

УДК 539.3

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ВЫПУЧИВАНИЯ  
НЕЗАМКНУТЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СЖАТИИ<sup>\*)</sup>**

© 2012 г. **В.Г. Баженов<sup>1</sup>, А.А. Артемьева<sup>1</sup>, Е.Г. Гоник<sup>2</sup>,  
А.И. Кибец<sup>1</sup>, Д.В. Шошин<sup>3</sup>, Т.Г. Федорова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup>Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары

<sup>3</sup>Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский НИИ  
экспериментальной физики, Саров

kibec@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 24.09.2012

Приводятся результаты численного моделирования упругопластического деформирования, потери устойчивости и закритического поведения сферических оболочек. Для решения задачи применяются метод конечных элементов и явная схема интегрирования по времени типа «крест». Рассмотрены задачи нагружения сегментов сферических оболочек равномерным внешним давлением и сжатием между кольцевыми штампами. Показано, что сеточная анизотропия конечно-элементного разбиения сферической оболочки существенно влияет на форму ее выпучивания. Достоверность результатов расчетов подтверждается экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* сферическая оболочка, пластические деформации, критическая нагрузка, закритическое поведение, метод конечных элементов, эксперимент.

Как показывает обзор методов решения и результатов исследований [1, 2], проблема устойчивости и предельных состояний упругопластических оболочечных конструкций относится к наиболее трудным и до настоящего времени является малоисследованной. В предлагаемой статье приводятся результаты численного исследования выпучивания упругопластических сферических оболочек. Решение геометрически и физически нелинейной задачи основано на методе конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест». Результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными.

Деформирование оболочечной конструкции описывается в переменных Лагранжа с позиций механики сплошных сред [3, 4]. Наряду с общим базисом  $X = [X_1, X_2, X_3]$  введем местную (сопутствующую) систему координат  $x = [x_1, x_2, x_3]$  с на-

---

<sup>\*)</sup>Работа выполнена при поддержке Министерством образования и науки РФ (соглашение 14.В37.21.2013), Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и РФФИ (проекты №11-08-00557-а, 12-08-90819-мол\_рф\_нр, 12-08-33106-мол\_a\_вед).

правляющими косинусами  $n_{ij} : x_i = n_{ij} X_j, i, j = \overline{1, 3}$  (по повторяющимся индексам ведется суммирование). Здесь  $x_3$  – координата, отсчитываемая от срединной поверхности оболочки и нормальная к ней;  $x_1, x_2$  ортогональны к  $x_3$ . Сдвиговые деформации предполагаем малыми, что позволяет считать местный базис ортогональным в течение всего процесса деформирования. Компоненты тензора скоростей деформаций в местном базисе  $\dot{\epsilon}_{ij}$  выражаются через компоненты  $\dot{\epsilon}_{ij}$  скорости деформаций в общем базисе

$$\dot{\epsilon}_{ij} = n_{im} n_{jk} \dot{\epsilon}_{mk}, \quad (1)$$

которые определяются в метрике текущего состояния

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (\dot{U}_{i,j} + \dot{U}_{j,i})/2 \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad X_i = X_i|_{t=0} + \int_0^t \dot{U}_i dt. \quad (2)$$

В (2)  $U_i$  – перемещения в общей декартовой системе координат  $X$ , индекс после запятой означает частную производную по соответствующей пространственной переменной, точка над символом – частную производную по времени  $t$ .

Уравнения состояния устанавливаются отдельно для шаровых  $\dot{\epsilon}'_{ij}, \dot{\sigma}'^V$  и девиаторных  $\dot{\epsilon}'_{ij}, \dot{\sigma}'_{ij}$  составляющих скоростей деформаций и напряжений ( $\dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}'_{ij} + \delta_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij}$ ,  $\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} - \delta_{ij} \dot{\sigma}'^V$ ). Зависимость шаровых компонент скоростей деформаций и напряжений предполагается линейной. Девиаторные составляющие тензора напряжений вычисляются с помощью соотношений теории течения с кинематическим и изотропным упрочнением [3, 5]. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей работы:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{U}_i \delta \dot{U}_i dV = \int_{\Gamma_p} P_i \delta \dot{U}_i d\gamma + \int_{\Gamma_q} P_i^q \delta \dot{U}_i d\gamma \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (3)$$

