

УДК 539.3

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ
ПОЛОСТИ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ
НЕСЖИМАЕМОСТИ ЗА ФРОНТОМ УДАРНОЙ ВОЛНЫ^{*)}**

© 2012 г. Е.Ю. Линник¹, В.Л. Котов¹, А.А. Тарасова¹, Е.Г. Гоник²

¹НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

²Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары

foxlen13@rambler.ru

Поступила в редакцию 04.09.2012

Получено аналитическое решение задачи о расширении сферической полости из точки в безграничной грунтовой среде в предположении несжимаемости грунта за фронтом ударной волны. Сравнением с результатами численных расчетов в полной постановке показана близость указанных решений при сверхзвуковых скоростях расширения полости с учетом внутреннего трения.

Ключевые слова: расширение сферической полости, грунтовая среда, ударная адиабата, модель локального взаимодействия.

Исследование движения тел в мягких грунтовых средах представляет собой сложную задачу, что во многом обусловлено многообразием свойств природных грунтов. Нестабильность динамических свойств грунтовых сред приводит к распространению приближенных методов на основе упрощенных представлений о характере взаимодействия. В частности, в задачах проникания применяется гипотеза локального взаимодействия, в соответствии с которой давление в каждой точке боковой поверхности ударника отождествляется с давлением на внутренней поверхности расширяющейся полости. Решению задач о расширении сферической или цилиндрической полостей посвящены работы [1–8]. Аналитические решения данной задачи были получены с применением гипотезы несжимаемости среды: для идеально пластических сред в [9–11], для упругопластической среды при $\tau_0 = \text{const}$, $\theta^* = 0$ в работе [11] (рис. 1а), с использованием условия пластичности Мизеса–Шлейхера в [12–14] (рис. 1б).

В более общей постановке свойства среды характеризуются функциональными зависимостями давления от объемной деформации и предела текучести от давления. Решение задач с учетом сжимаемости среды возможно лишь численными методами, в том числе с использованием автомодельной подстановки, приводящей

^{*)}Работа выполнена при поддержке Министерством образования и науки РФ (соглашения 14.В37.21.1137, 14.В37.21.1902 и 14.В37.21.2019), Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и РФФИ (гранты 10-08-00376-а, 12-08-33106-мол_a_вед).

систему уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Были получены решения для идеально пластических сред (рис. 1а) [15], с использованием условия пластичности Мизеса–Шлейхера (рис. 1б) [16, 17] и с использованием соотношения на ударной адиабате при $\tau_0 = \tau_m = \text{const}$, $\mu = 0$ (рис. 1д) [18]. В настоящей статье приводится обобщение решения [18] для грунтовой среды Григоряна с учетом нелинейной сжимаемости и внутреннего трения.

