

УДК 539.4

**ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ АРМИРОВАННЫХ БАЛОК-СТЕНОК
С УЧЕТОМ ОСЛАБЛЕННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
ПОПЕРЕЧНОМУ СДВИГУ^{*}**

© 2012 г.

А.П. Янковский

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск*

lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 19.04.2012

На основе второго варианта теории Тимошенко сформулирована задача упругопластического деформирования продольно армированных балок-стенок с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. Исследовано механическое поведение шарнирно опертых и консольных балок, показавшее, что применение классической теории Бернулли к расчету упругопластического изгиба относительно высоких армированных балок-стенок приводит к предсказанию неоправданно заниженной их податливости. Проведенные расчеты продемонстрировали наличие в связующем таких балок значительных упругопластических деформаций поперечных сдвигов, учет которых обязателен и за счет которых и происходит, в основном, накопление деформаций в композиции.

Ключевые слова: металлокомпозиты, армирование, балки-стенки, упругопластическое деформирование, теория Тимошенко, теория Бернулли.

В работе [1] на основе определяющих соотношений деформационной теории пластичности [2] была предложена итерационная модель, описывающая упругопластическое поведение перекрестно армированного слоя из несжимаемых фазовых материалов. В настоящем исследовании на базе структурных соотношений из [1] представлены результаты моделирования упругопластического изгиба армированных балок-стенок с металлическим связующим, учитывающего их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу.

При изучении механического поведения линейно-упруго или линейно-вязкоупруго изгибаемых тонкостенных элементов конструкций типа балок, пластин и оболочек волокнистой структуры учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу целесообразно лишь тогда, когда модули упругости фазовых материалов различаются на несколько порядков (в 30 и более раз) [3–6 и др.]. В металлокомпозитных (или на основе металлического связующего) тонкостенных конструкциях модули упругости фазовых материалов различаются менее чем на порядок [7],

^{*} Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-08-00186-а).

поэтому при исследовании их упругого поведения в условиях изгиба достаточно использовать классическую теорию Кирхгофа–Лява [4, 5 и др.], не учитывающую поперечные сдвиги.

Однако при изучении упругопластического деформирования изгибаемых армированных металлокомпозитных тонкостенных элементов конструкций может оказаться необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу. Действительно, в [1] была предложена итерационная модель упругопластического поведения перекрестно армированного слоя, основанная на применении метода секущего модуля [2]. Покажем, что для некоторых металлокомпозиций или композиций с металлическим связующим при одних и тех же деформациях секущие модули (которым в линейно-упругом случае соответствуют модули упругости) фазовых материалов могут различаться в десятки раз и даже на два порядка.

С этой целью рассмотрим идеализированную диаграмму растяжения–сжатия фазового материала в виде диаграммы с линейным упрочнением [8]:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_S = \sigma_S/E, \\ \text{sign}(\varepsilon)\sigma_S + E_S(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)\varepsilon_S), & |\varepsilon| > \varepsilon_S, \end{cases} \quad (1)$$

где σ , ε – напряжение и деформация; E , E_S – модуль Юнга и модуль линейного упрочнения; σ_S , ε_S – предел текучести и предельная упругая деформация фазового материала. Секущий модуль определяется так [2, 8]:

$$G_S(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon)/\varepsilon. \quad (2)$$

На рис. 1 изображены зависимости

$$g(\varepsilon) = G_S^{(1)}(\varepsilon)/G_S^{(0)}(\varepsilon) \quad (3)$$

для некоторых композиций: АДН-11Н8М18К14Т (кривая 1), АДМ-11Н8М18К14Т (кривая 2), ИМВ-2-В (кривая 3) (механические характеристики фазовых материалов, которые, согласно [1], предполагаются несжимаемыми, приведены в табл. 1). В равенстве (3) принято: $G_S^{(0)}$, $G_S^{(1)}$ – секущие модули связующего и арматуры композиции.

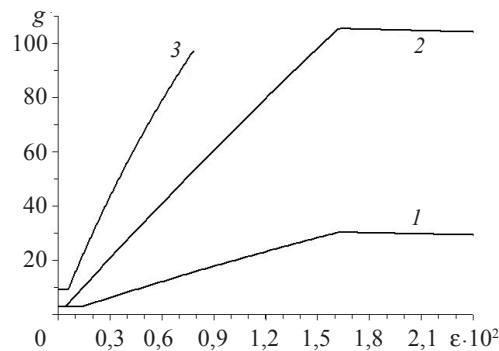


Рис. 1. Зависимости отношений секущих модулей фазовых материалов для некоторых композиций на основе металлических связующих

Левые горизонтальные участки кривых на рис. 1 согласно (1)–(3) соответствуют линейно-упругому деформированию обоих фазовых материалов, возрастающие участки – пластическому деформированию связующего, а правые убывающие уча-

стки – пластическому деформированию обоих фазовых материалов. (Борные волокна ведут себя упруго-хрупко [7], поэтому ниспадающий участок на кривой 3 отсутствует.)

