

УДК 539.3

**ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ
В ДВУМЕРНОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СРЕДЕ
С НЕПЛОТНОЙ УПАКОВКОЙ ЧАСТИЦ^{*)}**

© 2012 г.

В.И. Ерофеев, И.С. Павлов

*Нижегородский филиал
Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН*

erf04@sinn.ru

Поступила в редакцию 11.04.2012

Рассмотрена двумерная модель кристаллической (зернистой) среды, представляющая собой квадратную решетку из упруго взаимодействующих круглых частиц, обладающих трансляционными и вращательной степенями свободы. В длинноволновом приближении получена система нелинейных уравнений в частных производных, описывающих распространение продольных, поперечных и ротационных волн в такой среде. Найдены в аналитическом виде зависимости скоростей упругих волн и коэффициентов нелинейностей от размеров частиц и параметров взаимодействий между ними. В области низких частот, когда ротационной степенью свободы частиц можно пренебречь, полученная трехмодовая система вырождается в двухмодовую, которая методом многих масштабов приводится к эволюционному уравнению Кадомцева – Петвиашвили относительно сдвиговой деформации, имеющему решение в виде солитона. Для ряда кристаллов с кубической симметрией определено, является ли солитон устойчивым и какова его полярность.

Ключевые слова: среда с микроструктурой, плоская локализованная волна деформации, устойчивость и полярность солитона.

Введение

Механика сред с микроструктурой (и тесно связанная с ней теория обобщенных континуумов) из-за своей сложности и отсутствия практических потребностей многие годы оставалась невостребованной. Сейчас она переживает очередной этап своего развития после работ Е. и Ф. Коссера [1] и после «бума» в 1960-х годах, когда на нее возлагали большие надежды в области континуальной теории дислокаций, механики композитов. Интерес к ней вновь начал возрастать с середины 1990-х годов (механика разрушения [2], геомеханика и механика гранулированных материалов [3, 4], моментная теория пластичности [5]). Этот интерес сохраняется в первом десятилетии XXI века прежде всего в связи с развитием нанотехнологий и появлением метаматериалов [6, 7] – новых классов веществ со сложно организо-

^{*)}Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 12-08-00888, 10-08-01108 и 12-08-90032-Бел-а).

ванной внутренней структурой. В настоящее время обобщенные континуумы, такие как микрополярные или ориентированные среды, высокоградиентные материалы, микроморфные среды, композиты, тела со слабыми или сильными нелокальными взаимодействиями, активно изучаются как теоретиками, так и экспериментаторами, специализирующимися в различных отраслях механики и физики [8, 9]. Развивается волновая динамика сред с микроструктурой, позволяющая, в частности, предложить новые методы неразрушающего контроля напряженно-деформированного состояния, структуры и свойств материалов [10, 11]. Однако для адекватного описания интенсивных двумерных и трехмерных процессов в структурированных материалах средствами нелинейной волновой динамики необходима разработка новых математических моделей. Для построения таких моделей целесообразно использовать метод структурного моделирования [12], поскольку структурные модели содержат параметры, характеризующие геометрию материала (период решетки, размеры частиц, их форму), и поэтому являются наиболее подходящими моделями для изучения влияния размерных эффектов на макросвойства материала.

Основные цели публикуемой работы – выявление возможности распространения плоского солитона деформации в двумерной кристаллической среде с неплотной упаковкой частиц, а также исследование его устойчивости относительно двумерных возмущений и определение полярности. Для достижения этих целей на первом этапе методом структурного моделирования получены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие распространение продольных, поперечных и ротационных волн в такой среде, а также установлены в аналитическом виде зависимости линейных и нелинейных макропараметров среды от размеров частиц и параметров взаимодействий между ними. Далее, в области низких частот, когда ротационная волна является нераспространяющейся, полученная трехмодовая система уравнений вырождается в двухмодовую, которая методом многих масштабов приводится к эволюционному уравнению Кадомцева – Петвиашвили относительно сдвиговой деформации, имеющему решение в виде солитона. На заключительном этапе анализируются различные сценарии поведения плоской уединенной волны в зависимости от начальных условий уравнения Кадомцева – Петвиашвили и его коэффициентов, зависящих от параметров микроструктуры рассматриваемой среды.

1. Дискретная модель

Рассмотрим двумерную квадратную решетку, состоящую из однородных круглых частиц (зерен или гранул) массой M и диаметром d . В исходном состоянии они сосредоточены в узлах решетки, и расстояние между центрами масс соседних частиц как вдоль оси x , так и вдоль оси y равно a (рис. 1). При движении в плоскости каждая частица имеет три степени свободы: смещение центра масс частицы с номером $N = N(i, j)$ по осям x и y (трансляционные степени свободы $u_{i,j}$ и $w_{i,j}$) и поворот относительно центра масс (ротационная степень свободы $\phi_{i,j}$) (рис. 2). Кинетическая энергия частицы $N(i, j)$ описывается формулой

$$T_{i,j} = \frac{M}{2} (\dot{u}_{i,j}^2 + \dot{w}_{i,j}^2) + \frac{J}{2} \dot{\phi}_{i,j}^2, \quad (1)$$

где $J = Md^2/8$ – момент инерции частицы относительно оси, проходящей через центр масс.