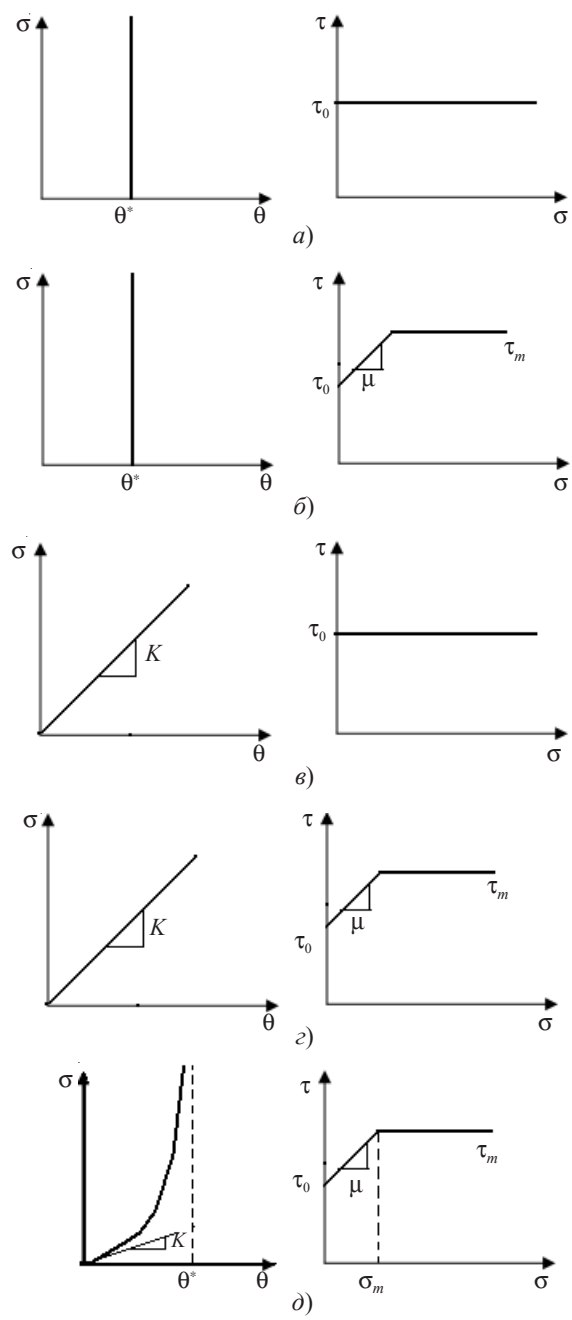


Рис. 1

Отметим, что такая постановка достаточно часто используется при решении задач проникания и соответствует реальным грунтовым средам.

1. Рассмотрим одномерную задачу о расширении сферической полости из точки в безграничной среде [8, 9, 11, 19], считая, что граница полости и поверхность раздела пластической и упругой зон перемещаются со скоростями V_0 и c соответственно (рис. 2).

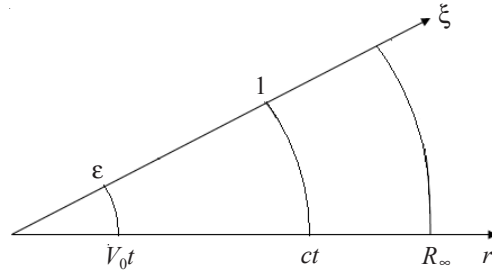


Рис. 2

Движение грунтовой среды в области пластического течения описывается уравнениями неразрывности и изменения количества движения в эйлеровых переменных (сферическая симметрия):

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r} \right) &= - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2 \frac{\sigma - \sigma_\theta}{r} &= - \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right), \\ \sigma &= f_1(\theta), \quad \theta = 1 - \rho_0 / \rho, \\ \sigma - \sigma_\theta &= f_2(\sigma), \end{aligned} \quad (1)$$

где σ и σ_θ – радиальная и окружная компоненты тензора напряжений Коши (радиальная компонента принимается положительной при сжатии), θ – объемная деформация, ρ_0 и ρ – начальная и текущая плотности среды, v – скорость. Функции f_1 и f_2 определяют сжимаемость и условие пластичности выбранной модели среды.

На границе расширяющейся полости с радиусом R_0 задается скорость V_0 , внешняя поверхность сферического слоя R_∞ свободна от напряжений:

$$v|_{r=R_0} = V_0, \quad \sigma|_{r=R_\infty} = 0, \quad R_0|_{t=0} = 0.$$

Следуя [15, 18], введем безразмерные переменные:

$$U = \frac{v}{c}, \quad \xi = \frac{r}{ct}. \quad (2)$$

В новых переменных частные производные по времени и пространству определяются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = - \frac{\xi}{t} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (3)$$

Подстановка безразмерных переменных (2) в систему уравнений (1) с учетом (3) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных U и θ :

$$\begin{aligned}
U' + 2 \frac{U}{\xi} &= \frac{\xi - U}{1 - \theta} \theta', \\
\frac{\partial f_1 / \partial \theta}{\rho_0 c^2} \theta' + 2 \frac{f_2(\theta)}{\rho_0 c^2 \xi} &= \frac{\xi - U}{1 - \theta} U',
\end{aligned} \tag{4}$$

штрихом обозначено дифференцирование по ξ .