Таблица 1

Механические характеристики фазовых материалов [7]

Материал	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа
Алюминиевый сплав АДН	100	71	0,824
Алюминиевый сплав АДМ	30	71	0,143
Магниевый сплав ИМВ-2	26	45	0,965
Стальная проволока 11Н8М18К14Т	3400	210	9,545
Борные волокна (В)	3200	410	–

Как видно из рис. 1, для некоторых металлокомпозиций или композиций с металлическим связующим отношение секущих модулей (3) может быть больше 30, следовательно, при изучении упругопластического изгиба тонкостенных элементов конструкций из таких композиций необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу. На сегодняшний день поперечный сдвиг учитывался либо в изотропных упругопластических пластинах и оболочках [6, 9 и др.], либо в изотропных пластинах и оболочках, усиленных подкрепляющими ребрами [9 и др.].

Для описания ослабленного сопротивления продольно-армированной балки-стенки поперечному сдвигу воспользуемся вторым вариантом теории Тимошенко [3, 4 и др.], т.е. сдвиговую деформацию в поперечном направлении зададим распределенной по высоте балки:

$$\varepsilon_{13}(x_1, x_3) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{13}^0(x_1), \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (4)$$

где h – полувысота балки; L – ее длина; ε_{13}^0 – деформация поперечного сдвига в срединном слое ($x_3 = 0$); x_1, x_2, x_3 – прямоугольная декартова система координат, связанная с балкой, как показано на рис. 2. Высота $2h$ балки-стенки и ее толщина B в направлении x_2 предполагаются постоянными (хотя это и не принципиально).

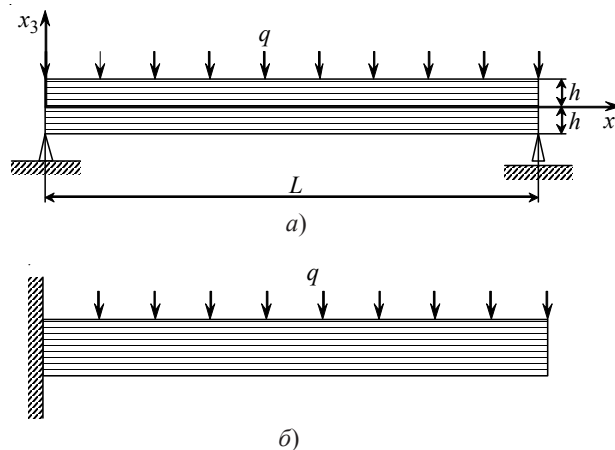


Рис. 2. Армированные балки-стенки: шарнирно опертая (а), консольная (б)

Согласно теории Тимошенко, обжатием тонкостенного элемента пренебрегаем, т.е. считаем, что прогиб u_3 не зависит от поперечной координаты x_3 ($u_3 = u_3(x_1)$). Используя дифференциальные соотношения Коши [3], с учетом (4) получим (в настоящем исследовании ограничимся геометрически линейной постановкой задачи):

$$u_1(x_1, x_3) = u_1^0(x_1) - x_3 \frac{du_3}{dx_1} + \frac{2x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \varepsilon_{13}^0(x_1); \quad (5)$$

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_3) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} - x_3 \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} + \frac{2x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \frac{d\varepsilon_{13}^0}{dx_1}, \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (6)$$

где $u_1^0(x_1)$ – перемещение точек срединного слоя ($x_3 = 0$) в продольном направлении x_1 . Остальные деформации в рассматриваемых балках-стенках либо тождественно равны нулю ($\varepsilon_{12} \equiv \varepsilon_{23} \equiv 0$), либо определяются из условия несжимаемости $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$, из которого, согласно допущениям, использованным в [1], для балок-стенок с учетом (6) и равенств $\sigma_{22} \equiv \sigma_{33} = 0$ получаем $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\varepsilon_{11}/2$. (Здесь и далее ε_{ij} , σ_{ij} – тензоры усредненных деформаций и напряжений в композиции.)

