilon} = 0, \quad (9)$$

называется асимметричной особой точкой бифуркации. Некротная асимметричная особая точка бифуркации «разлетается» при случайном несовершенстве ε на две предельные точки, а предельные точки развиваются вдоль кривой критических состояний I (рис. 1а). Для отрицательных значений ε функция $\Lambda^{imp}(\varepsilon)$ представляет собой параболу (рис. 1б). При $\varepsilon = 0$ имеем $d\Lambda^{imp}/d\varepsilon = \infty$. Заметим, что не существует кривой $\Lambda^{imp}(\varepsilon)$ для $\varepsilon > 0$. Штриховые кривые на рис. 1а обозначают неустойчивые положения равновесия, а сплошные кривые – устойчивые.

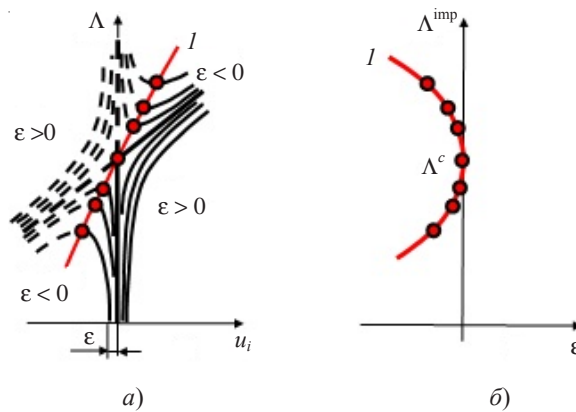


Рис. 1

Точка, для которой выполняется условие

$$\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad \Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c \neq 0, \quad \dot{\Lambda}^{imp} = 0, \quad \dot{\varepsilon} = 0, \quad (10)$$

называется симметричной особой точкой бифуркации, т.е. некратная симметричная особая точка бифуркации первого или второго типа модифицируется при случайном несовершенстве ε в предельную точку, а предельная точка развивается вдоль кривой критических состояний I (рис. 2а, в). Закон изменения Λ^{imp} от ε для особой симметричной точки бифуркации первого или второго типа (рис. 2б, г), особой асимметричной точки бифуркации (см. рис. 1б) впервые был открыт Коитером [6]. При $\varepsilon = 0$ имеем точку острого перегиба у функции $\Lambda^{imp}(\varepsilon)$ (рис. 2б, г).

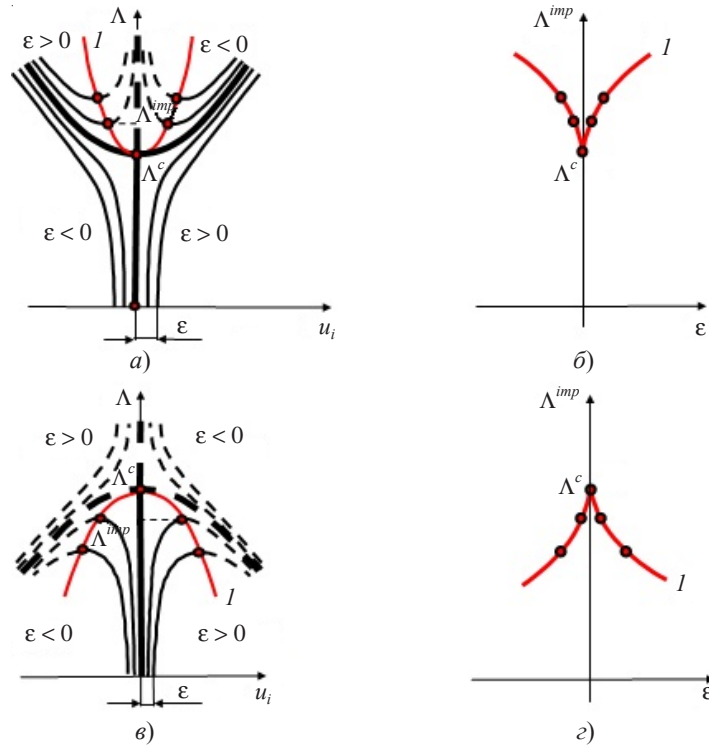


Рис. 2

Точка, для которой выполняется

$$\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \neq 0, \quad \Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c \neq 0, \quad \dot{\Lambda}^{imp} \neq 0, \quad \dot{\varepsilon} \neq 0, \quad \dot{\Lambda}^{imp} \Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c = -\dot{\varepsilon} \Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c, \quad (11)$$

называется предельной точкой. Влияние случайных несовершенств на предельную точку показано на рис. 3а. Функция $\Lambda^{imp}(\varepsilon)$ изменяется линейно [1] (рис. 3б).