Условия при $\xi = 1$ следуют из соотношений Гюгонио на ударной волне

$$U|_{\xi=1} = \theta|_{\xi=1} = b, \tag{5}$$

где b определяется решением уравнения $f_1(b) = \rho_0 c^2 b$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (4) в нормальном виде записывается так:

$$U' = \frac{2f_2(\theta)F + 2UK}{\xi(F^2\rho_0c^2 - K)}, \quad \theta' = \frac{2f_2(\theta) + 2UF\rho_0c^2}{\xi(F^2\rho_0c^2 - K)}, \tag{6}$$

где

$$F = \frac{\xi - U}{1 - \theta}, \quad K = \frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta}.$$

Краевая задача для нелинейной системы (5), (6) при изменении ξ от 1 до ε_0 , то есть от границы пластической волны до границы полости (см. рис. 2), решалась методом стрельбы с применением метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности [18, 19], в котором неизвестная скорость c определялась итерационно до выполнения условия

$$U|_{\xi=\varepsilon_0} = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{V_0}{c} \tag{7}$$

с заданной точностью $|U - \varepsilon_0| \leq 0,001$.

2. При высоких скоростях расширения полости и высоких давлениях изменение θ мало. Рассматривается приближение к системе (4) в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны $\partial\theta/\partial\xi = 0$, записанное относительно безразмерных скорости U и напряжения $S = \sigma/(\rho c^2)$:

$$U' + 2 \frac{U}{\xi} = 0, \quad S' + 2 \frac{\tilde{f}_2}{\xi} = (\xi - U)U', \tag{8}$$

где $\tilde{f}_2 = f_2/(\rho c^2)$ – условие пластичности, $\rho = \rho_0/(1 - \theta)$ – плотность на ударной волне.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (8) разделяется на два независимых уравнения. Решение первого уравнения с учетом граничного условия (7) записывается в виде:

$$U = \frac{\varepsilon_0^3}{\xi^2}. \tag{9}$$

Подставляя решение (9) во второе уравнение системы (8) и условия Гюгонио на пластической ударной волне, получим задачу Коши для определения безразмерного напряжения:

$$\begin{aligned}
S' &= 2 \frac{\varepsilon_0^6}{\xi^5} - 2 \frac{\varepsilon_0^3}{\xi^2} - 2 \frac{\tilde{f}_2(\theta)}{\xi}, \\
S|_{\xi=1} &= U - U^2 = \frac{\varepsilon_0^3}{\xi^2} - \frac{\varepsilon_0^6}{\xi^4}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Для решения задачи Коши (10) необходимо конкретизировать безразмерную функцию $\tilde{f}_2(\theta)$. Условие пластичности грунтовой среды Григоряна примем в виде:

$$f_2(\theta) = \begin{cases} \tau_0 + \mu\sigma, & 0 < \sigma \leq \sigma_m, \\ \tau_m, & \sigma > \sigma_m, \end{cases} \tag{11}$$

где μ – коэффициент внутреннего трения, допустимые диапазоны изменения которого были получены в работе [20] и составили $[0; 0,75]$.