Считается, что частица N взаимодействует лишь с восемью ближайшими соседями по решетке, центры масс четырех из которых удалены от частицы N на рассто-

яние a как вдоль оси x , так и вдоль оси y (это частицы первой координационной сферы), а центры масс других четырех лежат на диагоналях квадратной решетки (это частицы второй координационной сферы) (см. рис. 2). Центральные и нецентральные взаимодействия соседних гранул моделируются упругими пружинами четырех типов [13]: центральными (с жесткостью K_0), нецентральными (с жесткостью K_1), «диагональными» (K_2), а также пружинами, соединяющими центральную частицу с зернами второй координационной сферы (K_3). Взаимодействия при растяжении–сжатии материала моделируются центральными и нецентральными пружинами. Через пружины типа K_1 передаются также моменты при поворотах частиц. Пружины с жесткостью K_2 характеризуют силовые взаимодействия частиц при сдвиговых деформациях в материале. Для удобства дальнейших вычислений будем считать, что точки соединения пружин K_0 лежат в центрах круглых частиц, а пружин K_1, K_2 и K_3 – в вершинах квадрата со стороной $h = d/\sqrt{2}$, вписанного в окружность (см. рис. 2).

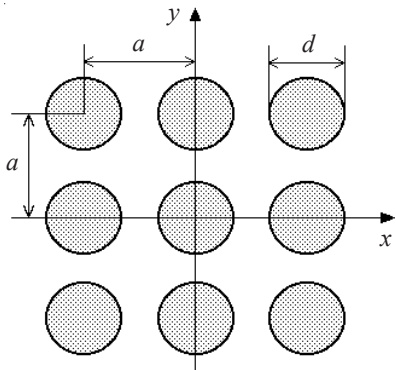


Рис. 1. Квадратная решетка из круглых частиц

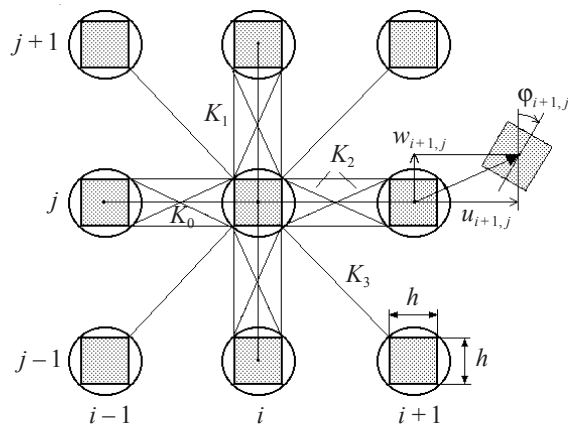


Рис. 2. Схема силовых взаимодействий между частицами и кинематика

Предполагается, что смещения зерен малы по сравнению с размерами элементарной ячейки рассматриваемой решетки. Взаимодействие частиц при отклонениях от положения равновесия определяется относительными удлинениями пружин (см. рис. 2). Потенциальная энергия, обусловленная взаимодействием частицы N с восемью ближайшими соседями по решетке, описывается формулой

$$U_N = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^4 \frac{K_0}{2} D_{0n}^2 + \sum_{n=1}^8 \frac{K_1}{2} D_{1n}^2 + \sum_{n=1}^8 \frac{K_2}{2} D_{2n}^2 + \sum_{n=1}^4 \frac{K_3}{2} D_{3n}^2 \right), \quad (2)$$

где D_{ln} ($l=0, 1, 2, 3$) – удлинения пронумерованных в произвольном порядке пружин четырех типов, соединяющих частицу с ее соседями, причем удлинения центральных пружин определяются изменениями расстояний между геометрическими центрами круглых частиц, а растяжения остальных пружин характеризуются изменениями расстояний между вершинами квадратов, вписанных в окружности (см. рис. 2). В выражение (2) входит дополнительный множитель $1/2$, поскольку потенциальная энергия каждой пружины делится поровну между двумя частицами, соединенными этой пружиной.

Обозначив $\Delta u_i = u_{i,j} - u_{i-1,j}$ и $\Delta u_j = u_{i,j} - u_{i,j-1}$, вычислим выражения для удлин-

ний пружин D_{ln} в приближении малости величин $\Delta u_i \sim \Delta w_i \sim \Delta u_j \sim \Delta w_j \sim a\varepsilon$, $\Delta\varphi_i \sim \Delta\varphi_j \sim \varepsilon^{3/2}$, $\Phi_i \sim \sqrt{\varepsilon}$, где $\Phi_i = (\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j})/2 \ll \pi/2$ и $\varepsilon \ll 1$ – мера деформации ячейки. После подстановки этих выражений в (2) составим функцию Лагранжа $L = T_{i,j} - U_{i,j}$ для частицы с номером (i,j) с точностью до слагаемых порядка $\varepsilon^{5/2}$ включительно. Затем с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода можно получить нелинейные дифференциально-разностные уравнения, описывающие динамику рассматриваемой решетки (в линейном приближении такие уравнения были получены в работе [14]). В данной работе подробно рассмотрим континуальное приближение предложенной модели.

2. Континуальное приближение

В случае длинноволновых возмущений, когда $\lambda \gg a$ (λ – характерная длина акустической волны), лагранжиан рассматриваемой среды с микроструктурой примет вид:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{M}{2} (u_t^2 + w_t^2 + R^2 \varphi_t^2) - \frac{M}{2} [c_1^2 (u_x^2 + w_x^2) + c_2^2 (w_x^2 + u_y^2) + \\
& + R^2 c_3^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + s^2 (u_x w_y + u_y w_x) + 2\beta^2 (w_x - u_y) \varphi + 2\beta^2 \varphi^2 + \\
& + \alpha_1 (u_x^3 + w_y^3) + \alpha_2 (u_y^3 + w_x^3 + u_x^2 u_y + u_x u_y^2 + w_x^2 w_y + w_x w_y^2 - \\
& - u_x^2 w_x - u_y^2 w_x - u_x^2 w_y - u_y w_y^2 - u_y w_x^2 - u_x w_y^2) - \\
& - 2\alpha_2 (u_x u_y (w_x + w_y) + w_x w_y (u_x + u_y)) + \alpha_3 (u_x w_x^2 + u_y^2 w_y) + \\
& + \alpha_4 (w_x w_y \varphi - u_x u_y \varphi + \frac{1}{2} (w_x^2 - u_x^2 + w_y^2 - u_y^2) \varphi) + \\
& + \alpha_5 (u_y \varphi^2 + w_x \varphi^2) + \alpha_6 (u_x \varphi^2 + w_y \varphi^2) + \alpha_7 (u_x w_x \varphi + u_y w_y \varphi)].
\end{aligned} \tag{3}$$