Таким образом, в соотношениях (4)–(6) неизвестными являются функции u_1^0 , u_3 , ε_{13}^0 , зависящие только от одной переменной x_1 .

Зная выражения для компонент тензора деформаций ε_{11} , ε_{13} , согласно равенству (28) с учетом соотношений (29), (27) из [1], можем определить все ненулевые компоненты напряжений в каждой точке балки-стенки

$$\sigma_{11}(x_1, x_3) = a_{11}^n \varepsilon_{11}, \quad \sigma_{13}(x_1, x_3) = a_{55}^n \varepsilon_{13}, \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (7)$$

где a_{11}^n , a_{55}^n – ненулевые компоненты матрицы A в (29) из [1], известные в каждой точке тонкостенной конструкции из решения на предыдущей n -й итерации по методу секущего модуля и в рассматриваемом частном случае продольного армирования определяемые так:

$$a_{11}^n(x_1, x_3) = 3 \sum_{k=0}^K \omega_k g_k \left(\Gamma_k, \theta \right), \quad \frac{1}{a_{55}^n(x_1, x_3)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^K \frac{\omega_k}{g_k \left(\Gamma_k, \theta \right)}, \quad (8)$$

$$\Gamma_k(x_1, x_3) = \sqrt{3 \varepsilon_{11}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)} + 4 \varepsilon_{13}^{(k)} \varepsilon_{13}^{(k)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K.$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в [1]: K – количество семейств арматуры (предполагается, что в общем случае балка может быть армирована несколькими семействами волокон разной физической природы); ω_0 , ω_k – относительное объемное содержание связующего и арматуры k -го семейства в представительном элементе композиции; $\varepsilon_{11}^{(k)}$, $\varepsilon_{13}^{(k)}$ – известные n -е приближения деформаций в k -м фазовом материале (при $k = 0$ – в связующем, при $1 \leq k \leq K$ – в арматуре k -го семейства); Γ_k ($0 \leq k \leq K$) – известное n -е приближение интенсивности деформаций сдвига в k -м фазовом материале [2, 8]; θ – температура композиции, которая в настоящем исследовании предполагается постоянной; $g_k \left(\Gamma_k, \theta \right)$ – известный на n -й итерации секущий модуль в k -м компоненте композиции: $T_k = g_k(\Gamma_k, \theta) \Gamma_k$ (T_k – интенсивность

касательных напряжений в k -м фазовом материале). Отметим, что соотношения (8) формально совпадают со структурными формулами модели В.В. Болотина для однонаправленно армированного упругого композита в случае несжимаемых фазовых материалов [10].

В настоящем исследовании для простоты предполагается, что балка нагружена только в поперечном направлении x_3 (см. рис. 2). При подстановке выражений (4) в соотношения (7) получаем автоматическое выполнение на верхней ($x_3 = h$) и нижней ($x_3 = -h$) торцевых поверхностях балки-стенки граничных условий по касательным напряжениям

$$\sigma_{13}^{\pm}(x_1) = \sigma_{13}(x_1, \pm h) = a_{55}^n(x_1, \pm h)\varepsilon_{13}(x_1, \pm h) \equiv 0.$$

В рамках первого варианта теории Тимошенко, используемого, например, в [6 и др.], эти граничные условия не могут быть тождественно удовлетворены.

На основании выражений (7) с учетом (4), (6) можем определить все внутренние силовые факторы в балке:

$$\begin{aligned} F_{11}(x_1) &= B \int_{-h}^h \sigma_{11} dx_3 = A_{11}^n \frac{du_1^0}{dx_1} - B_{11}^n \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} + 2C_{11}^n \frac{d\varepsilon_{13}^0}{dx_1}, \\ M_{11}(x_1) &= B \int_{-h}^h \sigma_{11} x_3 dx_3 = B_{11}^n \frac{du_1^0}{dx_1} - D_{11}^n \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} + 2E_{11}^n \frac{d\varepsilon_{13}^0}{dx_1}, \\ F_{13}(x_1) &= B \int_{-h}^h \sigma_{13} dx_3 = A_{55}^n \varepsilon_{13}^0(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^n(x_1) &\equiv B \int_{-h}^h a_{11} dx_3, \quad B_{11}^n(x_1) \equiv B \int_{-h}^h a_{11} x_3 dx_3, \quad D_{11}^n(x_1) \equiv B \int_{-h}^h a_{11} x_3^2 dx_3, \\ C_{11}^n(x_1) &\equiv B \int_{-h}^h a_{11} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) dx_3, \quad E_{11}^n(x_1) \equiv B \int_{-h}^h a_{11} \frac{x_3^2}{3} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) dx_3, \\ A_{55}^n(x_1) &\equiv B \int_{-h}^h a_{55} \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} dx_3, \quad 0 \leq x_1 \leq L. \end{aligned} \quad (10)$$

Внутренние силовые факторы (9) должны удовлетворять общеизвестным уравнениям равновесия и соответствующим им статическим граничным условиям [8].