где  $\rho$  – плотность;  $P_i^q$  – контактное давление;  $P_i$  – распределенная нагрузка;  $\Omega$  – исследуемая область;  $\Gamma_q$  – поверхность контакта;  $\Gamma_p$  – зона действия внешнего давления;  $\delta \dot{\epsilon}_{ij}, \delta \dot{U}_i$  – вариации  $\dot{\epsilon}_{ij}, \dot{U}_i$  (на поверхности с заданными кинематическими граничными условиями  $\delta \dot{U}_i = 0$ ). Система уравнений (1)–(3) дополняется начальными и кинематическими граничными условиями. В зоне контакта рассматривается непроникание по нормали и свободное скольжение вдоль касательной к поверхности контакта.

Для определения критической нагрузки применяется метод продолжения по параметру [6], суть которого сводится к пошаговому пересчету напряженно-деформированного состояния конструкции при последовательном увеличении нагрузки, характерных смещений или иного параметра продолжения решения. Критической считается нагрузка, начиная с которой резко возрастают перемещения оболочки, ее кинетическая энергия или некоторый интегральный параметр, характеризующий формоизменение в целом.

При равномерном сжатии сферических оболочек внешнее давление после потери устойчивости снижается. При численном исследовании потери устойчивости и закритического поведения оболочек необходимо правильно описать его изменение на до- и закритическом этапах. В настоящей работе принимается:

$$P = \begin{cases} at, & t \leq t_c, \\ P_c f(t), & t > t_c, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\alpha = \text{const}$  – скорость нарастания внешнего давления во времени,  $P_c = P(t_c)$  – критическая нагрузка,  $t_c$  – время достижения внешней нагрузкой критического значения,  $f(t)$  – монотонно убывающая функция [7].

Решение определяющей системы уравнений (1)–(4) основано на методе конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест» [5]. Расчетная область покрывается лагранжевой сеткой из 8-узловых конечных элементов. В узлах сетки определяются перемещения  $U$ , скорости  $\dot{U}$  и ускорения  $\ddot{U}$  в общей системе координат  $X$ , используемой для стыковки конечных элементов (КЭ). В каждом элементе вводится локальный прямоугольный базис  $x$ , отслеживающий его вращение как жесткого целого пошаговым пересчетом направляющих косинусов осей. Конечный элемент, в общем случае искаженный, с помощью полилинейного изопараметрического преобразования отображается на единичный куб  $1 \leq \xi_i \leq 1$ :

$$x_i = \sum_{k=1}^8 x_i^k N_k(\xi_1 \xi_2 \xi_3), \quad N_k = (1 + \xi_1/\xi_1^k)(1 + \xi_2/\xi_2^k)(1 + \xi_3/\xi_3^k)/8, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (5)$$

В (5)  $x_i^k, \xi_i^k$  – координаты узлов в базисе  $x, \xi$ . Компоненты скорости перемещений аппроксимируются внутри элемента с помощью функций формы  $N_k$ :

$$\dot{U}_i = \sum_{k=1}^8 \dot{U}_i^k N_k(\xi_1 \xi_2 \xi_3). \quad (6)$$

Компоненты скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}$  в локальном базисе  $x$  аппроксимируются в КЭ линейными функциями:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^0 + \dot{\epsilon}_{ij}^1 \xi_1 + \dot{\epsilon}_{ij}^2 \xi_2 + \dot{\epsilon}_{ij}^3 \xi_3. \quad (7)$$