С помощью вариационного принципа Гамильтона – Остроградского из лагранжиана (3) выводится система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая динамические процессы в двумерной кристаллической среде с неплотной упаковкой частиц:

$$\begin{aligned}
u_{tt} = & c_1^2 u_{xx} + c_2^2 u_{yy} + s^2 w_{xy} - \beta^2 \varphi_y + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_2}{\partial y}, \\
w_{tt} = & c_2^2 w_{xx} + c_1^2 w_{yy} + s^2 u_{xy} + \beta^2 \varphi_x + \frac{1}{2} \frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_4}{\partial y}, \\
R^2 \varphi_{tt} = & R^2 c_3^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \beta^2 (u_y - w_x) - 2\beta^2 \varphi - F_5.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь введены обозначения: c_i ($i = 1, 2, 3$) – скорости распространения соответственно продольной, сдвиговой волн и волны микровращений, s – коэффициент линейной связи между продольными и сдвиговыми деформациями в материале, β – параметр дисперсии, $R = d\sqrt{8}$ – радиус инерции частицы. Кроме того, в правых частях уравнений (4) содержатся функции нелинейностей:

$$\begin{aligned}
F_1 = & 3\alpha_1 u_x^2 + \alpha_2 (2u_x u_y + u_y^2 - 2u_x w_x - u_x w_y - w_y^2) + \alpha_3 w_x^2 + \\
& - 2\alpha_2 (u_y w_x + u_y w_y + w_x w_y) - \alpha_4 (u_y \varphi + u_x \varphi) + \alpha_6 \varphi^2 + \alpha_7 w_x \varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= \alpha_2(3u_y^2 + u_x^2 + 2u_x u_y - 2u_y w_x - w_y^2 - w_x^2) + 2\alpha_3 u_y w_y - \\
&- 2\alpha_2(u_x w_x + u_x w_y + w_x w_y) - \alpha_4(u_x \varphi + u_y \varphi) + \alpha_5 \varphi^2 + \alpha_7 w_y \varphi, \\
F_3 &= \alpha_2(3w_x^2 + 2w_x w_y + w_y^2 - u_x^2 - u_y^2 - 2u_y w_x - 2u_x u_y - 2u_x w_y) + \\
&+ 2\alpha_3 u_x w_x + \alpha_4(w_y \varphi + w_x \varphi) + \alpha_5 \varphi^2 + \alpha_7 u_x \varphi, \\
F_4 &= 3\alpha_1 w_y^2 + \alpha_2(w_x^2 + 2w_x w_y - u_x^2 - 2u_y w_y - 2u_x w_y) + \\
&+ \alpha_3 u_y^2 - 2\alpha_2(u_x u_y + u_x w_x + u_y w_x) + \alpha_4(w_x \varphi + w_y \varphi) + \alpha_6 \varphi^2 + \alpha_7 u_y \varphi, \\
F_5 &= \alpha_4 \left(w_x w_y - u_x u_y + \frac{1}{2}(w_x^2 - u_x^2 + w_y^2 - u_y^2) \right) + \\
&+ 2\alpha_5(u_y \varphi + w_x \varphi) + 2\alpha_6(u_x \varphi + w_y \varphi) + \alpha_7(u_x w_x + u_y w_y),
\end{aligned} \tag{5}$$

где α_i ($i = 1, \dots, 7$) – коэффициенты нелинейностей.

В [15] было показано, что коэффициенты уравнений (4) выражаются через силовые постоянные K_0, K_1, K_2, K_3 , параметр решетки a и размер частицы $h = d/\sqrt{2}$ (d – диаметр частицы) следующим образом:

$$\begin{aligned}
c_1^2 &= \frac{a^2}{M} \left(K_0 + 2K_1 + \frac{2(a-h)^2}{(a-h)^2 + h^2} K_2 + K_3 \right), \\
c_2^2 &= \frac{a^2}{M} \left(\frac{2h^2}{(a-h)^2 + h^2} K_2 + K_3 \right), \\
c_3^2 &= \frac{a^2 h^2}{2MR^2} \left(K_1 + \frac{a^2}{(a-h)^2 + h^2} K_2 \right), \\
s^2 &= \frac{2a^2}{M} K_3, \quad \beta^2 = \frac{2a^2}{M} \frac{h^2}{(a-h)^2 + h^2} K_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Из (6) следует, что независимо от типа решетки $c_2^2 = \beta^2 + s^2/2$. В работе [15] и гл. 3 монографии [12] был проведен подробный анализ соотношений (6) в зависимости от значений параметров микроструктуры, в результате которого по известным экспериментальным данным (при комнатной температуре) [16] для некоторых кубических кристаллов были вычислены значения скоростей волн c_1, c_2, c_3 , параметров β и s , а также модельных параметров силовых взаимодействий между частицами (табл. 1):

$$\begin{aligned}
c_1 &= \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{2C_{44} - C_{12}}{\rho}}, \\
c_3 &= \sqrt{\frac{2}{\rho(2 + K_0/K_1)} \left[C_{11} + C_{12} - 2C_{44} + \frac{K_0/K_1 + 4p\sqrt{2} - 2}{p^2} (C_{44} - C_{12}) \right]}, \\
s &= \sqrt{\frac{2C_{12}}{\rho}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{2(C_{44} - C_{12})}{\rho}},
\end{aligned}$$

$$\frac{K_1}{a} = \frac{1}{2 + K_0/K_1} \left[C_{11} - C_{12} - 2(C_{44} - C_{12}) \left(\frac{\sqrt{2}}{p} - 1 \right)^2 \right],$$

$$\frac{K_2}{a} = (C_{44} - C_{12}) \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{p} - 1 \right)^2 \right), \quad \frac{K_3}{a} = C_{12}.$$

При вычислениях принималось, что $p = d/a = 0,9$ и $K_0/K_1 = 10$ (центральные взаимодействия доминируют).