В силу ограниченности объема статьи в настоящем исследовании рассмотрим лишь статически определимые балки, изображенные на рис. 2.

В случае двухопорной балки под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки (см. рис. 2а) имеем:

$$F_{11}(x_1) \equiv 0, \quad F_{13}(x_1) = Bq(x_1 - L/2), \quad M_{11}(x_1) = Bqx_1(x_1 - L)/2, \quad (11)$$

где q – давление, оказываемое на верхнюю торцевую поверхность балки: $\sigma_{33}(x_1, h) = -q$. Из третьего равенства (9) с учетом (8), (10) получаем

$$\varepsilon_{13}^0(x_1) = \frac{F_{13}(x_1)}{A_{55}^n(x_1)}, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (12)$$

т.е. на текущей $(n+1)$ -й итерации деформация поперечного сдвига в срединном

слое балки-стенки известна. Следовательно, два первых соотношения (9) можно переписать так:

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{d^{n+1}}{dx_1} u_1^0(x_1) - B_{11} \frac{d^2}{dx_1^2} u_3^{n+1}(x_1) &= F_{11}(x_1) - 2C_{11} \frac{d^{n+1}}{dx_1} \varepsilon_{13}^0(x_1), \\ B_{11} \frac{d^{n+1}}{dx_1} u_1^0(x_1) - D_{11} \frac{d^2}{dx_1^2} u_3^{n+1}(x_1) &= M_{11}(x_1) - 2E_{11} \frac{d^{n+1}}{dx_1} \varepsilon_{13}^0(x_1). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь и далее будем восстанавливать верхний индекс « $n+1$ » у разыскиваемых функций, который ранее опускали для сокращения записи используемых соотношений и который означает номер текущей итерации. Правые части в (13), согласно (11), (12), – известные функции переменной x_1 .

Кинематические граничные условия, соответствующие рассматриваемой двухпорной балке, имеют вид:

$$u_1^0(0) = 0, \quad u_3^{n+1}(0) = u_3^{n+1}(L) = 0. \quad (14)$$

Двухточечная граничная задача (13), (14) может быть решена численно методом пристрелки [11] с привлечением абсолютно устойчивых неявных схем Рунге–Кутты [12] для интегрирования возникающих при этом вспомогательных начальных задач.

В случае консольной балки под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки (см. рис. 2б) вместо (11) имеем:

$$F_{11}(x_1) \equiv 0, \quad F_{13}(x_1) = Bq(x_1 - L), \quad M_{11}(x_1) = Bq(x_1 - L)^2/2. \quad (15)$$

Кинематические граничные условия на защемленном конце балки имеют вид [5]:

$$u_1^0(0) = 0, \quad u_3^{n+1}(0) = 0, \quad \frac{d^{n+1}}{dx_1} u_3^{n+1}(0) = \frac{8}{5} \varepsilon_{13}^0(0). \quad (16)$$

При этом справедливыми остаются соотношения (12), (13) с учетом (15), т.е. ε_{13}^0 по-прежнему определяется независимо от u_1^0, u_3^{n+1} . Задача Коши для системы (13) при начальных условиях (16) численно может быть проинтегрирована методами Рунге–Кутты [12].

В качестве конкретных примеров исследуем упругопластическое деформирование изгибаемых балок-стенок, изображенных на рис. 2, изготовленных из магниевого сплава ИМВ-2 и армированных борными волокнами (см. таблицу 1) с плотностью $\omega_1 = 0,5$ ($\omega_0 = 1 - \omega_1 = 0,5$). Балки имеют длину $L = 1$ м и высоту $2h = 0,1$ м, т.е. рассматриваются относительно высокие балки ($2h/L = 0,1$), так как именно для таких балок учет ослабленного сопротивления поперечному сдвигу проявляется наиболее ярко [3–5].

