

УДК 519.6

АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО В БИКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

М.В. Маркина

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Представлен численный метод решения бикритериальных многоэкстремальных задач с ограничениями, аппроксимирующий множество Парето с заданной точностью. Метод основан на информационно-статистическом подходе к глобальной оптимизации. Его применение продемонстрировано на тестовых примерах и решении бикритериальной задачи оптимального проектирования передней подвески автомобиля.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, множество Парето, информационно-статистический подход, оптимальное проектирование.

Введение

К проектируемым конструкциям часто предъявляются противоречивые требования. Например, проектируемый объект должен иметь минимальную массу, быть технологичным, удовлетворять требованиям прочности и устойчивости, создавать минимальное сопротивление, обеспечивать заданную подъемную силу, простоту и экономичность эксплуатации и т.д. Такая многокритериальная формулировка задачи сильно усложняет ее решение. Большинство существующих методов решения многокритериальных задач позволяют находить одно решение оптимальное по Парето при фиксированных параметрах метода. Новизна предложенного подхода заключается в аппроксимации множества эффективных решений многокритериальной задачи за один проход работы метода.

1. Постановка задачи

Рассмотрим одномерную задачу векторной оптимизации:

$$(f_1(x), f_2(x)) \rightarrow \min_{x \in D}, \quad D = \{x \in [a, b], \quad g_j(x) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq m\}. \quad (1)$$

Функции $f_i(x)$, $1 \leq i \leq 2$, $g_j(x)$, $1 \leq j \leq m$, должны удовлетворять условию Липшица и могут быть многоэкстремальными.

В качестве решения задачи принимается множество эффективных по Парето точек. Допустимая точка x^* является оптимальной по Парето, если среди всех точек, принадлежащих области допустимых решений D , нет ни одной точки x , которая доминировала бы над точкой x^* , т.е. для критериев выполняются неравенства

$$f_i(x^*) \leq f_i(x), \quad i=1,2,$$

причем как минимум одно из неравенств является строгим.

Точки из множества Парето не могут сравниваться по векторному критерию эффективности. Для любых двух Парето-оптимальных точек x^* и x^{**} нельзя улучшить ни одного из частных скалярных критериев, не ухудшая значение хотя бы одного из оставшихся критериев.

Множество Парето является подмножеством множества слабо эффективных точек (множества Слейтера). Допустимая точка x^* является оптимальной по Слейтеру, если не существует решения $\hat{x} \in D$, такого, что

$$f_i(\hat{x}) < f_i(x^*), \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Множество Парето, отображенное в пространство критериев эффективности, называется областью компромиссов.

Выбор единственного решения из множества Парето осуществляется лицом, принимающим решение (ЛПР). С точки зрения ЛПР возможны три подхода к решению многокритериальной задачи. При этом соглашение о компромиссе принимается ЛПР в первом подходе – до решения задачи (например путем задания весовых коэффициентов свертки критериев); во втором подходе – в процессе решения задачи (человеко-машинная процедура принятия решения, например задание уступок в методе последовательных уступок); в третьем подходе – после решения задачи. В этом случае в процессе решения строится большое число точек Парето, как можно более равномерно распределенных в пространстве критериев эффективности. ЛПР выбирает одну из полученных Парето-точек, имея полную информацию.

Далее предлагается алгоритм решения многокритериальных задач, основанный на третьем подходе.

Известно, что задача (1) может быть заменена задачей

$$\min \{f_2(x) : x \in D; f_1(x) \leq q\}, \quad q \in [\min_{x \in D} \{f_1(x)\}; +\infty). \quad (2)$$

В [1–3] приведено доказательство того, что решение задачи (2) при некотором фиксированном q является слабо эффективным решением задачи (1). Для получения множества слабо эффективных решений необходимо решить задачи с различными значениями q , причем для получения какой-либо Парето-точки традиционными методами приходится каждый раз решать новую задачу.