Уравнение (10) с учетом (11) интегрируется в явном виде:

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{\varepsilon_0^6}{2\xi^4} + 2 \frac{\varepsilon_0^3}{\xi} - 2T_0 \ln \xi - \varepsilon_0^3 - \frac{\varepsilon_0^6}{2}, \quad \mu = 0, \\
S &= -\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_0^6}{\xi^4} - 2T_0 - 2 \frac{\varepsilon_0^3 \ln \xi}{\xi} + \frac{\varepsilon_0^3}{\xi} - \frac{\varepsilon_0^6}{3\xi} + 2 \frac{T_0}{\xi}, \quad \mu = 0,5, \\
S &= -\frac{T_0}{\mu} + \frac{\varepsilon_0^6}{(\mu-2)\xi^4} - 2 \frac{\varepsilon_0^3}{(2\mu-1)\xi} + \left(\frac{T_0}{\mu} - \frac{\varepsilon_0^6}{\mu-2} + 2 \frac{\varepsilon_0^3}{2\mu-1} + \varepsilon_0^3 - \varepsilon_0^6 \right) \xi^{-2\mu},
\end{aligned}$$

где

$$T_0 = \frac{\tau_0}{\rho c^2}.$$

Безразмерное напряжение на границе полости ($\xi = \varepsilon_0$) определяется в зависимости от значений коэффициента внутреннего трения:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{3\varepsilon_0^2}{2} - 2T_0 \ln \varepsilon_0 - \varepsilon_0^3 - \frac{\varepsilon_0^6}{2}, \quad \mu = 0, \\
S &= \frac{\varepsilon_0^2}{3} - 2T_0 - 2\varepsilon_0^2 \ln \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0^5}{3} + 2 \frac{T_0}{\varepsilon_0}, \quad \mu = 0,5, \\
S &= -\frac{T_0}{\mu} + \frac{\varepsilon_0^2}{\mu-2} - 2 \frac{\varepsilon_0^2}{2\mu-1} + \left(\frac{T_0}{\mu} - \frac{\varepsilon_0^6}{\mu-2} + 2 \frac{\varepsilon_0^3}{2\mu-1} + \varepsilon_0^3 - \varepsilon_0^6 \right) \varepsilon_0^{-2\mu},
\end{aligned}$$

где $\mu = 0$ и $\mu = 0,5$ представляют особые случаи.

Общее представление для напряжения имеет вид:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sigma_\tau + \rho U^2 C, \\
\sigma_\tau &= \begin{cases} -2\tau_0 \ln \varepsilon_0, & \mu = 0; \\ 2\tau_0(1 - \varepsilon_0^{-1}), & \mu = 0,5; \\ \tau_0(1 - \varepsilon_0^{-2\mu})/\mu, \end{cases} \\
C &= \begin{cases} \frac{3}{2} - \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0^4}{2}, & \mu = 0; \\ \frac{1}{3} - 2 \ln \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0^3}{3}, & \mu = 0,5; \\ \frac{3}{(\mu-2)(2\mu-1)} + \frac{2\mu+1}{2\mu-1} \varepsilon_0^{1-2\mu} - \frac{\mu-1}{\mu-2} \varepsilon_0^{4-2\mu}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

Формула (12) для напряжения на границе полости при условии пластичности (11) справедлива при значениях напряжений $\sigma < \sigma_m$. При больших значениях напряжений в (12) необходимо положить $\mu = 0$ и $\tau_0 = \tau_m$. Окончательно решение системы замыкается выражением для f_1 , определяющим сжимаемость среды, которое позволяет получить уравнение для определения скорости пластической волны c и связанной с ней величины ε_0 .

Рассмотрим распространенный случай, когда динамическая сжимаемость грунтовой среды характеризуется ударной адиабатой в виде линейного соотношения

$$c = A + \lambda U, \quad (13)$$

связывающего скорость ударной волны c и скорость за фронтом волны U . Здесь A соответствует скорости продольной волны в грунте при отсутствии возмущений, параметр λ характеризует предельную сжимаемость грунта. Из соотношений Гюгонио и (13) следует связь напряжения σ и объемной деформации θ :

$$\sigma = f_1(\theta) \equiv \frac{\rho_0 A^2 \theta}{(1 - \lambda \theta)^2}. \quad (14)$$

Краевое условие (5) записывается в виде:

$$U|_{\xi=1} = \frac{1 - A/c}{\lambda},$$

откуда с учетом (9) получается кубическое уравнение для определения неизвестной величины ε_0 :

$$\varepsilon_0^3 + \frac{\varepsilon_0}{\lambda M} - \frac{1}{\lambda} = 0, \quad (15)$$

где $M = V_0/A$.