Таблица 1

Параметры структуры для кристаллов с кубической симметрией

	Параметры структуры		Кристаллы		
			LiF	NaF	NaBr
Экспериментальные данные	Плотность (кг/м ³)	ρ	2600	2800	3200
	Константы упругости (10 ⁹ Н/м ²)	C_{11}	113,00	97,00	32,55
		C_{12}	48,00	25,60	13,14
		C_{44}	63,00	28,00	13,26
Вычисленные характеристики	Скорости волн (м/с)	c_1	6593	5890	3190
		c_2	5477	3295	2045
		c_3	5659	2896	1092
	Коэффициент линейной связи между продольными и сдвиговыми деформациями (м/с)	s	6076	4276	2866
	Параметр дисперсии (м/с)	β	3396	1309	274
	Параметры силовых взаимодействий между частицами (10 ⁹ Н/м ²)	K_0/a	46,01	58,19	16,11
		K_1/a	4,601	5,819	1,611
		K_2/a	19,897	3,183	0,159
K_3/a		48,00	25,0	13,14	

Коэффициенты нелинейностей зависят от параметров микроструктуры:

$$M\alpha_1 = \frac{K_2}{r^4} a^3 (a-h) h^2 + \frac{K_3}{4(a-h)} a^3, \quad M\alpha_2 = \frac{K_3}{4(a-h)} a^3,$$

$$M\alpha_3 = K_0 a^2 + K_1 \frac{a^3}{a-h} + \frac{K_2}{r^4} a^3 (a-h) (a^2 - 2ah - h^2) - \frac{K_3 a^3}{4(a-h)},$$

$$M\alpha_4 = \frac{2a^2 h K_3}{a-h}, \quad M\alpha_5 = \frac{K_3}{(a-h)^2} a^2 h^2, \quad (7)$$

$$M\alpha_6 = K_1 \frac{ah^2}{a-h} + K_2 \frac{ah^2}{r^4} (2h-a) (5ah - 2h^2 - a^2) + \frac{K_3}{(a-h)^2} a^2 h^2,$$

$$M\alpha_7 = K_1 \frac{2a^2 h}{a-h} + \frac{2a^3 h}{r^4} K_2 (5h^2 - 5ah + a^2).$$

Здесь $r = \sqrt{(a-h)^2 + h^2}$ – длина пружин с жесткостью K_2 в начальный момент времени (см. рис. 2).

3. Низкочастотное (двухмодовое) приближение

Теоретические оценки [15] и экспериментальные данные [17] показывают, что ротационные волны в твердых телах существуют в области высоких частот ($> 10^9 - 10^{11}$ Гц), где проведение акустических экспериментов сталкивается с большими техническими трудностями. Тем не менее, информацию о микроструктуре среды можно получить даже по акустическим измерениям на сравнительно низких частотах ($10^6 - 10^7$ Гц), когда ротационные волны в среде не распространяются. Поэтому рассмотрим низкочастотное приближение уравнений (4), в котором микроповороты частиц среды не являются независимыми и определяются полем смещений. Связь между микроповоротами φ и смещениями u и w можно найти из линейной части третьего уравнения (4) методом последовательных приближений. В первом приближении

$$\varphi(x, t) \approx \frac{1}{2}(u_y - w_x). \quad (8)$$

Это классическое соотношение теории упругости, связывающее повороты частиц среды с завихренностью поля смещений. Учет соотношения (8) приводит к «замораживанию» вращательной степени свободы. При этом в среде остаются лишь трансляционные степени свободы и два типа волн – продольные и сдвиговые (поперечные), и лагранжиан L принимает вид:

$$\begin{aligned} L = & \frac{M}{2} \left(u_t^2 + w_t^2 + \frac{R^2}{4} (u_{yt} - w_{xt})^2 \right) - \\ & - \frac{M}{2} \left[c_1^2 (u_x^2 + w_y^2) + c_2^2 (w_x^2 + u_y^2) + \frac{R^2}{4} c_3^2 ((u_{xy} - w_{xx})^2 + (u_{yy} - w_{xy})^2) + \right. \\ & \left. + s^2 (u_x w_y + u_y w_x) - \frac{\beta^2}{2} (w_x - u_y)^2 + \right. \\ & \left. + \alpha_1 (u_x^3 + w_y^3) - \alpha_2 (u_x^2 w_y + u_x w_y^2 + 2u_x u_y w_y + 2u_x w_x w_y) + \right. \\ & \left. + \gamma_1 (u_y^3 + w_x^3 - u_y w_x^2 - u_y^2 w_x) + \gamma_2 (u_x u_y^2 + w_x^2 w_y) + \gamma_3 u_x w_x^2 + \gamma_4 u_y^2 w_y + \right. \\ & \left. + \gamma_5 (u_x^2 u_y + w_x w_y^2 - u_x^2 w_x - u_y w_y^2) - (2\gamma_5 + \gamma_6) u_x u_y w_x - (2\gamma_5 + \gamma_7) u_y w_x w_y \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \alpha_2 + \frac{\alpha_5 - \alpha_4}{4}, \quad \gamma_2 = \alpha_2 + \frac{\alpha_6 - \alpha_4}{4}, \quad \gamma_3 = \alpha_5 + \frac{\alpha_6}{4} - \frac{\alpha_7}{2}, \quad \gamma_4 = \alpha_3 + \frac{\alpha_6}{4} + \frac{\alpha_7}{2}, \\ \gamma_5 = \alpha_2 - \frac{\alpha_4}{4}, \quad \gamma_6 = \frac{1}{2}(\alpha_6 - \alpha_7), \quad \gamma_7 = \frac{1}{2}(\alpha_6 + \alpha_7). \end{aligned} \quad (10)$$