В настоящей работе предлагается решать несколько различных задач вида (2) одновременно, используя информационно-статистический подход к решению задач оптимизации [4–9].

2. Одномерный алгоритм оценки множества эффективных решений бикритериальных многоэкстремальных задач с невыпуклыми ограничениями

В представленном ниже алгоритме одновременно решается сразу несколько задач с разными параметрами q . Множество предельных точек алгоритма аппроксимируют множество Слейтера. Точность аппроксимации задается шагом h , который рекомендуется выбирать из условия $h < (f_1^{\max} - f_1^{\min})$, где f_1^{\max} и f_1^{\min} – соответственно наибольшее и наименьшее значение 1-го критерия. Вариант формирования набора параметров q может быть следующим:

$$q_i = q_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \dots, \quad q_0 = f_1^{\min}. \quad (3)$$

Каждая итерация алгоритма включает определение индекса $1 \leq v(x_i) \leq m+1$ точки x_i ($1 \leq i \leq k$), равного номеру первого нарушенного ограничения. Если $v(x_i) < m+1$, то точке испытания x_i соответствует значение $z_i = g_v(x_i)$. Если $v(x_i) = m+1$, (т.е. все ограничения вида $g_i(x) \leq 0$ выполняются), то в точке испытания x_i вычисляются значения критериев $z_{ji} = f_j(x_i)$, $1 \leq j \leq 2$.

Граничным точкам присваиваются нулевые индексы, значения функций в них не вычисляются. Выбор точки x^{k+1} , $k \geq 2$, любой следующей итерации определяется правилами:

1) точки x^1, \dots, x^k предшествующих итераций перенумеровываются нижними индексами в порядке возрастания координаты, то есть

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_k < x_{k+1} = b; \quad (4)$$

2) определяются множества

$$I_0 = \{0, k+1\}, \quad I_v = \{i : 1 \leq i \leq k, v = v(x_i)\}, \quad (5)$$

содержащие номера всех точек, индекс которых равен v ; множества

$$S_v = \{I_0 \cup \dots \cup I_{v-1}\}, \quad 1 \leq v \leq m+1, \quad (6)$$

содержащие номера всех точек, индексы которых меньше v ; множества

$$T_v = \{I_{v+1} \cup \dots \cup I_{m+1}\}, \quad 1 \leq v \leq m+1, \quad (7)$$

содержащие номера всех точек, индексы которых больше v ;

3) вычисляются максимальные абсолютные значения относительных первых разностей:

если $I_{m+1} = \emptyset$, то

$$\mu'_v = \max \left\{ \frac{|z_i - z_p|}{x_i - x_p}, \quad i, p \in I_v, \quad i > p \right\}, \quad 1 \leq v \leq m; \quad (8)$$

если $I_{m+1} \neq \emptyset$, то вычисляются как μ'_v , так и μ_j , где

$$\mu_j = \max \left\{ \frac{|z_{ji} - z_{jp}|}{x_i - x_p}, \quad i, p \in I_{m+1}, \quad i > p \right\}, \quad 1 \leq j \leq 2, \quad (9)$$

причем в случаях когда мощность $I_v < 2$ или μ'_v (μ_j) ($1 \leq v \leq m+1$) оказываются равными нулю, принимается, что $\mu'_v = 1$ ($\mu_j = 1$);

4) для всех непустых множеств I_v ($1 \leq v \leq m$) определяются величины

$$z_v^* = \begin{cases} 0, & T_v \neq \emptyset; \\ \min\{z_i : i \in I_v\}, & T_v = \emptyset; \end{cases} \quad (10)$$