Уравнение (15), полученное ранее в работе [18], определяется только сжимаемостью среды и не зависит от выбранной модели пластичности.

Действительное решение (15) по формуле Кардано имеет вид:

$$\varepsilon_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2\lambda} + \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{27\lambda^3 M^3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2\lambda} - \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{27\lambda^3 M^3}}}, \quad (16)$$

где ρ – плотность за фронтом ударной волны, распространяющейся со скоростью c , A и λ – параметры ударной адиабаты (13).

Рассмотрим также линейное приближение к c , которое следует из (15) с применением разложения в ряд Тейлора:

$$c = \lambda^{1/3} V_0 + A/3. \quad (17)$$

3. Приведем результаты решения задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде с учетом внутреннего трения в указанных выше постановках. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5)–(7), полученное в п. 1 с использованием метода Рунге–Кутты, далее считалось точным.

На рис. 3 приведены безразмерные нормальные напряжения на границе полости в зависимости от скорости расширения, отнесенной к параметру ударной адиабаты A . Результаты сравнения точного значения (сплошная линия) с расчетами, по-

лученными с использованием формулы Кардано (16) (штриховая линия) и в линейном приближении (17) (штрихпунктирная линия), продемонстрированы на рис. 3 при различных коэффициентах внутреннего трения ($\mu = 0; 0,5; 0,75$). Отметим, что линейная зависимость (17) скорости ударной волны от скорости расширения полости дает меньшую ошибку при определении нормального напряжения на границе полости, чем решение по формулам (16), что объясняется сложением погрешностей с разным знаком. Отличие от точных решений растет с ростом μ , при этом характер кривых сохраняется, наилучшее соответствие результатов наблюдается при значении коэффициента внутреннего трения, близком к 0.

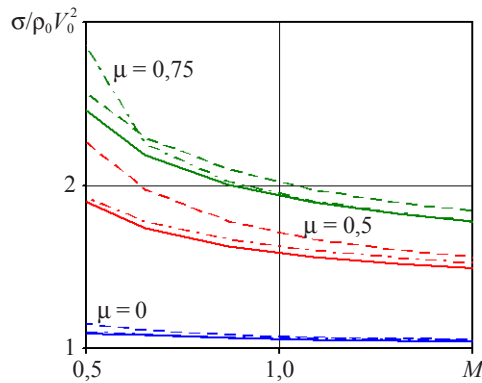


Рис. 3

На рис. 4а изображены относительные погрешности определения скорости пластической ударной волны при различных значениях коэффициента внутреннего трения $\delta_c = (c - c_{1,2})/c \cdot 100\%$, где c – точное решение, c_1 и c_2 определены по формулам (16), (17), и показаны штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно. Относительные погрешности для нормального напряжения на границе полости, приведенные на рис. 4б, определены аналогично. Как и ранее, штриховой линией обозначены результаты, полученные по формуле (16), а штрихпунктирной линией – по формуле (17). Относительные погрешности для приближенных линейных формул существенно меньше, чем с использованием формулы Кардано. Отмечается уменьшение погрешностей с ростом скорости расширения полости.