За меру податливости изгибаемых балок-стенок примем следующую величину:

$$u_3^m = \max_{0 \leq x_1 \leq L} |u_3(x_1)|. \quad (17)$$

Относительную разность решений, полученных по классической и уточненной теориям, на основании (17) можно оценить по формуле:

$$U_3 = \frac{u_3^T - u_3^B}{u_3^T} 100\%, \quad (18)$$

где u_3^T, u_3^B – значения u_3^m , рассчитанные по теориям Тимошенко и Бернулли соответственно. (Решение по классической теории получается по предыдущим формулам, если в (12) принять $A_{55} \rightarrow \infty$ или, что то же самое, в (13), (16) положить $\varepsilon_{13}^{n+1} \equiv 0$.)

На рис. 3 изображены зависимости $u_3(x_1)$ для изотропных и армированных балок-стенок при разных уровнях нагружения q . Кривые $1', 1'', 3', 3''$ рассчитаны для двухопорных балок (см. рис. 2а), а линии $2', 2'', 4', 4''$ – для консольных балок (см. рис. 2б). Кривые $1', 2', 3', 4'$ получены по теории Тимошенко, а $1'', 2'', 3'', 4''$ – по теории Бернулли (линии с одинаковыми номерами определены при одних и тех же значениях q).

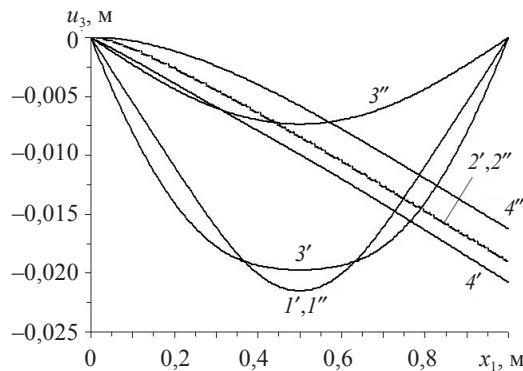


Рис. 3. Зависимости прогибов от продольной координаты в различных балках-стенках

Для получения некоторого наглядного представления о характере распределения деформаций в фазовых материалах изотропных и армированных балок на рис. 4–6 изображены проекции фасадов балок-стенок (внешние прямоугольные контуры) и поверхностей равного уровня, на которых интенсивность деформаций сдвига Γ_k (см. (8)) имеет постоянные значения. Сплошные кривые на рис. 4–6 соответствуют расчетам по теории Тимошенко, а пунктирные линии – по теории Бернулли. Номера кривых n на этих рисунках определяются отношением $n = \Gamma_k / \Gamma_0^s$ ($k = 0, 1$), где, согласно (8), $\Gamma_0^s = \sqrt{3}\varepsilon_s^{(0)}$, $\varepsilon_s^{(0)}$ – предельная упругая деформация магниевого сплава ИМВ-2 (см. (1) и таблицу 1). Следовательно, кривые 1 на рис. 4–6 определяют положение точек, в которых деформированное состояние в фазовых материалах эквивалентно предельной упругой деформации сплава ИМВ-2.

Исследуем сначала деформирование изотропных балок-стенок указанных размеров, изготовленных из сплава ИМВ-2 (материала связующей матрицы в армированных конструкциях).

На рис. 3 кривые $1', 1''$ рассчитаны для изотропной двухопорной балки при $q = 2,1$ МПа. В этом случае оказалось $U_3 = 0,7\%$ (см. (18)), поэтому линии $1', 1''$ на рис. 3 визуально неразличимы. Картина упругопластического деформирования в такой балке-стенке изображена на рис. 4а (линии равного уровня $\Gamma_0 = \text{const}$, вычисленные по обеим теориям, на этом рисунке визуально практически неразличимы). Видно, что в центральном сечении такой балки реализуется напряженное состояние, стремящееся при увеличении нагрузки q к состоянию, соответствующему пластическому шарниру. Дополнительные расчеты показали, что в случае линейно-упругого деформирования изотропной двухопорной балки-стенки $U_3 = 2,8\%$.

Кривые 2', 2'' на рис. 3 определены для изотропной консольной балки при нагрузке $q = 0,5$ МПа. В этом случае оказалось $U_3 = 1,3\%$, поэтому линии 2', 2'' также визуально практически неразличимы. На рис. 4б изображена картина упругопластического деформирования такой балки. Линии равного уровня на этом рисунке, рассчитанные по классической и уточненной теориям, также визуально практически неразличимы. По поведению кривых на рис. 4б можно заключить, что в окрестности заделки реализуется напряженное состояние, которое при увеличении q стремится к состоянию, соответствующему пластическому шарниру. Отметим, что кривые 1 на рис. 4 определяют положение упругопластических границ в изотропных балках из сплава ИМВ-2. Расчеты линейно-упругого деформирования изотропной консольной балки показали, что в этом случае $U_3 = 1,2\%$.