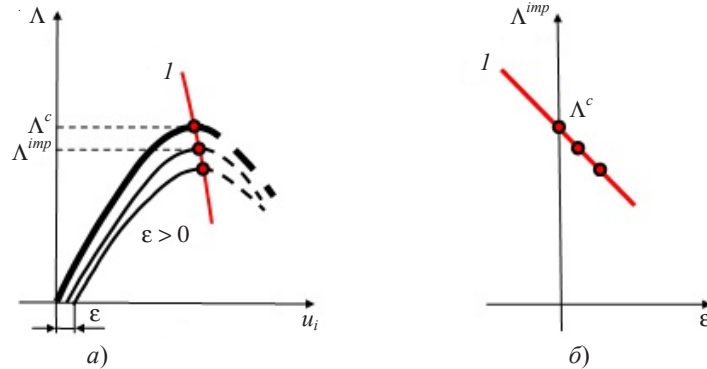


Рис. 3

4. Аналитический анализ чувствительности критического множителя нагрузки для некротной асимметричной и симметричной особых точек бифуркации, предельной точки

4.1. Асимметричная особая точка бифуркации. Для асимметричной точки бифуркации имеем

$$\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \Phi_1 \Phi_1 \neq 0, \quad \dot{\Lambda}^{imp}(t_0) \neq 0, \quad \dot{\varepsilon}(t_0) = 0, \quad \ddot{\varepsilon}(t_0) \neq 0.$$

Разложения в ряд Тейлора для Λ^{imp} и ε записываются в виде:

$$\Lambda^{imp}(t) = \Lambda^{imp}(t_0) + \dot{\Lambda}^{imp}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\Lambda}^{imp}(t_0)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot{\Lambda}^{imp}(t_0)\Delta t^3 + \dots, \quad (12)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\varepsilon}(t_0)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot{\varepsilon}(t_0)\Delta t^3 + \dots, \quad (13)$$

где t_0 соответствует отсутствию случайных несовершенств у конструкции, t – параметр продвижения вдоль кривой критических состояний I (см. рис. 1а), который не может быть равным параметру ε .

Рассматривая только два первых слагаемых в разложениях (12) и (13), получаем чувствительность критического множителя нагрузки для асимметричной особой точки бифуркации

$$\Lambda^{imp}(t) = \Lambda^{imp}(t_0) \pm \dot{\Lambda}^{imp}(t_0) \left(\frac{2(\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0))}{\ddot{\varepsilon}(t_0)} \right)^{1/2}. \quad (14)$$

4.2. Симметричная особая точка бифуркации первого или второго типа.

Для симметричной точки бифуркации имеем

$$\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \Phi_1 \Phi_1 = 0, \quad \dot{\Lambda}^{imp}(t_0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}(t_0) = 0, \quad \ddot{\varepsilon}(t_0) = 0.$$

Следовательно, вторые слагаемые в (12) и (13) пропадают. Рассматривая последующие члены в разложениях (12) и (13), получаем чувствительность критического множителя нагрузки для симметричной особой точки бифуркации

$$\Lambda^{imp}(t) = \Lambda^{imp}(t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\Lambda}^{imp}(t_0) \left(\frac{6(\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0))}{\ddot{\varepsilon}(t_0)} \right)^{2/3}. \quad (15)$$

4.3. Предельная точка.

Для предельной точки имеем $\dot{\Lambda}^{imp}(t_0) \neq 0$, $\dot{\varepsilon}(t_0) \neq 0$. Заметим, что для предельной точки параметр продвижения t вдоль кривой критических состояний I может быть равным параметру несовершенства ε . Чувствительность критического множителя нагрузки Λ^{imp} для предельной точки записывается следующим образом:

$$\Lambda^{imp}(t) = \Lambda^{imp}(t_0) + \dot{\Lambda}^{imp}(t_0) \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0)}{\dot{\varepsilon}(t_0)}. \quad (16)$$

Задача определения производных $\dot{\Lambda}^{imp}$, $\ddot{\Lambda}^{imp}$, $\ddot{\varepsilon}$, $\dddot{\varepsilon}$ по параметру продвижения вдоль кривой критических состояний I рассматривается в работе [1].