В (7)  $\dot{\epsilon}_{ij}^0$  – значения компонент скорости деформаций в центре КЭ (безмоментные составляющие), а  $\dot{\epsilon}_{ij}^k = \partial \dot{\epsilon}_{ij} / \partial \xi_k = \text{const}$  – их градиенты (моментные составляющие). Чтобы не завышать сдвиговую жесткость элемента, в (7) учитываются только компоненты  $\dot{\epsilon}_{ij}^k$ , соответствующие изгибающим и крутящим моментам в теории оболочек типа Тимошенко [8]. Пластические деформации и напряжения определяются из уравнений состояния в квадратурных точках конечного элемента, исходя из линейного распределения полных деформаций. Для улучшения сходимости численного решения деформации обжатия оболочки по толщине в элементе корректируются из условия  $\sigma_{33,3} = 0$  [8]. Для выполнения интегрирования в уравнении баланса виртуальных мощностей (3) применяются квадратурные формулы [4]. Суммированием интегралов по конечным элементам расчетной области  $\Omega$  получается дискретный аналог уравнений движения:

$$[M]\{\ddot{U}\} = \{F\}, \quad (8)$$

где  $[M]$  – диагональная матрица масс;  $\{\ddot{U}\}$  – вектор, составленный из ускорений узлов КЭ-сетки;  $\{F\}$  – результирующие узловых сил в общей системе координат  $X$ , статически эквивалентные напряжениям в КЭ и внешней нагрузке на их гранях. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (8) интегрируется по явной конечно-разностной схеме типа «крест». Шаг интегрирования во времени  $\Delta t^{k+1}$  определяется из условия устойчивости.

Численное определение контактного давления в зонах взаимодействия деформируемых тел и статически эквивалентных ему сил в узлах КЭ-сетки осуществля-

ется из условий непроникания и законов сохранения массы и количества движения [9].

**Результаты решения.** Изложенная методика реализована в рамках вычислительной системы «Динамика-3» [10]. Для ее верификации был проведен ряд тестовых и исследовательских расчетов.

Рассмотрена задача упругопластического деформирования, потери устойчивости и закритического поведения жестко заземленной по контуру полусферической оболочки ( $R = 1,443$  см,  $h = 0,1$  см) при равномерном сжатии внешним давлением [11]. Оболочка выполнена из дюралевого сплава АД1. Скорость нарастания внешнего давления в формуле (4) выбиралась из условия квазистатического нагружения, уменьшающего динамические эффекты. Устойчивость оболочки оценивалась по графику изменения во времени прогиба в ее полюсе и по форме ее конечно-элементной сетки.

При использовании 8-узлового конечного элемента для решения задач устойчивости осесимметричных оболочек возникает особенность на оси вращения: конечный элемент вырождается в призму с треугольным основанием. Чтобы преодолеть вырождение сетки, оболочку обычно предварительно разбивают на фрагменты, получаемые взаимно-однозначным отображением на куб (рис. 1).

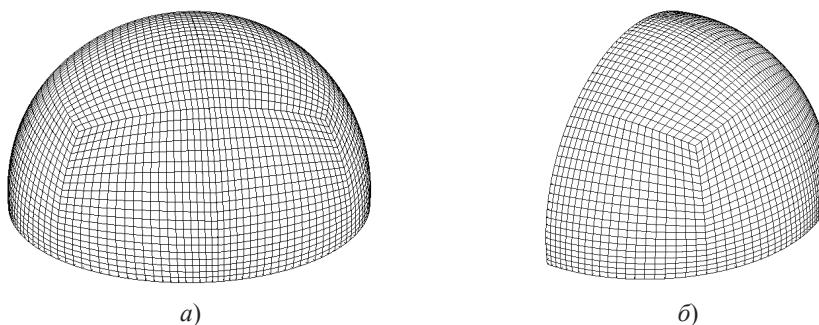


Рис. 1

Конечно-элементные сетки этих подобластей в дальнейшем объединяются в процессе решения задачи. Как видно из рис. 1, сетка расчетной области получается неосесимметричной, что приводит к сеточной анизотропии. При решении линейных задач погрешность, вносимая сеточной анизотропией, может быть незначительной. Однако при исследовании потери устойчивости и закритического поведения оболочек вращения такой подход создает нефизичное несовершенство, которое существенно искажает форму потери устойчивости. Так, на рис. 2 показано формоизменение сферической оболочки, полученное из численного решения задачи на сетке, исходное состояние которой представлено на рис. 1. Согласно экспериментальным данным [11], рассматриваемая полусферическая оболочка после потери устойчивости деформируется осесимметрично. Из рис. 2 видно, что предварительное разбиение расчетной области на блоки значительно искажает решение задачи.

В последующих расчетах в полюсе полусферической оболочки (рис. 3а) выделялась подобласть, конечно-элементная сетка которой показана на рис. 3б.