5) каждой точке x_i ($1 \leq i \leq k$), индекс которой $v(x_i) > m$, сопоставляется вектор $q^i = (q_1^i, q_2^i)$, где

$$q_j^i = E \frac{z_{ji} - z_{j\min}}{h_j} h_j + z_{j\min}, \quad j=1, \quad (11)$$

$$q_2^i = \infty;$$

б) для каждого интервала (x_{i-1}, x_i) ($1 \leq i \leq k+1$) вычисляется характеристика $R(i)$ ($r > 1$ – параметр метода), причем если $\max\{v(x_{i-1}), v(x_i)\} \leq m$, то

$$R(i) = \begin{cases} (x_i - x_{i-1}) + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{(\mu'_v)^2 (x_i - x_{i-1})^2} - \frac{2(z_i + z_{i-1} - 2z_v^*)}{r\mu'_v}, & v(x_{i-1}) = v(x_i), \\ 2(x_i - x_{i-1}) - \frac{4(z_i - z_v^*)}{r\mu'_v}, & v(x_{i-1}) < v(x_i), \\ 2(x_i - x_{i-1}) - \frac{4(z_{i-1} - z_v^*)}{r\mu'_v}, & v(x_i) < v(x_{i-1}), \end{cases} \quad (12)$$

в противном случае

$$R(i) = \begin{cases} \max \left\{ x_i - x_{i-1} + \frac{(z_{ji} - z_{ji-1})^2}{\mu_j^2 (x_i - x_{i-1})} - \frac{2(z_{ji} + z_{ji-1} - 2 \max\{q_j, z'_{j\min}\})}{r\mu_j} \right\}, \\ \quad 1 \leq j \leq 2, \quad v(x_{i-1}) = v(x_i); \\ \max \left\{ 2(x_i - x_{i-1}) - \frac{4(z_{ji} - \max\{q_j, z'_{j\min}\})}{r\mu_j} \right\}, \\ \quad 1 \leq j \leq 2, \quad v(x_{i-1}) < v(x_i), \\ \max \left\{ 2(x_i - x_{i-1}) - \frac{4(z_{ji-1} - \max\{q_j, z'_{j\min}\})}{r\mu_j} \right\}, \\ \quad 1 \leq j \leq 2, \quad v(x_i) < v(x_{i-1}), \end{cases} \quad (13)$$

где

$$q_j = \min\{q_j^i, q_j^{i-1}\};$$

$$z'_{j\min} = \begin{cases} \min\{z_{1i} : 1 \leq i \leq k\}, & j=1; \\ \min\{z_{2i} : z_{1i} \leq q_1 + h, 1 \leq i \leq k\}, & j=2; \end{cases} \quad (14)$$

7) определяется интервал (x_{i-1}, x_i) , имеющий максимальную характеристику, то есть

$$R(t) = \max\{R(i) : 1 \leq i \leq k+1\}; \quad (15)$$

8) осуществляется очередная итерация в точке

$$x^{k+1} = \begin{cases} \frac{x_t + x_{t-1}}{2}, & v(x_{t-1}) \neq v(x_t); \\ \frac{x_t + x_{t-1}}{2} - \frac{z_t - z_{t-1}}{2r'_v \mu'_v}, & v(x_{t-1}) = v(x_t) < m + 1; \\ \frac{x_t + x_{t-1}}{2} - \frac{z_{jt} - z_{jt-1}}{2r_j \mu_j}, & (v(x_{t-1}) = v(x_t) = m + 1) \text{ и } (R(t) = R_j(t)), \end{cases} \quad (16)$$

где $R_j(t)$ – характеристика, рассчитанная с использованием значения j -го критерия.