5. Плотности распределения вероятностей критических нагрузок потери устойчивости для некротной особой асимметричной и симметричной точек бифуркации, предельной точки

Имеется непрерывная случайная величина ε с плотностью распределения вероятностей $f(\varepsilon)$. Случайная величина Λ^{imp} связана со случайным несовершенством ε функциональной зависимостью

$$\Lambda^{imp} = \varphi(\varepsilon). \quad (17)$$

Предполагаем, что участок возможных значений случайного несовершенства ε состоит из k участков, на каждом из которых функция $\Lambda^{imp} = \varphi(\varepsilon)$ монотонно возрастает или монотонно убывает. Тогда плотность распределения вероятностей $g(\Lambda^{imp})$ случайной величины Λ^{imp} определяется формулой [7]:

$$g(\Lambda^{imp}) = \sum_{i=1}^k f(\psi_i(\Lambda^{imp})) \left| \frac{d\psi_i}{d\Lambda^{imp}} \right|, \quad (18)$$

где $\psi_i(\Lambda^{imp})$ – обратная функция для функции φ на i -м участке.

Для асимметричной особой точки бифуркации функция $\Lambda^{imp}(\varepsilon)$ является многозначной. В ограничения задачи оптимизации будем включать наименьшее значение критической силы потери устойчивости. Поэтому рассматривается нижняя ветвь функции $\Lambda^{imp}(\varepsilon)$, которая монотонно возрастает (см. рис. 1б). Случайное несовершенство ε принимает значения на участке $(-\infty, 0)$. Будем считать, что случайное несовершенство ε подчинено полунормальному закону распределения с плотностью

$$f(\varepsilon) = \frac{2\sqrt{\pi-2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2(\pi-2)}{2\pi\sigma^2}\right], \quad (19)$$

где σ – среднее квадратичное отклонение случайного несовершенства.

С учетом формул (14) и (18) получаем плотность распределения вероятностей критической нагрузки потери устойчивости для некротной особой асимметричной точки бифуркации

$$g(\Lambda^{imp}) = \frac{2\sqrt{\pi-2} |\ddot{\varepsilon}^{imp} (\Lambda^{imp} - \Lambda^c)|}{\sigma\sqrt{2\pi} (\dot{\Lambda}^{imp})^2} \exp\left[-\frac{(\pi-2)(\ddot{\varepsilon}^{imp})^2 (\Lambda^{imp} - \Lambda^c)^4}{8\pi\sigma^2 (\dot{\Lambda}^{imp})^4}\right], \quad (20)$$

где $\ddot{\varepsilon}^{imp} < 0$ и $\Lambda^{imp} < \Lambda^c$.

Пусть случайное несовершенство ε подчинено нормальному закону. Используя формулы (15) и (18), получаем плотность распределения вероятностей критической нагрузки потери устойчивости для некротной особой симметричной точки бифуркации

$$g(\Lambda^{imp}) = \frac{2 |\ddot{\varepsilon}^{imp}| \sqrt{\Lambda^{imp} - \Lambda^c}}{\sigma\sqrt{4\pi} (\ddot{\Lambda}^{imp})^3} \exp\left[-\frac{(\ddot{\varepsilon}^{imp})^2 (\Lambda^{imp} - \Lambda^c)^3}{9\sigma^2 (\ddot{\Lambda}^{imp})^3}\right], \quad (21)$$

где $\ddot{\Lambda}^{imp} < 0$ и $\Lambda^{imp} < \Lambda^c$.

Для предельной точки случайная величина Λ^{imp} связана со случайным несовершенством ε линейной функциональной зависимостью

$$\Lambda^{imp} = \frac{\dot{\Lambda}^{imp}}{\dot{\varepsilon}^{imp}} \varepsilon + \Lambda^c. \quad (22)$$

Используя формулу (18), получим плотность распределения вероятностей случайной величины Λ^{imp} :

$$g(\Lambda^{imp}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} |\dot{\Lambda}^{imp} / \dot{\varepsilon}^{imp}| \sigma} \exp \left[-\frac{(\Lambda^{imp} - \Lambda^c)^2}{2 |\dot{\Lambda}^{imp} / \dot{\varepsilon}^{imp}|^2 \sigma^2} \right], \quad (23)$$

т.е. линейная функция (22) от случайного несовершенства ε , подчиненного нормальному закону, также подчинена нормальному закону с математическим ожиданием случайной величины Λ^{imp} , равным Λ^c , и средним квадратичным отклонением случайной величины Λ^{imp} , равным $|\dot{\Lambda}^{imp} / \dot{\varepsilon}^{imp}| \sigma$.