В лагранжиане (9) появляются дополнительные слагаемые, содержащие вторые производные от поля смещений, которых нет в классическом варианте теории упругости. Именно в них сохраняется информация о микроструктуре среды. Слагаемые со смешанными производными по времени и пространству u_{yt} и w_{xt} учитывают вклад ротационных движений в кинетическую энергию, а члены с пространственными производными u_{xy} , w_{xx} и т.п. описывают вклад в потенциальную энергию напряжений, обусловленных изгибом решетки. Из лагранжиана (9) можно полу-

читать уравнения градиентной теории упругости [18, 19], содержащие слагаемые с производными высокого порядка (в данном случае – четвертого):

$$\begin{aligned}
& u_{tt} - c_1^2 u_{xx} - \left(c_2^2 - \frac{\beta^2}{2} \right) u_{yy} - \left(s^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) w_{xy} = \\
& = \frac{R^2}{4} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_y - w_x) - c_3^2 \Delta (u_y - w_x) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_2}{\partial y}, \\
& w_{tt} - \left(c_2^2 - \frac{\beta^2}{2} \right) w_{xx} - c_1^2 w_{yy} - \left(s^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) u_{xy} = \\
& = -\frac{R^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_y - w_x) - c_3^2 \Delta (u_y - w_x) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_4}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь символ Δ обозначает двумерный лапласиан $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$; $H_{1,2,3,4}$ – функции нелинейностей:

$$\begin{aligned}
H_1 &= 3\alpha_1 u_x^2 - 2\alpha_2 \left(u_x w_y + \frac{1}{2} w_y^2 + u_y w_y + w_x w_y \right) + \\
&+ \gamma_2 u_y^2 + \gamma_3 w_x^2 + 2\gamma_5 (u_x u_y - u_x w_x) - (2\gamma_5 + \gamma_6) u_y w_x, \\
H_2 &= -2\alpha_2 u_x w_y + \gamma_1 (3u_y^2 - w_x^2 - 2u_y w_x) + 2\gamma_2 u_x u_y + 2\gamma_4 u_y w_y + \\
&+ \gamma_5 (u_x^2 - w_y^2) - (2\gamma_5 + \gamma_6) u_x w_x - (2\gamma_5 + \gamma_7) w_x w_y, \\
H_3 &= -2\alpha_2 u_x w_y + \gamma_1 (3w_x^2 - u_y^2 - 2u_y w_x) + 2\gamma_2 w_x w_y + 2\gamma_3 u_x w_x + \\
&+ \gamma_5 (w_y^2 - u_x^2) - (2\gamma_5 + \gamma_6) u_x u_y - (2\gamma_5 + \gamma_7) u_y w_y, \\
H_4 &= 3\alpha_1 w_y^2 - 2\alpha_2 \left(u_x w_y + \frac{1}{2} u_x^2 + u_x u_y + u_x w_x \right) + \\
&+ \gamma_2 w_x^2 + \gamma_4 u_y^2 + 2\gamma_5 (w_x w_y - u_y w_y) - (2\gamma_5 + \gamma_7) u_y w_x.
\end{aligned}$$

Необходимо подчеркнуть, что, несмотря на отсутствие микроповоротов в уравнениях (11), микроструктура среды повлияла на коэффициенты этих уравнений – в данном низкочастотном приближении по сравнению с исходными уравнениями (4) изменились коэффициенты перед u_{yy} , w_{xy} , w_{xx} и u_{xy} .

4. Эволюционное уравнение Кадамцева – Петвиашвили для двухмодовой модели

Рассмотрим процессы распространения локализованных волн деформации в зависимости от параметров ее микроструктуры. Для этого в уравнениях (11) введем новые координаты и время: $\xi = x - vt$, $\eta = \sqrt{\varepsilon} y$, $\tau = \varepsilon t$; $u = \sqrt{\varepsilon} u$, $w = w$. В результате уравнения (11) сведутся к следующему виду:

$$\sqrt{\varepsilon} v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon \sqrt{\varepsilon} v \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} - \sqrt{\varepsilon} c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \left(c_2^2 - \frac{\beta^2}{2} \right) \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \left(s^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \sqrt{\varepsilon} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R^2}{4} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[v^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - 2\varepsilon v \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - \right. \\
&\quad \left. - c_3^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_2}{\partial \eta}, \\
&v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon v \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} - \left(c_2^2 - \frac{\beta^2}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \varepsilon c_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \left(s^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \\
&= -\frac{R^2}{4} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[v^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - 2\varepsilon v \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - \right. \\
&\quad \left. - c_3^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_4}{\partial \eta}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Поскольку различные слагаемые в уравнениях (12) имеют разные порядки малости, рассмотрим последовательно несколько приближений.