Алгоритм можно дополнить условием остановки (по заданной точности $\varepsilon > 0$), прекращающим итерации при выполнении неравенства

$$x_t - x_{t-1} \leq \varepsilon. \quad (17)$$

3. Достаточные условия сходимости алгоритма

Пусть

1) множество $S(q)$ есть множество решений задачи (2) при некотором наборе параметров q ;

2) функции $g_i(x)$, $x \in [a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, m$, допускают липшицевы с соответствующими константами K_i^g продолжения $G_i(x)$, $x \in [a_i, b_i]$, т.е. $g_i(x) = G_i(x)$, $x \in [a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq m$;

3) функции $f_1(x), f_2(x)$, определенные в непустой допустимой области D , также допускают липшицевы с соответствующими константами K_1, K_2 продолжения $F_j(x)$, $x \in [a, b]$;

4) начиная с некоторого шага, для величин μ'_v, μ_j из (8), (9), параметра r алгоритма и констант Липшица K_i^g, K_1, K_2 справедливо

$$r\mu'_v > 2K_i^g, \quad 1 \leq i \leq m; \quad r\mu_j > 2K_j, \quad 1 \leq j \leq 2. \quad (18)$$

Тогда множество предельных точек последовательности $\{x^k\}$, порождаемой описанным алгоритмом при точности $\varepsilon = 0$ в условии остановки (17), содержит в себе множество S_q [10].

4. Тестовый пример работы одномерного алгоритма

Программная реализация метода выполнена на языке C++ в среде Visual Studio. С помощью созданной программы была решена задача $(f_1(x), f_2(x)) \rightarrow \min$, где

$$f_1(x) = -(20x + 12 \sin(16x)), \quad f_2(x) = 20x + 12 \sin(6\pi(x + 0,1)).$$

Шаг аппроксимации $h = 8$; точность в условии остановки $\varepsilon = 0,0001$.

На рис. 1 представлены графики функций, точки испытаний и отобранные из них эффективные по Парето точки. Общее число испытаний – 92. Число отобранных из них эффективных точек – 31.

На рис. 2 представлено распределение паретовских точек в области критериев.

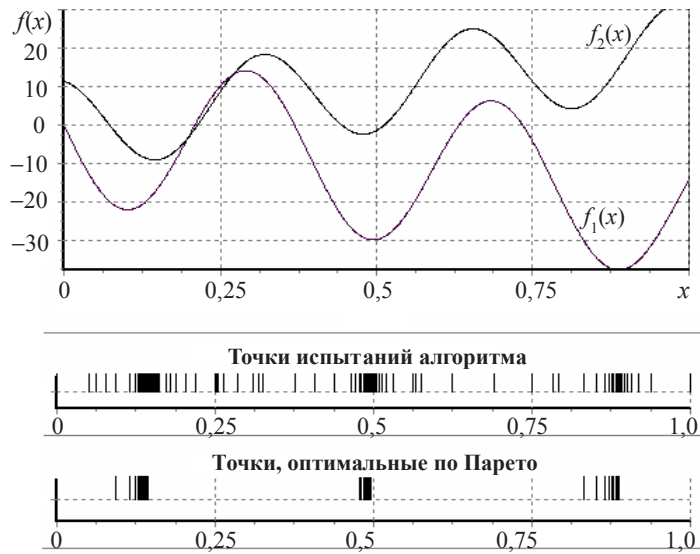


Рис. 1

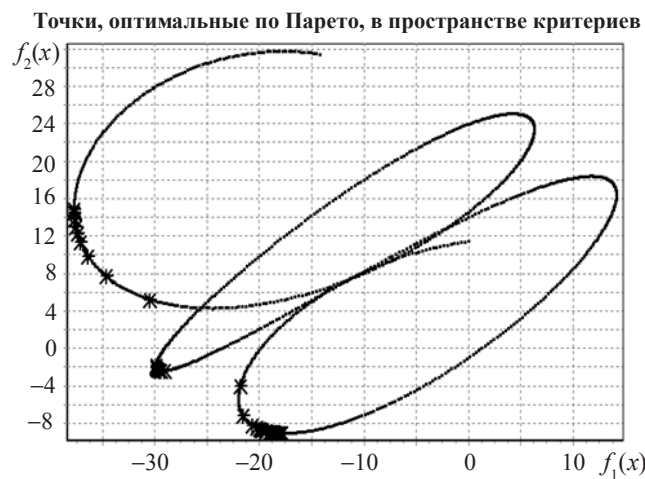


Рис. 2

5. Редукция размерности пространства

Возможный подход к численному анализу многомерных задач вида (2) состоит в сведении их к эквивалентным задачам с помощью однозначных непрерывных отображений отрезка $[0, 1]$ вещественной оси на n -мерный гиперинтервал D . Подробное исследование свойств таких отображений и алгоритмов их построения содержится в [4].