На рис. 4 показаны формы функций плотностей распределения вероятностей нагрузок общей потери устойчивости для разных типов критических точек. Плотность распределения вероятностей критической нагрузки потери устойчивости для предельной точки (см. рис. 4, кривая 3) согласуется с нормальным законом. Для асимметричной и симметричной точек бифуркации плотность распределения вероятностей критической нагрузки потери устойчивости не соответствует нормальному закону [8]. Для асимметричной и симметричной точек бифуркации графики функций плотностей распределения вероятностей нагрузок общей потери устойчивости ограничены справа значением Λ^c . По мере удаления от критической нагрузки потери устойчивости у конструкции без несовершенств Λ^c плотность распределения вероятностей $g(\Lambda^{imp})$ очень быстро растет для симметричной точки бифуркации (см. рис. 4, кривая 1) и медленнее растет для асимметричной точки бифуркации (см. рис. 4, кривая 2).

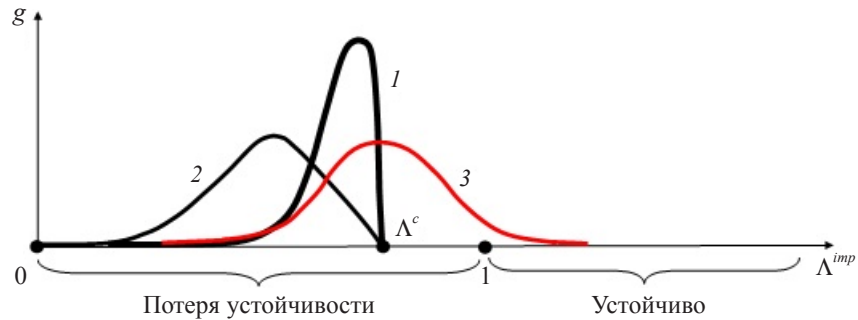


Рис. 4

Заметим, что функции плотностей распределения вероятностей критических нагрузок потери устойчивости зависят от управляемых параметров конструкций и значение $\Lambda^{imp} = 1$ может занимать различные положения по отношению к этим функциям, рис. 4.

Примеры

Для примеров, рассматриваемых далее, модуль упругости $E = 6,895 \cdot 10^{10}$ Н/м², удельный вес $\rho g = 26977,5$ Н/м³; A, A_1, A_2 — площади поперечных сечений элементов. Случайные несовершенства ε подчинены нормальному закону распределения с математическими ожиданиями, равными нулю, и заданными средними квадратичными отклонениями. Для асимметричной точки бифуркации используется полунормальный закон распределения с плотностью (19).

Пример 1. Асимметричная точка бифуркации

Рассмотрим ферму с двумя степенями свободы, нагруженную сосредоточенной силой $P_0 = 2,668 \cdot 10^7$ Н, рис. 5. Длина первого элемента $L_1 = 0,3048$ м, высота $H = 0,3048$ м, $\sigma = 0,001$ м – среднее квадратичное отклонение несовершенства ϵ .

Полная потенциальная энергия фермы записывается в виде:

$$\Pi = \frac{A_1 E u_Y^2 (u_Y - L_1 \sqrt{2})^2}{8L_1^3} + \frac{A_2 E (u_x (u_x - 2H) + u_Y (u_Y - 2\epsilon))^2}{8(H^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \Lambda P_0 u_X.$$

На рис. 6 показаны кривая критических состояний I , пространственные равновесные кривые для конструкции без несовершенства $\epsilon = 0$ м, $A_1 = 0,001$ м², $A_2 = 0,002$ м², на которых отмечены две асимметричные точки бифуркации B_1, B_2 и четыре некратные предельные точки.