Приближение порядка ε^0 имеет вид:

$$\left(v^2 - \left(c_2^2 - \frac{\beta^2}{2} \right) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0,$$

отсюда

$$v^2 = c_2^2 - \frac{\beta^2}{2}. \tag{13}$$

Приближение порядка $\sqrt{\varepsilon}$:

$$(v^2 - c_1^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \left(s^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{s^2 + \beta^2/2}{v^2 - c_1^2} \frac{\partial w}{\partial \eta}. \tag{14}$$

Приближение порядка ε :

$$\begin{aligned}
&-2\varepsilon v \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} - \varepsilon c_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \left(s^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \\
&= -\frac{R^2}{4} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[v^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - 2\varepsilon v \left(-\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - c_3^2 \left(\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(-\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right] + 3\gamma_1 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}.
\end{aligned} \tag{15}$$

В уравнении (15) введем обозначение $\partial w / \partial \xi = U$ и учтем выражения (13) и (14), тогда (15) сведется к уравнению:

$$2vU_{\xi\tau} + q_1(U^2)_{\xi\xi} + \frac{R^2}{4} q_2 U_{\xi\xi\xi\xi} + q_3 U_{\eta\eta} = 0, \tag{16}$$

где

$$\frac{3\gamma_1}{2\varepsilon} = q_1, \quad \frac{2c_2^2 - 2c_3^2 - \beta^2}{2\varepsilon} = q_2, \quad c_1^2 + \frac{(2s^2 + \beta^2)^2}{4(c_2^2 - c_1^2) - 2\beta^2} = q_3. \tag{17}$$

Пусть $U/U_0 = W$, $\xi/\xi_0 = X$, $\tau/\tau_0 = T$, $\eta/\eta_0 = Y$. В новых переменных уравнение (16) переписется в виде

$$2 \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T} + \frac{q_1 \tau_0 U_0}{\nu \xi_0} \frac{\partial^2 (W^2)}{\partial X^2} + \frac{R^2}{4\nu} q_2 \frac{\tau_0}{\xi_0^3} \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + q_3 \frac{\xi_0 \tau_0}{\nu \eta_0^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0. \quad (18)$$

Положим в (18) $U_0 = 1$ и $\eta_0 = \xi_0$, тогда $W = U$ и уравнение (18) примет вид:

$$2 \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T} + \frac{q_1 \tau_0}{\nu \xi_0} \frac{\partial^2 (U^2)}{\partial X^2} + \frac{R^2}{4\nu} q_2 \frac{\tau_0}{\xi_0^3} \frac{\partial^4 U}{\partial X^4} + q_3 \frac{\tau_0}{\nu \xi_0} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0. \quad (19)$$

Выберем масштабы ξ_0 и τ_0 так, чтобы коэффициент перед последним слагаемым уравнения (19) равнялся 1:

$$\frac{\tau_0}{\xi_0} = \frac{\nu}{q_3},$$

после чего уравнение (19) преобразуется к виду:

$$2 \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T} + \frac{q_1}{q_3} \frac{\partial^2 (U^2)}{\partial X^2} + \frac{R^2 q_2}{4q_3} \frac{1}{\xi_0^2} \frac{\partial^4 U}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0. \quad (20)$$

Примем $\xi_0 = R/2$, тогда (20) будет иметь вид уравнения Кадомцева–Петвиашвили:

$$2 \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T} + \frac{q_1}{q_3} \frac{\partial^2 (U^2)}{\partial X^2} + \frac{q_2}{q_3} \frac{\partial^4 U}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0. \quad (21)$$

Это уравнение имеет решение в виде плоской уединенной волны (солитона) деформации (рис. 3):

$$U(\theta) = A_c \operatorname{ch}^{-2}(\theta/\Delta), \quad (22)$$

где $\theta = X - kY - VT$ – фаза волны. Амплитуда солитона A_c и его ширина Δ определяются соотношениями:

$$A_c = \left| \frac{3q_3(k^2 - 2V)}{2q_1} \right|, \quad \Delta = 2 \sqrt{\left| \frac{q_2}{q_3(k^2 - 2V)} \right|}. \quad (23)$$

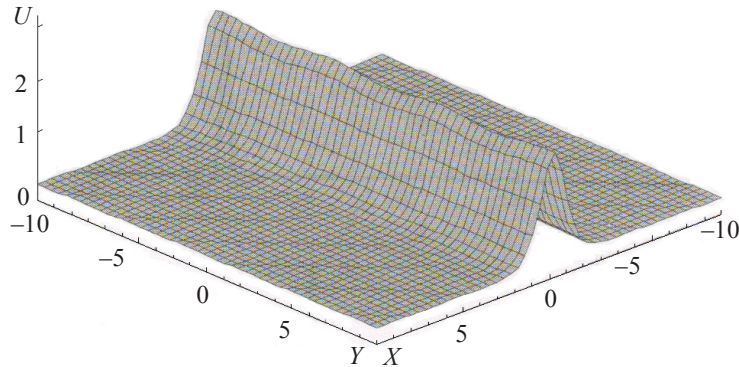


Рис. 3. Плоская локализованная волна деформации

Заметим, что произведение

$$A_c \Delta^2 = \left| \frac{6q_2}{q_1} \right| = \left| \frac{2c_2^2 - 2c_3^2 - \beta^2}{\gamma_1} \right|$$

является величиной постоянной для каждого материала.

Известно [20], что при $q_2/q_3 > 0$ плоская уединенная волна (22) устойчива, а при $q_2/q_3 < 0$ она становится неустойчивой к поперечным возмущениям. Уравнение Кадамцева–Петвиашвили имеет в этом случае другое точное решение [21]:

$$U(X, Y, T) = \frac{6q_2}{q_1} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \ln[1 + \exp(2q\theta) + \exp(2p(\theta + \psi)) + A \exp((q + p)\theta + p\psi) \cos kY], \quad (24)$$

здесь p и q – константы интегрирования,

$$\theta = X - \left(1 + \frac{2q_2}{q_3} q^2\right) T, \quad \psi = -4p \frac{q_2}{q_3} (p^2 - q^2) T,$$

$$A = \frac{4\sqrt{pq}}{p + q}, \quad k = (q^2 - p^2) \sqrt{\frac{-3q_2}{q_3}}.$$

Зависимость (24) описывает периодическую цепочку двумерных уединенных волн деформации (рис. 4). Именно в (24) преобразуется плоская уединенная волна (22), изображенная на рис. 3, если $q_2/q_3 < 0$, т.е. если выполняется условие ее неустойчивости к поперечным возмущениям. Полярность солитонов (22) и (24) зависит от знака выражения q_1/q_2 . При $q_1/q_2 > 0$ солитоны имеют положительную полярность (этот случай изображен на рис. 3 и 4), а при $q_1/q_2 < 0$ – отрицательную полярность.