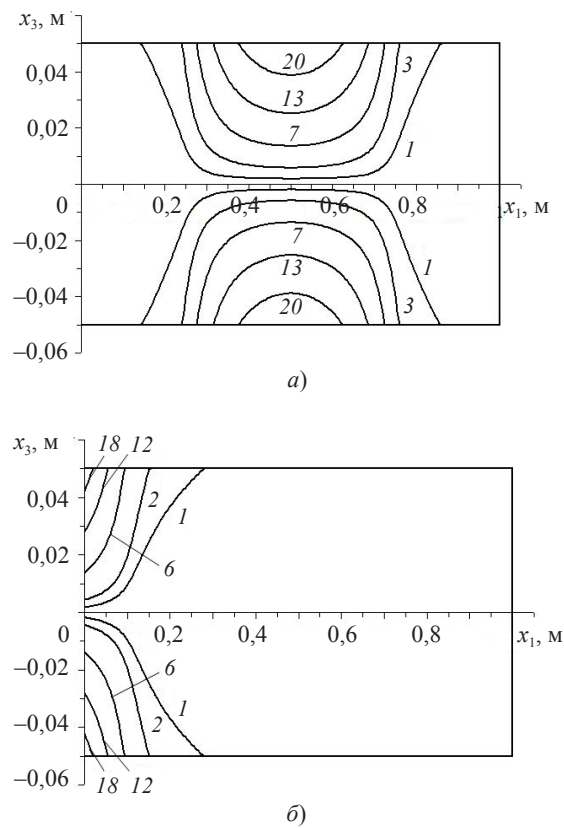


Рис. 4. Характерные зоны упругопластического деформирования в изотропных магниевых балках: шарнирно опертых (а), консольных (б)

Следовательно, даже для относительно высоких изотропных балок-стенок как при упругом, так и упругопластическом изгибе можно вполне обоснованно использовать классическую теорию Бернулли. При уменьшении же относительной высоты балок точность классической теории возрастает [3–5 и др.].

Исследуем теперь механическое поведение армированных балок-стенок из Mg–В-композиции.

Кривые 3', 3'' на рис. 3 определены для армированной двухопорной балки при $q = 30$ МПа. В отличие от изотропного случая (кривые 1', 1'') разность решений по обеим теориям при этом значительна: $U_3 = 62,7\%$ (см. (18)). Картина деформирова-

ния связующего в такой балке изображена на рис. 5а, арматуры – на рис. 5б (сплошные линии). Видно, что картины деформирования фазовых материалов в этом случае качественно разные. Кривая 1 на рис. 5а определяет положение упругопластической границы в связующем (внутри этой кривой сплав ИМВ-2 остается упругим). Кривые равного уровня ($\Gamma_0 = \text{const}$) на рис. 5а в окрестности опор близки к параболом, следовательно, в связующем в окрестности опор ($0 \leq x_1 \leq 0,2$ м, $0,8 \leq x_1 \leq 1$ м), согласно (4), (8), доминируют деформации поперечного сдвига $\varepsilon_{13}^{(0)}$. На рис. 5б подобное поведение линий равного уровня ($\Gamma_1 = \text{const}$) в окрестностях опор не наблюдается, т.е. в борных волокнах такой балки-стенки деформации поперечного сдвига $\varepsilon_{13}^{(1)}$ не доминируют над линейными деформациями $\varepsilon_{11}^{(1)}$.

Сравнение сплошных кривых с одинаковыми номерами на рис. 5а и 5б показывает, что в связующем развиваются деформации на порядок большие, чем в арматуре.

На рис. 5б пунктирными кривыми изображены линии равного уровня, рассчитанные по теории Бернулли, причем деформированные состояния связующего и арматуры в рамках этой теории полностью совпадают. Сопоставление пунктирных линий на рис. 5б с кривыми на рис. 5а показывает, что классическая теория не позволяет описать упругопластическое деформирование фазовых материалов в относительно высоких армированных балках-стенках ни качественно, ни количественно.