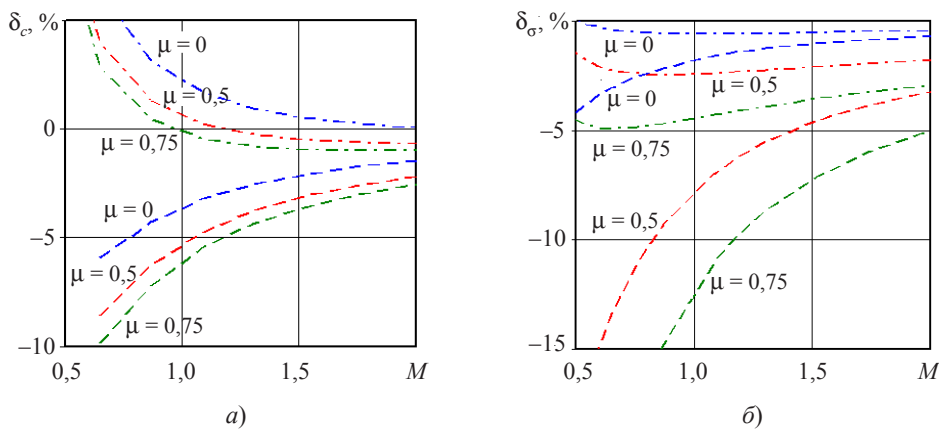


Рис. 4

Таким образом, напряжения на границе сферической полости, расширяющейся из точки с постоянной скоростью в грунтовой среде с известной ударной адиабатой, определяются формулами (12), (17) с погрешностью менее 5% при относительных скоростях расширения полости $V_0/A > 0,5$ и изменении коэффициента внутреннего трения во всем допустимом диапазоне $[0; 0,75]$.

4. Важным с практической точки зрения является вопрос применения полученных решений в рамках модели локального взаимодействия (МЛВ). Аналитическое решение (12) использовалось для определения параметров МЛВ, широко применяемой при исследовании процессов проникания [2, 8, 16, 17]. В соответствии с данной моделью напряжения, действующие на контактную поверхность тела в направлении нормали, аппроксимируются квадратичной зависимостью от нормальной компоненты вектора скорости внедрения:

$$\sigma_n / \rho_0 = \alpha U^2 + \beta U + \gamma. \quad (18)$$

В данной постановке нормальное напряжение представляется в виде суммы инерционной, вязкостной и прочностной составляющих, каждая из которых может иметь преобладающее значение в зависимости от свойств грунтовых сред, геометрии ударника и скорости внедрения. Коэффициенты α , β , γ в соотношении (18) зависят от физико-механических свойств среды.

Рассматривается МЛВ в форме Резаля ($\gamma = 0$) при следующих значениях параметров грунтовой среды: $A = 460$ м/с, $\lambda = 2,3$, $\rho_0 = 1700$ кг/м³. Параметры МЛВ (18) в зависимости от значений коэффициентов внутреннего трения в условии (11) были получены методом наименьших квадратов аппроксимацией численных результатов (верхние значения в таблице 1) и по приближенным формулам (12), (17) (нижние значения в таблице 1) в диапазоне скоростей $U = 200\text{--}800$ м/с. Ошибка определения параметров МЛВ на основе приближенного метода в среднем не превышает 5%.

Таблица 1

μ	0	0,4	0,5	0,6	0,75
α	1,02	1,26	1,33	1,39	1,63
	1,01	1,22	1,28	1,33	1,41
β	1,96	10,49	13,6	17,3	24
	2,07	11,2	14,6	18,5	25,7

Как видно из таблицы, коэффициент α при квадрате скорости практически не изменяется, а β линейно возрастает на порядок (при $\mu = 0$ и $0,75$), что необходимо учитывать при решении задач глубокого проникания в грунтовые среды с выраженным внутренним трением.

Заключение

Получено новое аналитическое решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде с ударной адиабатой и линейной зависимостью предела текучести от давления, которое в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны определяет параметры МЛВ. Показано существенное влияние коэффициента внутреннего трения грунта на параметры квадратичной МЛВ.