Формоизменение оболочки, полученное из решения задачи на этой сетке, приведено на рис. 4. Достоверность этих результатов подтверждается данными решения задачи в осесимметричной постановке [11]. По расчетным данным потеря устойчи-

ности в рассматриваемом варианте задачи происходит при достижении интенсивностью напряжений предела текучести и составляет 7,6 МПа, что с точностью до 5% совпадает с расчетными данными [11]. Учет пластических деформаций приводит к существенному снижению критической нагрузки.

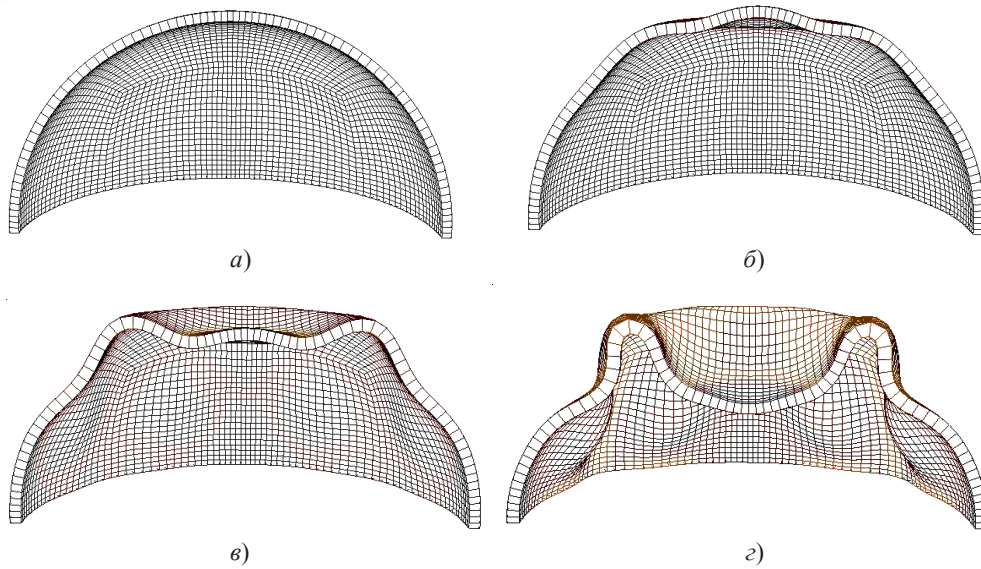


Рис. 2

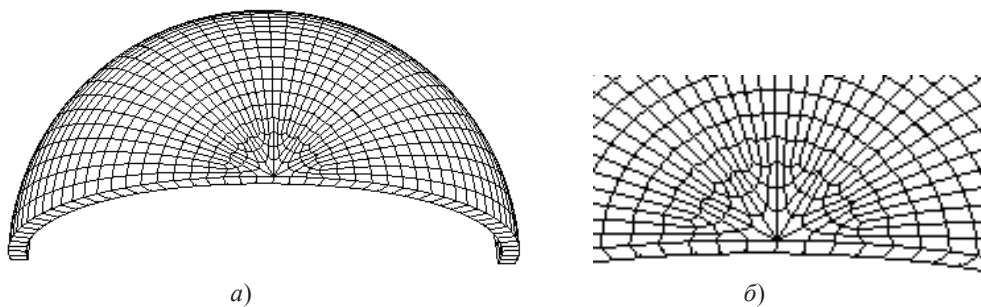


Рис. 3

Точность численного моделирования закритического поведения сферической оболочки существенно зависит от описания зависимости внешнего давления после потери устойчивости. Так, если в формуле (4) не учитывать снижения давления на закритической стадии, картина деформирования получается иной (рис. 5).

Решена задача локальной устойчивости сферического сегмента 1 (рис. 6) постоянной толщины для  $R/h = 400$ , усиленного опорным кольцом 2 [12]. Нижняя часть опорного кольца взаимодействует с круговым ложементом 3, угол обхвата которого  $\gamma$  менялся в расчетах от 3 до  $120^\circ$ . В верхней части к подкрепляющему кольцу была приложена сжимающая нагрузка, линейно возрастающая по времени до потери устойчивости оболочки. Оболочка и опорное кольцо выполнены из алюминиевого сплава АМГ-6М.