На рис. 7 представлены пространственные равновесные кривые для конструкции с несовершенством $\epsilon = -0,003$ м, $A_1 = 0,001$ м², $A_2 = 0,002$ м², на которых отмечены шесть некратных предельных точек. Толщина равновесной кривой соответствует величине нагрузки, а цвет равновесной кривой показывает знак нагрузки. Параметрами проектирования являются площади поперечных сечений элементов конструкции A_1 и A_2 . Допустимая область F определяется ограничениями на параметры проектирования (м²) $0,001 \leq A_1 \leq 0,002$, $0,001 \leq A_2 \leq 0,003$, условием, что асимметричная точка бифуркации B_1 возникает раньше предельной точки L , т.е. $A_2 > 3A_1 H / (2L_1)$, ограничением на вероятность безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости $1 - \int_0^1 g(\Lambda^{imp}) d\Lambda^{imp} \geq \delta$.

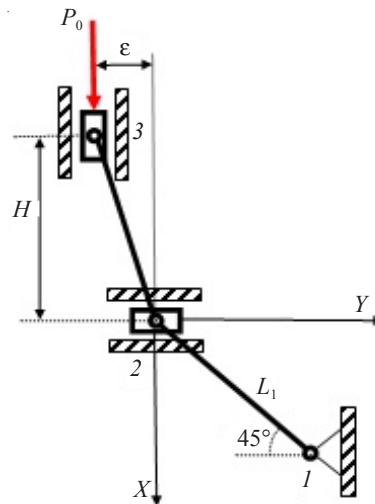


Рис. 5

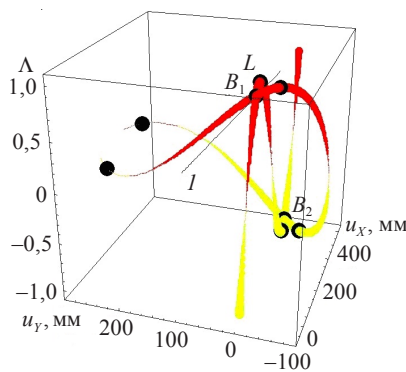


Рис. 6

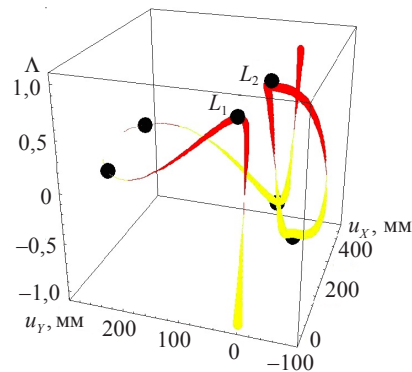


Рис. 7

Критический множитель нагрузки для первой из двух предельных точек L_1 (см. рис. 7), на которые «разлетается» асимметричная точка бифуркации B_1 , определяется из уравнения (14):

$$\Lambda^{imp} = \frac{A_1 E \sqrt{A_2 H^2 L_1 (A_2 L_1 - A_1 H)}}{2 A_2 L_1^2 P_0} - \frac{3 A_1 E H (2 A_2 L_1 - 3 A_1 H)}{2 L_1^2 P_0} \sqrt{\frac{\varepsilon}{3 \sqrt{2} A_2 (A_2 L_1 - A_1 H)}}$$

Компоненты вектора перемещений для первой предельной точки L_1 (см. рис. 7), расположенной на кривой критических состояний, имеют вид:

$$u_X^{imp} = \frac{A_2 L_1 H - \sqrt{A_2 H^2 L_1 (A_2 L_1 - A_1 H)}}{A_2 L_1} - \frac{3 A_1 H^2}{L_1} \sqrt{\frac{\varepsilon}{3 \sqrt{2} A_2 (A_2 L_1 - A_1 H)}},$$

$$u_Y^{imp} = \sqrt{-\frac{2 \varepsilon L_1}{3 \sqrt{2}}}.$$

Оптимальный проект асимметричной фермы определяется точкой $\{\mathbf{X}^*\}^T = \{1340,78; 2011,11\}$ мм² с весом $W_{opt} = 2,81$ кГ (рис. 8), где l – ограничение, что вероятность безотказной работы конструкции равна 0,99; 4 – линия, вдоль которой асимметричная точка бифуркации совпадает с предельной точкой с $A_2 = 3A_1H/(2L_1)$; 5 – линия уровня целевой функции. На рис. 8 также показаны ограничения с вероятностью безотказной работы 0,95 (кривая 2) и 0,90 (кривая 3).