Список литературы

1. Рахматуллин Х.А., Сагомонян А.Я., Алексеев Н.А. Вопросы динамики грунтов. М.: Изд-во МГУ, 1964. 239 с.
2. Антуков В.Н. Расширение сферической полости в упругопластической сжимаемой среде. Сообщение 2. Влияние инерционных сил. Температурные эффекты // Проблемы прочности. 1991. №12. С. 11–14.
3. Антуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В. Прикладная теория проникания. М.: Наука, 1992. 105 с.
4. Wu C.S., Budhu M., El-Kholy S. Finite strain elastic closed form solutions for some axisymmetric problems // Acta Mechanica. 1993. Vol. 97. P. 1–22.
5. Колесников В.А. Расширение цилиндрической полости в упругопластической среде при динамическом воздействии // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. №5. С. 118–124.
6. Kartuzov V.V., Galanov V.A., Ivanov S.M. Concept of ultimate fracture-front velocity in cylindrical cavity expansion in a brittle material // Strength of Materials. 2002. Vol. 34, No 3. P. 280–286.
7. Perforation of AA5083-H116 aluminum plates with conical-nose steel projectiles – Calculations / T. Borvik, M.J. Forrestal, O.S. Hopperstad et al. // International Journal of Impact Engineering. 2008. Vol. 36, №3. P. 426–437.
8. Высокоскоростное взаимодействие тел / В.М. Фомин, А.И. Гулидов, А.И. Садырин и др. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 600 с.
9. Forrestal M.J., Norwood F.R., Longcope D.B. Penetration into targets described by locked hydrostats and shear strength // International Journal of Solids and Structures. 1981. Vol. 17. P. 915–924.
10. Forrestal M.J., Lu K.V. Penetration into soil targets // International Journal of Impact Engineering. 1992. Vol. 12, No 3. P. 427–444.
11. Бабаков В.А., Шабунин Е.В. Об одном методе расчета пневмопробойника в деформируемой среде // ФТПРПИ. 1987. №1. С. 105–110.
12. Forrestal M.J. Penetration into dry porous rock // International Journal of Solids and Structures. 1986. Vol. 22, No 12. P. 1485–1500.
13. Warren T.L., Hanchak S.J., Kevin L. Penetration of limestone targets by ogive-nosed VAR 4340 steel projectiles at oblique angles: experiments and simulations // International Journal of Impact Engineering. 2004. Vol. 30. P. 1307–1331.
14. Masri R., Durban D. Deep penetration analysis with dynamic cylindrical cavitation fields // International Journal of Impact Engineering. 2009. Vol. 36. P. 830–841.
15. Forrestal M.J., Longcope D.B. Closed-form solutions for forces on conical-nosed penetrators into geological targets with constant shear strength // Mechanics of Materials. 1982. Vol. 1. P. 285–295.
16. Forrestal M.J., Warren T.L. Penetration equations for ogive-nose rods into aluminum targets // International Journal of Impact Engineering. 2008. Vol. 35. P. 727–730.
17. Баженев В.Г., Котов В.Л. Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе моделей локального взаимодействия // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 3. С. 391–402.
18. Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде / В.Л. Котов, Е.Ю. Линник, А.А. Макарова, А.А. Тарасова // Проблемы прочности и пластичности / Нижегород. ун-т. 2011. Вып. 73. С. 58–63.
19. Forrestal M.J., Tzou D.Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets // International Journal of Solids and Structures. 1997. Vol. 34. P. 4127–4146.
20. Григорян С.С., Черноусько Ф.Л. Одномерные квазистатические движения грунта // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25. С. 86–100.

**THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF THE EXPANSION
OF A SPHERICAL CAVITY IN A SOIL MEDIUM ASSUMING
INCOMPRESSIBILITY BEYOND THE SHOCK FRONT**

E.Yu. Linnik, V.L. Kotov, A.A. Tarasova, E.G. Gonik

An analytical solution is obtained for the expansion of a spherical cavity from a point in an infinite soil medium, assuming incompressibility of the soil beyond the shock front.

The comparison with the numerical results in the full formulation shows the proximity of the present solutions of the expansion of the cavity at supersonic speeds taking into account the internal friction.

Keywords: expansion of a spherical cavity, soil medium, the shock adiabat, the model of local interaction.