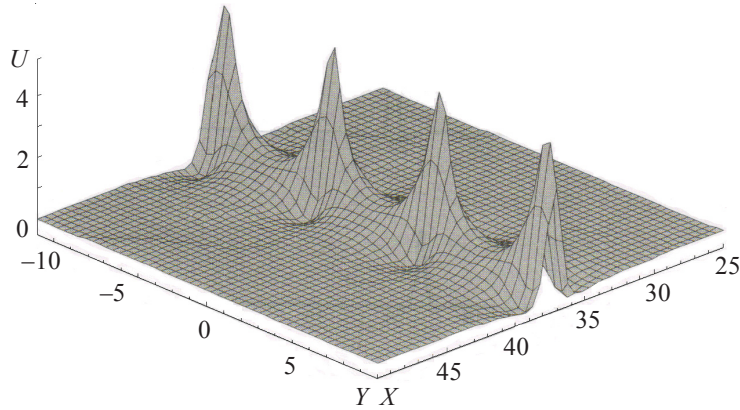


Рис. 4. Плоская волна, промодулированная в поперечном направлении

Проанализируем полученные из (17) зависимости коэффициентов q_1/q_2 и q_2/q_3 от макропараметров среды:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{3\gamma_1}{2c_2^2 - 2c_3^2 - \beta^2}, \quad (25)$$

$$\frac{q_2}{q_3} = \frac{(2c_2^2 - 2c_3^2 - \beta^2)(2c_2^2 - 2c_1^2 - \beta^2)}{\varepsilon(2c_1^2(2c_2^2 - \beta^2) - 4c_1^4 + (2s^2 + \beta^2)^2)}. \quad (26)$$

Из (10) и (7) следует, что

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \alpha_2 + \frac{\alpha_5 - \alpha_4}{4} &= \frac{K_3}{M} \left(\frac{a^3}{4(a-h)} + \frac{a^2 h^2}{4(a-h)^2} - \frac{a^2 h}{2(a-h)} \right) = \\ &= \frac{K_3 a^2 (a^2 - 3ah + 3h^2)}{4M(a-h)^2} > 0, \end{aligned}$$

следовательно, $q_1/q_2 > 0$ при $c_2^2 > c_3^2 + \beta^2/2$ и $q_1/q_2 < 0$ при $c_2^2 < c_3^2 + \beta^2/2$.

По данным, представленным в табл. 1, определим знаки выражений q_1/q_2 и q_2/q_3 . В зависимости от этих знаков наличие и полярность устойчивых плоских солитонов деформации для сред с параметрами, как у кубических кристаллов LiF, NaF и NaBr, распределяются следующим образом.

Таблица 2

Существование устойчивых плоских солитонов деформации и их полярность в некоторых кубических кристаллах

Кристалл	LiF	NaF	NaBr
Знак q_2/q_3	+	+	-
Знак q_1/q_2	-	+	+
Наличие устойчивых плоских солитонов деформации и их полярность			нет

Если в качестве начального условия для уравнения Кадомцева–Петвиашвили взять двумерный солитон, не имеющий плоского фронта, т.е. возмущение вида [22]:

$$U_0(X, Y) = 12 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{X - 32}{4} \right) \operatorname{sech}(Y - 8), \quad (27)$$

(рис. 5), то численное моделирование уравнения (21), проведенное с помощью полунейвной псевдоспектральной схемы [23] с параметрами: 256×64 – размерность сетки; $\Delta X = 0,25$ – длина шага по X ; $\Delta Y = 0,25$ – длина шага по Y ; $\Delta T = 0,003$ – длина шага по T , указывает на другой сценарий эволюции уединенной волны, а именно: купол возмущения (27) движется вперед (по X), одновременно расплываясь в стороны (по Y), причем последний эффект преобладает.

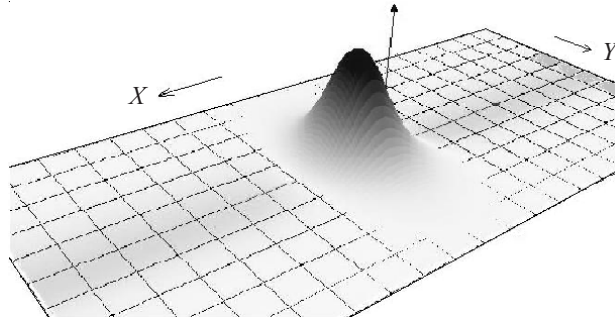


Рис. 5. Двумерный солитон без плоского фронта ($T = 0$)

С течением времени ближе к границам амплитуда возмущения нарастает до определенного предела ($A = 7,1$), постоянно расплываясь в стороны и двигаясь вперед, что приводит к появлению крестообразных структур (рис. 6).