Указанная схема редукции сопоставляет многомерной липшицевой с константой L функции $f(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in D$, одномерную функцию $F(x) = f(y(x))$, $x \in [0, 1]$, удовлетворяющую равномерному условию Гельдера

$$|F(x^1) - F(x^2)| \leq K(|x^1 - x^2|)^{1/n}, \quad x^1, x^2 \in [0, 1], \quad (19)$$

с коэффициентом $K \leq 4Ln^{1/2}$.

6. Тестовый пример работы многомерного алгоритма

Была решена задача $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \rightarrow \min$, где

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{4} - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2^2}{2},$$

$$f_2(x_1, x_2) = \left(x_2 - \frac{5,1}{4\pi}x_1 - 6\right)^2 + 10\left(1 - \frac{1}{8\pi}\right)\cos(x_1) + 20,$$

$$-2,5 \leq x_i \leq 2,5, \quad i = 1, 2.$$

Шаг аппроксимации $h = 1$. На рис. 3,а представлены точки испытаний в пространстве критериев. Общее число испытаний – 300. Число отобранных из них эффективных точек – 32. На рис. 3,б представлено множество возможных значений критериев (множество векторных оценок).

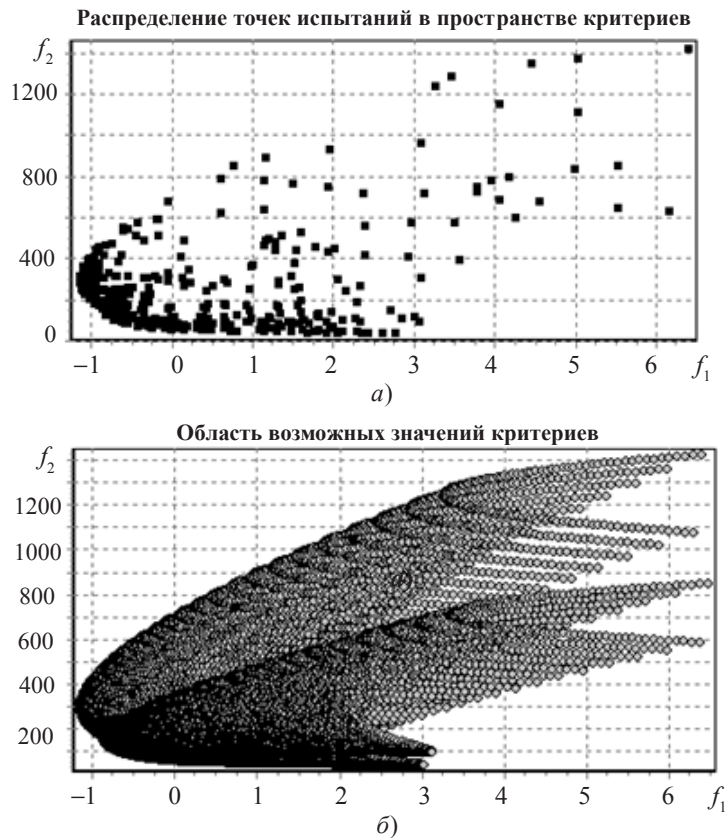


Рис. 3

7. Решение бикритериальной задачи оптимизации передней подвески автомобиля с ограничениями на максимальные динамические прогибы рессоры, нормальные и касательные напряжения

Рассмотрим математическую модель передней подвески автомобиля и результаты двухкритериальной задачи ее оптимизации. Расчетная схема подвески пред-

ставлена на рис. 4: C_a – жесткость амортизатора (телескопического), f – стрела прогиба рессоры, l – длина рессоры (соединена с рамой через шарниры), Δ – неизменяющаяся величина резинового буфера, $P_1 = P_1(t)$ – заданная нагрузка.