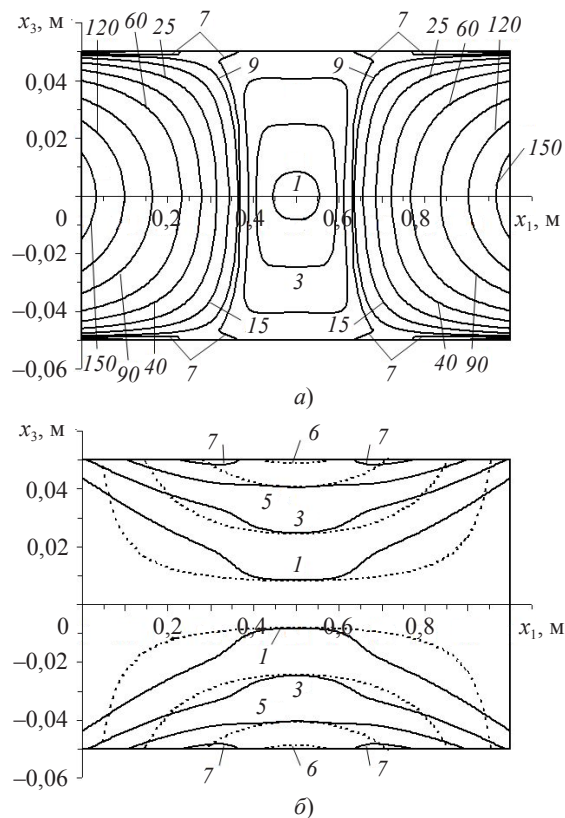


Рис. 5. Характерные зоны упругопластического деформирования в шарнирно опертой Mg-B-балке: в магниевом связующем (а), в борных волокнах (сплошные линии – расчет по теории Тимошенко, пунктирные – по теории Бернулли) (б)

Сравнивая значения (17) для кривых 1' и 3' на рис. 3, видим, что они различаются всего на 8,2 %. Следовательно, почти при одной и той же податливости, определяемой значением (17), армированная двухпорная балка выдерживает в 15 раз большую нагрузку по сравнению с изотропной балкой из сплава ИМВ-2.

Дополнительные расчеты показали, что в случае линейно-упругого изгиба армированной двухпорной балки значение $U_3 = 7,5\%$. Следовательно, если использовать обычную инженерную точность в 5%, то расчет линейно-упругого деформирования относительно высоких армированных балок-стенок из Mg-B-композиции также нужно проводить по уточненной теории. Это объясняется тем, что модули Юнга фазовых материалов в такой композиции различаются почти на порядок (см. таблицу 1).

Кривые 4', 4'' на рис. 3 рассчитаны для армированной консольной балки при $q = 7$ МПа. В этом случае $U_3 = 21,7\%$. Картина деформирования связующего в такой балке изображена на рис. 6а, арматуры – на рис. 6б (сплошные линии).

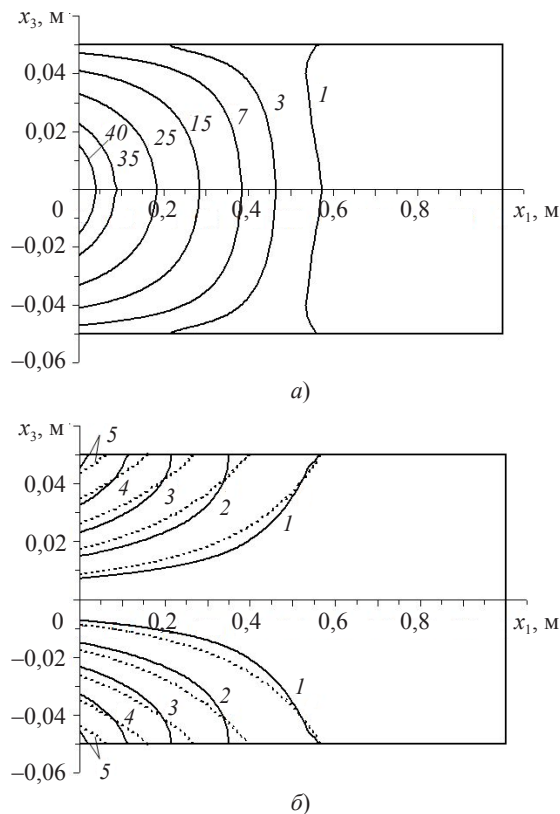


Рис. 6. Характерные зоны упругопластического деформирования в консольной Mg-B-балке: в магниевом связующем (а), в борных волокнах (сплошные линии – расчет по теории Тимошенко, пунктирные – по теории Бернулли) (б)

Как и на рис. 5, картины деформирования фазовых материалов при этом качественно разные. Кривая 1 на рис. 6а по-прежнему определяет положение упругопластической границы в связующем (правее этой линии связующее остается упругим). Кривые равного уровня ($\Gamma_0 = \text{const}$) на рис. 6а в окрестности левого конца балки близки к параболам, следовательно, и в этом случае в связующем в окрестно-

сти жестко закрепленного конца балки ($0 \leq x_1 \leq 0,4$) доминируют деформации поперечного сдвига $\epsilon_{13}^{(0)}$. На рис. 6б подобное поведение линий равного уровня ($\Gamma_1 = \text{const}$) не наблюдается: деформированное состояние в арматуре в окрестности заземленной кромки качественно подобно деформированию в упругопластическом шарнире.