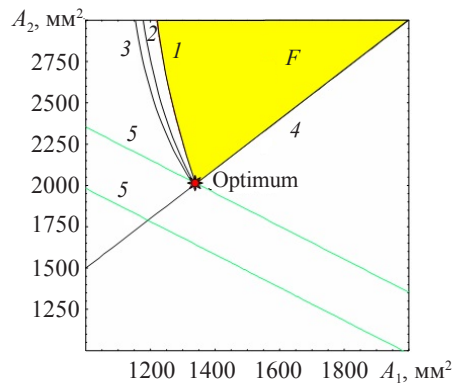


Рис. 8

Пример 2. Симметричная точка бифуркации.

Конструкция, показанная на рис. 9, имеет две степени свободы: перемещения узла 2 вдоль осей X и Y , где $P_0 = 196200$ Н – нагрузка, $\sigma = 0,01$ м – среднее квадратичное отклонение несовершенства ε .

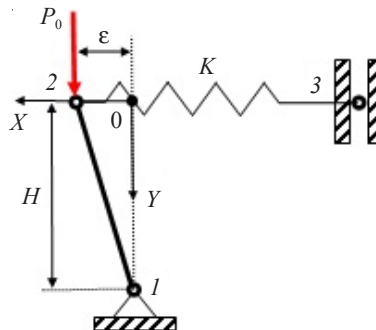


Рис. 9

Критический множитель нагрузки для предельной точки, в которую модифицируется симметричная точка бифуркации, определяется из уравнения (15):

$$\Lambda^{imp} = \frac{AEHK}{(AE + HK)P_0} - \frac{3(AE + HK)K}{2AEHP_0} \sqrt[3]{\left(\frac{2A^3E^3H^2\varepsilon}{(AE + HK)^3} \right)^2}.$$

Параметрами проектирования являются площадь поперечного сечения A элемента 1–2 и высота H . Допустимая область F определяется ограничениями на параметры проектирования (м^2 , м): $0,0015 \leq A \leq 0,003$, $1 \leq H \leq 3$; ограничением на вероятность безотказной работы конструкции $1 - P(0 < \Lambda^{imp} < 1) \geq 0,99$.

Оптимальный проект конструкции определяется точкой $\{\mathbf{X}^*\}^T = \{1500 \text{ мм}^2; 2280,2 \text{ мм}\}$ с весом $W_{opt} = 9,406 \text{ кГ}$ (рис. 10), где 1 – ограничение, что вероятность безотказной работы конструкции равна 0,99, 4 – кривая уровня целевой функции. Для сравнения на рис. 10 также показаны ограничения с вероятностью безотказной работы 0,95 (кривая 2) и 0,90 (кривая 3).

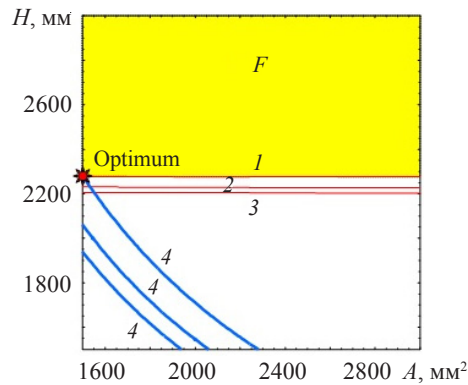


Рис. 10

Пример 3. Предельная точка.

Ферма Мизеса, показанная на рис. 11, имеет две степени свободы: перемещение узла 2 вдоль осей X и Y . Нагрузка, приложенная в узле 2, $P_0 = 2,06 \cdot 10^7 \text{ Н}$, длина пролета $S = 0,4 \text{ м}$. Среднее квадратичное отклонение для несовершенства $\sigma = 0,005 \text{ м}$.

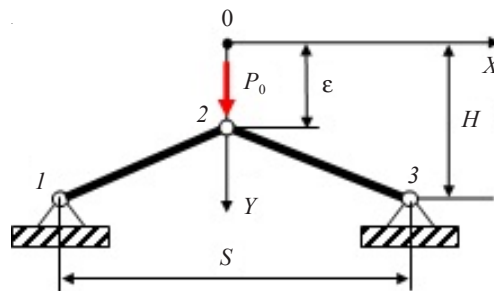


Рис. 11

Критический множитель нагрузки определяется из уравнения (16) и имеет вид:

$$\Lambda^{imp} = \frac{16AEH^3}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^3}} - \frac{16AEH^2 S^2 \varepsilon}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^5}}.$$

Параметрами проектирования для фермы являются площадь поперечных сечений элементов A (мм²) и высота H (мм): $0,0011 \leq A \leq 0,0014$, $0,285 \leq H \leq 0,345$. Допустимая область определяется ограничениями на параметры проектирования и ограничением на вероятность безотказной работы конструкции $1 - P(0 < \Lambda^{imp} < 1) \geq 0,99$.