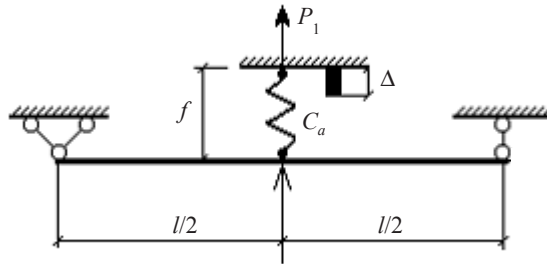


Рис. 4

При постановке задачи оптимизации необходимо выбрать управляемые параметры, критерии эффективности, функциональные ограничения, область поиска, алгоритм оптимизации.

Управляемые параметры. В качестве модели рессоры выберем стальную балку постоянного поперечного сечения, а в качестве управляемых параметров рассмотрим ширину $x_1 = b$ и высоту $x_2 = h$ балки.

Критерии эффективности. В качестве первого критерия примем функцию массы материала рессоры как балки постоянного поперечного сечения, то есть

$$f_1(x_1, x_2) = \rho \cdot l \cdot x_1 \cdot x_2, \quad (20)$$

где ρ – удельная объемная плотность материала рессоры. При оптимизации рессоры функцию f_1 следует минимизировать.

В качестве второго критерия примем функцию минимального значения частоты собственных колебаний балки-рессоры, то есть

$$f_2'(x_1, x_2) = \min\{w_k(x_1, x_2)\}, \quad (21)$$

где $w_k(x_1, x_2)$ – функция собственной частоты k -й формы колебаний рессоры.

Уравнение колебаний имеет вид

$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} + \omega^2 w(t) = 0, \quad (22)$$

где $w(t)$ – функция прогибов, ω – частота колебаний:

$$\omega = 2\pi/T, \quad (23)$$

T – период гармонических колебаний.

Согласно теории колебаний минимальная частота собственных колебаний будет равна:

$$f_2'(x_1, x_2) = \omega(x_1, x_2), \quad (24)$$

где

$$\omega(x_1, x_2) = \sqrt{1/(M\delta(x_1, x_2))}, \quad (25)$$

где M – эквивалентная масса, приходящаяся на рессору:

$$M = \frac{P_1}{g}, \quad (26)$$

$P_1 = \max_t P_1(t)$, g – ускорение свободного падения, $\delta(x_1, x_2)$ – податливость рессоры (определяется прогибом балки-рессоры от действия силы $P_1 = 1$). Для двухопорной балки с постоянным поперечным сечением имеем [8, 9]:

$$\delta(x_1, x_2) = \frac{l^3}{48EJ_x(x_1, x_2)}, \quad (27)$$

где E – модуль упругости материала, $J_x = x_1 x_2^3 / 12$ – момент инерции сечения. Функция f_2' примет вид:

$$f_2'(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{4Eg x_1 x_2^3}{P_1 l^3}}. \quad (28)$$

Из физических соображений при проектировании необходимо f_2' максимизировать. Поэтому при использовании алгоритма минимизации функций в качестве второго критерия примем

$$f_2(x_1, x_2) = -f_2'(x_1, x_2). \quad (29)$$

Функциональные ограничения. В качестве ограничений рассмотрим ограничения на максимальные динамические прогибы рессоры, нормальные и касательные напряжения с учетом кривой усталости.