Сопоставление сплошных кривых с одинаковыми номерами на рис. 6а и 6б вновь показывает, что в связующем развиваются деформации на порядок большие, чем в арматуре.

Пунктирные кривые на рис. 6б соответствуют линиям равного уровня, рассчитанным по классической теории, причем деформированные состояния связующего и арматуры в рамках этой теории по-прежнему полностью совпадают. Сравнение пунктирных линий на рис. 6б с кривыми на рис. 6а вновь показывает, что теория Бернулли ни качественно, ни количественно не описывает упругопластическое деформирование фазовых материалов в относительно высоких армированных балках-стенках.

Расчет линейно-упругого изгиба консольной армированной балки показал, что $U_3 = 3,3\%$, т.е. в этом случае вполне можно использовать классическую теорию.

Во всех приведенных выше расчетах величины u_3^m (см. (17)) имели порядок $1/5$ (и меньше) от высоты балки $2h = 10$ см (см. рис. 3), поэтому все полученные в настоящем исследовании результаты являются вполне корректными [13]. При этом максимальные значения интенсивностей деформаций сдвига фазовых материалов остаются много меньшими критических значений, соответствующих пределам прочности [7]. При больших уровнях нагружения q балок-стенок необходимо использовать уже геометрически нелинейную постановку задачи [6, 9 и др.], что выходит за рамки настоящего исследования.

Дополнительные расчеты показали, что для балок из других композиций, фазовые материалы которых приведены в таблице 1, получаются качественно подобные результаты. Единственное существенное отличие заключается лишь в том, что классическая теория для этих композиций обеспечивает 5% точность и в случае линейно-упругого (но не упругопластического) изгиба армированных балок. Это объясняется тем, что отношение модулей Юнга арматуры и связующего в этих композициях не превосходит 5, т.е. упругая анизотропия в них может считаться слабой. (Напомним, что в случае Mg-B-композиции это отношение равно 9,1; см. табл. 1.)

Проведенный анализ упругопластического изгиба продольно-армированных балок-стенок показывает, что для относительно высоких балок учет их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу при упругопластическом деформировании связующего обязателен, иначе расчеты по классической теории Бернулли будут предсказывать неоправданно заниженную (на десятки процентов и в разы) податливость композитных тонкостенных конструкций с высокопрочной арматурой.

Список литературы

1. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Структурная модель механики металлокомпозитов // Проблемы и достижения прикладной математики и механики: к 70-летию акад. В.М. Фомина: Сб. науч. тр. Новосибирск: Параллель, 2010. С. 98–103.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 376 с.
3. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 571 с.

4. *Немировский Ю.В., Резников Б.С.* Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск: Наука, 1986. 166 с.
5. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* О границах применимости некоторых теорий расчета изгибаемых армированных пластин // Научный вестник НГТУ. 2004. №3 (18). С. 91–113.
6. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
7. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
8. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
9. *Карпов В.В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. 288 с.
10. *Болотин В.В.* Основные уравнения теории армированных сред // Механика полимеров. 1965. №2. С. 27–37.
11. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
12. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
13. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1956. 420 с.

**ANALYZING THE ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION
OF REINFORCED WALL-BEAMS, ACCOUNTING FOR THE WEAKENED
RESISTANCE TO IN-PLANE SHEAR**

A.P. Yankovskii

Based on the second variant of Timoshenko theory, the problem of elastic-plastic deformation of longitudinal reinforced metal composite wall-beams is formulated, taking account of their weakened resistance to in-plane. The mechanical behavior of hinge supported and console beams is investigated. It was shown that application of classical Bernoulli theory to the analysis of wall-beams at elastoplastic bending leads to underestimation of their compliance. The calculations have shown the presence of significant rates of in-plane transversal elastic-plastic shear deformations in the binding material of such beams which has to be accounted for, and which mainly leads to the accumulation of deformations in the composite.

Keywords: metal composite, reinforcement, wall-beam, elastic-plastic deformation, Timoshenko theory, Bernoulli theory.