Оптимальный проект фермы Мизеса определяется точкой $\{\mathbf{X}^*\}^T = \{1230,1 \text{ мм}^2; 345 \text{ мм}\}$ с весом $W_{opt} = 2,698 \text{ кГ}$ (рис. 12), где 1 – ограничение, что вероятность безотказной работы конструкции равна 0,99, 4 – кривая уровня целевой функции. На рис. 12 показаны ограничения 2 и 3, где вероятность безотказной работы конструкции равна соответственно 0,95 и 0,90.

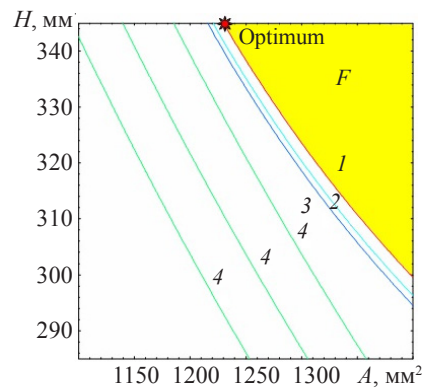


Рис. 12

Заключение

Поставлена и решена новая задача оптимизации по массе геометрически нелинейных стержневых конструкций со случайными глобальными несовершенствами. В качестве ограничений рассматриваются вероятности безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости. Проанализированы вероятностные свойства критических нагрузок потери устойчивости для асимметричной особой точки бифуркации, симметричной особой точки бифуркации, предельной точки. Показано, что эти свойства принципиально различны. Для всех типов критических точек представлены и решены примеры.

Список литературы

1. *Сергеев О.А., Киселев В.Г.* Оптимизация геометрически нелинейных стержневых конструкций с начальными глобальными несовершенствами // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2010. Вып. 72. С. 100–112.
2. *Mróz Z., Piekarski J.* Sensitivity analysis and optimal design of nonlinear structures // Int. J. Numer. Meth. Engng. 1998. V. 42. P. 1231–1262.
3. *Киселев В.Г., Сергеев О.А., Сергеева С.А.* Оптимизация по массе геометрически нелинейных стержневых конструкций с несовершенствами // Вестник Нижегород. ун-та. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2011. №4. Ч. 5. С. 2232–2234.
4. *Bolotin, V.V.* Statistical methods in the nonlinear theory of elastic shells // Izvestija Akademii Nauk SSSR. Otdeleni tekhnicheskikh nauk. Vol. 3 (English translation, NASA, TTF-85. 1962. P. 1–16).

5. Любимов А.К., Малков В.П. Задачи оптимального проектирования с ограничениями по ресурсу, вероятности безотказной работы для конструкций с трещинами // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций: Науч. труды. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1995. Вып. 2. С. 53–69.

6. Koiter W.T. The stability of elastic equilibrium: Ph. D. Thesis, N.J. Paris, Amsterdam, Holland, 1945 (in Dutch), English Translation, NASA TTF-10833 (1967).

7. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. 5-е изд. М.: КНОРУС, 2010. 480 с.

8. Ikeda K., Murota K., Elishakoff I. Reliability of structures subject to normally distributed initial imperfections // Computers & Structures. 1996. Vol. 59. No. 3. P. 463–469.

OPTIMIZATION OF BAR STRUCTURES WITH RANDOM IMPERFECTIONS WITH STABILITY CONSTRAINTS

A.K. Lyubimov, O.A. Sergeev, V.G. Kiselev, S.A. Sergeeva

A method for the optimization of geometrically non-linear bar structures containing random global imperfections is presented. The initial imperfections are distributed randomly according to the normal law. Optimization is carried out with constraints on the unfailing operation probability of the structure for the overall loss of stability and constraints on the design variables. Criteria are formulated for the detection of asymmetric, symmetric special bifurcation points of the first or second type and the limit point. The probability density functions of buckling loads for the four types of critical points are derived. The optimization method is based on quadratic approximation of the objective function and linear approximation of the constraints on the probability that the structure does not lose stability. The method was verified on three test structures.

Keywords: optimization of geometrically non-linear rod structures, the global random imperfections, unfailing operation probability of the structure for the overall loss of stability, non-multiple singular bifurcation points, non-multiple limit points.