Запишем ограничения на максимальные динамические прогибы в размерной форме:

$$\max w(x_1, x_2) \leq f - \Delta \quad (30)$$

и в безразмерной (канонической, стандартной) форме:

$$g_1(x_1, x_2) \leq 0,$$

где

$$g_1(x_1, x_2) = \left[\frac{\max w(x_1, x_2)}{f - \Delta} \right] - 1. \quad (31)$$

Дифференциальное уравнение изгиба упругой балки постоянного сечения имеет вид:

$$\frac{d^4 w(z)}{dz^4} = 0. \quad (32)$$

Общий интеграл (32) записывается в форме

$$w(z) = w_0 + \theta_0 z + \frac{M_0}{2EJ_x} z^2 + \frac{Q_0}{6EJ_x} z^3. \quad (33)$$

где w_0 – прогиб в начале координат; θ_0 – поворот сечения в начале координат:

$\theta_0 = 0$; M_0 – внутренний изгибающий момент в начале координат: $M_0 = P_1 l / 4$; Q_0 – перерезывающая сила в начале координат: $Q_0 = P_1 / 2$.

С учетом заданной нагрузки P_1 и жесткости C_a имеем

$$w_0 = \frac{P_1 l^3}{48EJ_x + C_a l^3}. \quad (34)$$

Учитывая эту зависимость и пренебрегая значением C_a , максимальное динамическое перемещение в размерной форме примем в виде

$$\frac{P_1 l^3}{4E x_1 x_2^3} \leq f - \Delta, \quad (35)$$

а функцию первого ограничения представим в форме

$$g_1(x_1, x_2) = \left[\frac{P_1 l^3}{4E(f - \Delta)x_1 x_2^3} \right] - 1. \quad (36)$$

Ограничение на максимальное нормальное динамическое напряжение с учетом работы рессоры на периодическую нагрузку $P_1(t)$ необходимо сформировать с учетом характера распределения нормальных напряжений σ и кривой усталости. Предельное напряжение (предел усталости) при симметричном цикле нагружения согласно [10, 11] задается соотношениями

$$[\sigma] = \sigma_{-1}, \quad \sigma_{-1} = \frac{\sigma_T}{n}, \quad (37)$$

σ_T – предел текучести, n – коэффициент запаса.

Максимальные нормальные напряжения определяются согласно формуле

$$\max \sigma(x_1, x_2) = \frac{\max M}{w_x(x_1, x_2)}, \quad (38)$$

где w_x – момент сопротивления:

$$w_x = \frac{x_1 x_2^2}{6}, \quad (39)$$

$$\max M = \frac{P_1 l}{4}. \quad (40)$$

Ограничение на нормальные динамические напряжения в размерной форме:

$$\max \sigma(x_1, x_2) \leq [\sigma], \quad (41)$$

$$\frac{1,5 P_1 l}{x_1 x_2^2} \leq \sigma_{-1}. \quad (42)$$

Каноническая форма ограничения имеет вид

$$g_2(x_1, x_2) \leq 0,$$

где $g_2(x_1, x_2) = [1,5 P_1 l / (\sigma_{-1} x_1 x_2^2)] - 1$.

Ограничение на максимальное касательное динамическое напряжение примет вид

$$\max \tau(x_1, x_2) \leq [\tau]. \quad (43)$$

Из сопротивления материалов известно, что

$$\max \tau = \frac{3Q_0}{2F}, \quad (44)$$

где F – площадь поперечного сечения:

$$F = x_1 x_2, \quad (45)$$

$$[\tau] = 0,577[\sigma]. \quad (46)$$

Тогда ограничение (43) примет вид

$$\frac{0,75P_1}{x_1 x_2} \leq 0,577\sigma_{-1}, \quad (47)$$

или в канонической форме

$$g_3(x_1, x_2) \leq 0, \quad (48)$$

где $g_3(x_1, x_2) = [1,2998P_1 / (\sigma_{-1}x_1x_2)] - 1$.