Согласно результатам расчетов, критическая нагрузка уменьшается с увеличением угла  $\theta$ . Угол обхвата ложемента  $\gamma$  существенно влияет на форму волнообразо-

вания (рис. 7): при малых  $\gamma$  образуется одна вмятина, а при больших – две вмятины в зонах, близких к краям площадки контакта.

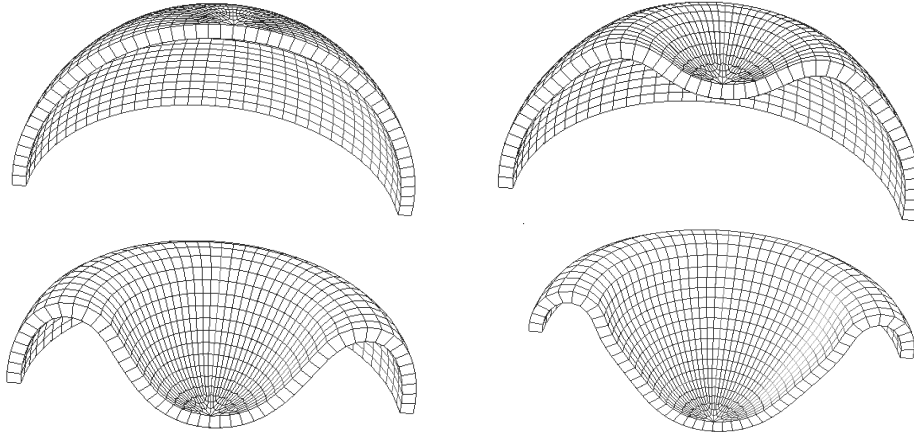


Рис. 4

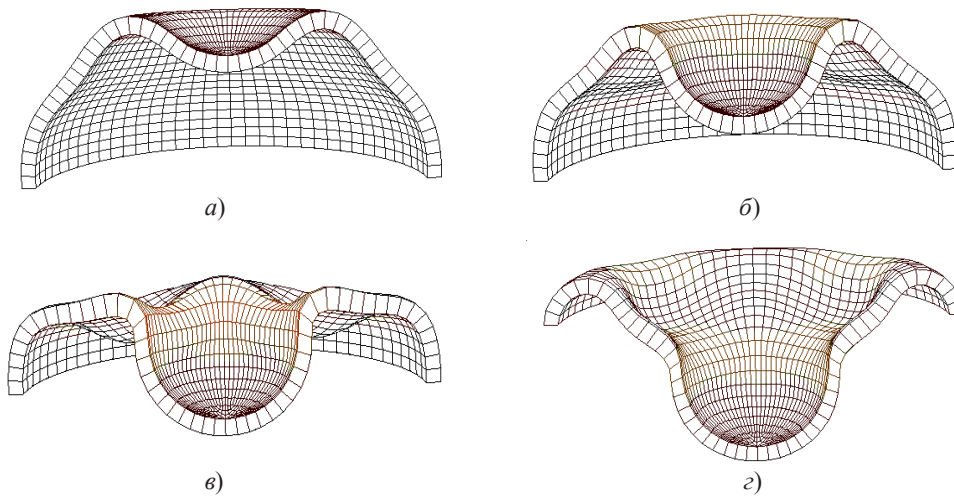


Рис. 5

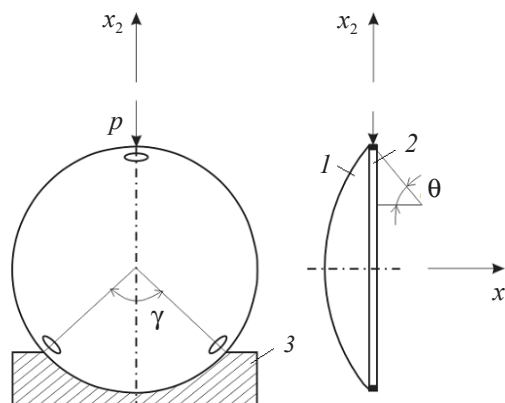


Рис. 6

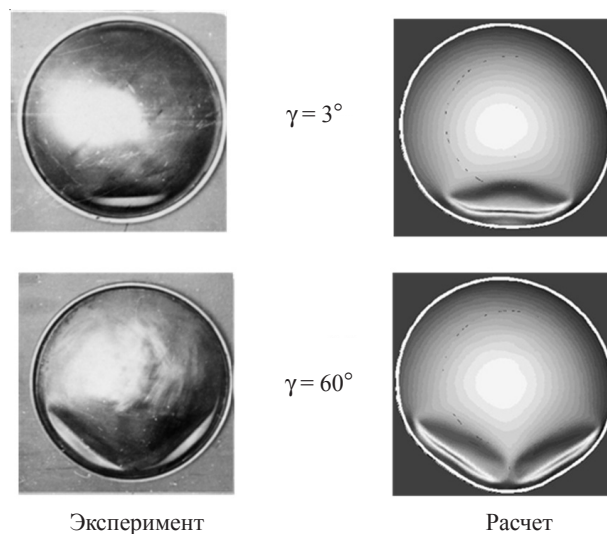


Рис. 7

Достоверность остаточной формы оболочки подтверждают экспериментальные данные, приведенные на рис. 7, а также результаты ряда работ по контактным задачам для оболочек, нагруженных круговыми штампами, согласно которым вблизи краев штампов контактные усилия возрастают [2].

#### Список литературы

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
2. Гудрамович В.С. Устойчивость упругопластических оболочек. Киев: Наукова думка, 1987. 216 с.
3. Баженов В.Г., Кибец А.И. Численное моделирование трехмерных задач нестационарного деформирования упругопластических конструкций методом конечного элемента // Изв. РАН. МТТ. 1994. №1. С. 52–59.
4. Bathe K.-Y. Finite element procedures. New Jersey: Upper Saddle River «Prentice Hall», 1996. 1037 p.
5. Верификация конечно-элементного решения трехмерных нестационарных задач упругопластического деформирования, устойчивости и закритического поведения оболочек / А.А. Артемьева, В.Г. Баженов, А.И. Кибец и др. // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3, №2. С. 5–14.
6. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
7. Ганеева М.С., Ильгамов М.А., Моисеева В.Е. Устойчивость сферического сегмента, нагруженного давлением сжимаемой жидкости // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2009. Вып. 71. С. 71–76.
8. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А.С. Сахарова, И. Альтенбаха. Киев: Вища школа; Лейпциг: ФЭБ Фахбухферлаг, 1982. 480 с.
9. Баженов В.Г., Кибец А.И., Цветкова И.Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. №2. С. 20–26.
10. Программный продукт «Пакет прикладных программ для решения трехмерных задач нестационарного деформирования конструкций, включающих массивные тела и оболочки, «Динамика-3» (ППП «Динамика-3»): Сертификат соответствия Госстандарта России № РОСС RU.ME20.H00338/2000.

11. Якушев В.Л. Потеря устойчивости полусферических оболочек при пластических деформациях // Труды XVIII Международ. конф. по теории оболочек и пластин. 29 сент. – 4 окт. 1997 г. Т. 2. Саратов, 1997. С. 136–141.

12. Гудрамович В.С., Дисковский И.А. О локальной устойчивости сферических оболочек // ДАН СССР. 1977. Т. 232, №6. С. 1285–1288.

#### **FINITE-ELEMENT MODELING OF ELASTOPLASTIC BUCKLING OF NON-CLOSED SPHERICAL SHELLS LOADED IN COMPRESSION**

**V.G. Bazhenov, A.A. Artem'eva, E.G. Gonik, A.I. Kibets, D.V. Shoshin, T.G. Fedorova**

The results of numerically modeling elastoplastic deformation, loss-of-stability and super-critical behavior of spherical shells are presented. The problem is analyzed using FEM and the «cross-type» explicit time-integration scheme. The problems of loading the segments of spherical shells by uniform external pressure and compression between circular dyes are considered. The mesh anisotropy of the FE-discretization of spherical meshes is shown to considerably affect its buckling form. The reliability of the results is corroborated by experimental data.

*Keywords:* spherical shell, plastic deformations, critical loading, super-critical behavior, FEM, experiment.