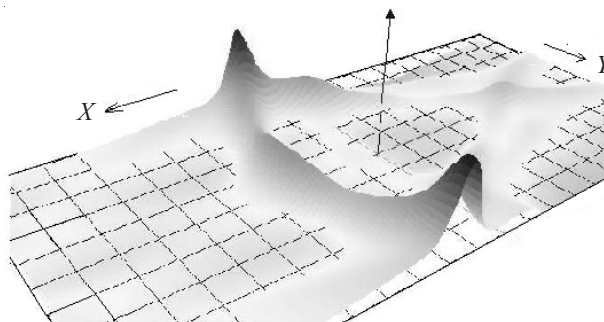


Рис. 6. Расплывание двумерного солитона ($T = 5$)

Заключение

В настоящей работе построена нелинейная математическая модель двумерной кристаллической среды с неплотной упаковкой частиц, обладающих двумя трансляционными и одной ротационной степенями свободы. Найдены в аналитическом виде зависимости скоростей упругих волн и коэффициентов нелинейностей от размеров частиц и параметров взаимодействий между ними. В области низких частот полученная система уравнений сводится к двухмодовой, линейные части уравнений которой совпадают с двумерным аналогом классических уравнений Ламе для сред с кубической симметрией. При этом «память» о микроструктуре среды остается в виде зависимостей между макроскопическими характеристиками среды и параметрами микромоделей. В свою очередь, двухмодовая система методом многих масштабов приводится к эволюционному уравнению Кадомцева–Петвиашвили относительно сдвиговой деформации, которое имеет решение в виде плоского солитона. Благодаря использованному в работе методу структурного моделирования показано, что в кристаллической среде с параметрами, как у NaBr, плоский солитон неустойчив относительно двумерных возмущений, в кристалле NaF солитон имеет положительную полярность, а в кристалле LiF – отрицательную полярность.

Список литературы

1. *Cosserat E. et F.* Theorie des corps deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p. (Reprint, 2009).
2. *Borst de R., Giessen van der E. (eds.)* Material instabilities in solids. J. Wiley and Sons (Chichester – New York – Wienheim – Brisbane – Singapore – Toronto), 1998. 556 p.
3. *Vardoulakis I., Sulem J.* Bifurcation analysis in geomechanics. Blackie Academic and Professional. London, 1995. 459 p.
4. *Николаевский В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996. 447 с.
5. *Lippman H.* Cosserat plasticity and plastic spin // *Applied Mechanical Review*. 1995. V. 48, No 11. Part 1. P. 753–762.
6. *Гусев А.И., Ремпель А.А.* Нанокристаллические материалы. М.: Физматлит, 2001. 224 с.
7. *Гуляев Ю.В., Лагарьков А.Н., Нукитов С.А.* Метаматериалы: фундаментальные исследования и перспективы применения // *Вестник РАН*. 2008. Т. 78, №5. С. 438–457.
8. *Maugin G.A., Metrikine A.V. (eds.)* Mechanics of generalized continua. One hundred years

after the Cosserats. Springer, 2010. 337 p.

9. *Altenbach H., Maugin G.A., Erofeev V.I. (eds.) Mechanics of generalized continua.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 350 p.

10. *Erofeev V.I. Wave processes in solids with microstructure.* World Scientific Publishing (New Jersey – London – Singapore – Hong Kong – Bangalore – Taipei), 2003. 256 p.

11. *Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 320 с.

12. Введение в микро- и наномеханику: математические модели и методы / Под ред. А.И. Потапова. Нижний Новгород: Изд-во НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2010. 303 с.

13. *Павлов И.С., Потапов А.И.* Двумерная модель зернистой среды // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. №2. С. 110–121.

14. *Павлов И.С., Шудяев А.А.* Акустические и оптические фононы в квадратной решетке из круглых частиц // Прикладная механика и технологии машиностроения: Сб. науч. трудов / Под ред. В.И. Ерофеева, С.И. Смирнова и Г.К. Сорокина. Нижний Новгород: Изд-во об-ва «Интелсервис», 2010. №2 (17). С. 295–306.

15. *Potapov A.I., Pavlov I.S., Lisina S.A.* Acoustic identification of nanocrystalline media // Journal of Sound and Vibration. 2009. V. 322, No 3. P. 564–580.

16. *Францевич И.Н., Воронов Ф.Ф., Бакута С.А.* Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов: Справочник / Под ред. И.Н. Францевича. Киев: Наук. думка, 1982. 286 с.

17. *Гросс Е., Корицунов А.* Вращательные колебания молекул в кристаллической решетке органических веществ и спектры рассеяния // ЖЭТФ. 1946 Т. 16, №1. С. 53–59.

18. *Ванин Г.А.* Градиентная теория упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. №1. С.46–53.

19. *Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н.* Волновые процессы в сплошных средах. Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012. 260 с.

20. *Порубов А.В.* Локализация нелинейных волн деформации. М.: Физматлит, 2009. 208 с.

21. *Пелиновский Д.Е., Степанянц Ю.А.* Самофокусирующая неустойчивость плоских солитонов и цепочек двумерных солитонов в среде с положительной дисперсией // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. С. 3387–3400.

22. Нелинейные продольные локализованные волны в пластине, взаимодействующей с магнитным полем / В.И. Ерофеев, А.И. Землянухин, В.М. Катсон, А.О. Мальханов // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3, №4. С. 5–15.

23. *Numerical recipes in C. The art of scientific computing / W.H. Press, S.L. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery.* Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 680 p.

LOCALISED STRAIN WAVES IN A TWO-DIMENSIONAL CRYSTALLINE MEDIUM WITH A NON-DENSE PACKING OF THE PARTICLES

V.I. Erofeev, I.S. Pavlov

A two-dimensional model of a crystalline (granular) medium is considered that represents a square lattice consisting of elastically interacting particles, which possess translational and rotational degrees of freedom. In the long-wavelength approximation a set of nonlinear equations in partial derivatives has been derived that describes propagation of longitudinal, transverse and rotational waves in such a medium. Dependences of the velocities of elastic waves and the nonlinearity coefficients on the sizes of particles and the parameters of interactions between them have been found in the analytical form. In the field of low frequencies, when the rotational degree of freedom of particles can be neglected, the obtained three-mode system degenerates into a two-mode system, which is reduced by the multi-scale method to Kadomtsev–Petviashvili evolutionary equation for shear deformation, which has a soliton-type solution. For some crystals with cubic symmetry it is found out, whether the soliton is steady and what kind of polarity it has.

Keywords: microstructured medium, the plane localized strain waves, stability and polarity of soliton.