Область поиска определяется конструктивными ограничениями:

$$\Pi = \{\mathbf{x} : x_i^- \leq x_i \leq x_i^+, 1 \leq i \leq n\}. \quad (49)$$

Согласно теории изгибаемых балок размер поперечного сечения не должен превышать $1/(5l)$. Следовательно, справедливо принять

$$x_1^+ = \frac{1}{5l}, \quad x_2^+ = \frac{1}{5l}. \quad (50)$$

Исходные данные: $l = 1,75$ м; $f = 0,109$ м; $\Delta = 0,01$ м; $P_1 = 15500$ Н; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $\sigma_T = 2,8 \cdot 10^8$ Па, $n = 2$; $[\sigma] = \sigma_{-1} = 1,4 \cdot 10^8$ Па.

Численные результаты. Общее число испытаний – 350. Получены 55 эффективных по Парето точек при шаге аппроксимации $h = 50$. На рис. 5 эти точки представлены в пространстве критериев ($f_1(x_1, x_2) \rightarrow \min$, $f_2(x_1, x_2) \rightarrow \max$).



Рис. 5

Возможные допустимые точки (активным является ограничение $g_2(x_1, x_2) \leq 0$) представлены на рис. 6.



Рис. 6

Литература

1. Подиновский, В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
2. Стронгин, Р.Г. Сведение многоэкстремальных многокритериальных задач с ограничениями к безусловным задачам оптимизации (теория и алгоритмы) / Р.Г. Стронгин, Д.Л. Маркин, М.В. Маркина // Математическое моделирование. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – С. 110–117.
3. Strongin, R.G. Reduction of multi-extremum multi-criterion problems with constraints to unconstrained optimization problems: theory and algorithms / R.G. Strongin, D.L. Markin, M.V. Markina // Computational and Mathematical Modeling. – 1995. – Vol. 6, No 4. – P. 242–248.
4. Стронгин, Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах / Р.Г. Стронгин. – М.: Наука, 1978. – 239 с.
5. Стронгин, Р.Г. Поиск глобального оптимума / Р.Г. Стронгин. – М.: Знание, 1990. – 40 с.
6. Стронгин, Р.Г. Минимизация многоэкстремальных функций при невыпуклых ограничениях / Р.Г. Стронгин, Д.Л. Маркин // Кибернетика. – 1986. – №4. – С. 63–69.
7. Strongin, R.G. Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms / R.G. Strongin, Ya.D. Sergeev. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 728 p.
8. Маркина, М.В. Решение бикритериальных задач многоэкстремальной многомерной условной оптимизации / М.В. Маркина // Краевые задачи и математическое моделирование: Тематич. сб. научн. ст. В 3 т. / Под общ. ред. В.О. Каледина. – Новокузнецк, 2010. – Т. 2. – С. 178–188.
9. Маркина, М.В. Численные методы оптимального проектирования механических систем / М.В. Маркина [Электронный ресурс]. – Н.Новгород: Нижегород. госуниверситет, 2011. – 27 с. – Режим доступа: <http://www.unn.ru/rus/books/table.html>, регистрац. номер 379.11.06 свободный.
10. Кошкин, В.К. Подвеска, шины и колеса автомобиля ЗИЛ-4331 / В.К. Кошкин, А.Т. Сапожников, М.А. Юркевич // Автомобильная промышленность. – 1988. – №2. – С. 15–22.
11. Богомолов, С.И. Лазерная обработка и усталостная прочность деталей / С.И. Богомолов, Ю.В. Крючков, В.В. Степанов // Автомобильная промышленность. – 1986. – №7. – С. 10–20.

[20.10.2011]

**PARETO-SET APPROXIMATION IN BICRITERION OPTIMAL
DESIGN PROBLEMS OF MECHANICAL CONSTRUCTIONS**

M.V. Markina

A numerical method approximating Pareto-set with a given accuracy for the solution of bicriterion multiextreme problems with constraints is presented. The method is based on information-statistical approach to global optimization. The application of the method is shown on the test examples and bicriterion problem of optimal design of the front suspension of the car.

Keywords: multicriterion optimization, Pareto-set, information-statistical approach, optimal design.