

УДК 539.3

## ГИБРИДНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ РАСЧЕТОВ НА НЕСОГЛАСОВАННЫХ СЕТКАХ

П.Ю. Семенов

ООО «Техсофт», Москва

Предложен вариационный принцип для «склеивания» несогласованных интерфейсов. Множители Лагранжа, введенные на уровне общего функционала, явно определены через базовые независимые переменные, и таким образом глобальная система уравнений включает в себя только обычные узловые степени свободы. Формулировка проходит обычный и контактный patch-тесты.

*Ключевые слова:* несогласованная сетка, функционал Рейснера, множители Лагранжа, гибридный конечный элемент.

### 1. Введение

Несогласованные сетки часто возникают при использовании метода конечных элементов (МКЭ). Например, при независимой генерации в подобластях, когда сетки строятся для сложных конструкций, или при выборочном сгущении. Другим случаем возникновения несогласованных сеток является наличие выделенных границ, например в контактных задачах или задачах взаимодействия твердого тела с жидкостью/газом. При этом необходимо использовать алгоритмы, обеспечивающие выполнение условий совместности на границах разнородных подобластей. В таких случаях используются переходные элементы, которые имеют промежуточные узлы на сторонах и соответственно функции формы более высокого порядка. Для построения элементов с переменным количеством узлов предлагаются различные методики. Например, вводятся специальные промежуточные элементы, содержащие все необходимые степени свободы соприкасающихся конечных элементов, либо условия на границе удовлетворяются с помощью метода множителей Лагранжа или штрафных методов, навязывающих непрерывность перемещений по соответствующим границам. Эти и другие подходы, в частности метод коллокации или расширенный метод Лагранжа, обсуждаются в относительно недавних публикациях [1–10]. Всесторонний обзор контактных алгоритмов содержится в [11]. При прямом использовании метода множителей Лагранжа неизвестные, соответствующие этим множителям, входят в общую систему уравнений, что повышает ее порядок и ухудшает структуру матрицы. Статья [12] содержит описание комбинированной схемы МКЭ, в которой с целью преодоления этих недостатков параметры аппроксимации множителей Лагранжа и часть компонент узловых перемещений по границам сопряжения исключаются из числа независимых переменных на уровне объединения

отдельных подобластей. В настоящем исследовании множители Лагранжа определяются через исходные независимые переменные на уровне формулировки вариационного принципа, который далее используется для построения уравнений МКЭ.

## 2. Вариационный принцип

Рассматриваются два тела  $V_1$  и  $V_2$  с общей границей  $S_{12}$ . Если тела составляют единое целое, то на общей границе выполняются условия непрерывности перемещений и равновесия поверхностных сил:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = \bar{\mathbf{f}}_1 + \bar{\mathbf{f}}_2, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{u}_i$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_i$ ,  $\mathbf{n}_i$ ,  $\bar{\mathbf{f}}_i$  – соответственно вектор перемещения, тензор напряжений, единичная внешняя нормаль к поверхности, заданная поверхностная сила, отнесенные к  $i$ -му телу ( $i = 1, 2$ ).

С помощью множителей Лагранжа  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  для системы двух тел введем функционал

$$\Pi = \sum_{i=1}^2 \Pi_i(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\sigma}_i) + \int_{S_{12}} [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \bar{\mathbf{f}}_1 - \bar{\mathbf{f}}_2) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)] dS, \quad (2.2)$$

где  $\Pi_i(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\sigma}_i)$  – функционал Рейснера для  $i$ -го тела [13]:

$$\begin{aligned} \Pi_i(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\sigma}_i) = & -\frac{1}{2} \int_{V_i} (\mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) \cdot \boldsymbol{\sigma}_i dV - \int_{V_i} \mathbf{u}_i \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i + \bar{\mathbf{p}}_i) dV + \\ & + \int_{S_{f_i}} \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i - \bar{\mathbf{f}}_i) dS + \int_{S_{u_i}} \bar{\mathbf{u}}_i \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) dS. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В этом выражении  $\mathbf{C}_i$  – тензор податливости,  $\bar{\mathbf{p}}_i$  – массовая сила,  $S_{f_i}$  – часть границы, на которой задана поверхностная сила  $\bar{\mathbf{f}}_i$ ;  $S_{u_i}$  – часть границы, на которой задан вектор перемещения  $\bar{\mathbf{u}}_i$ . При этом  $S_{f_i} \cup S_{u_i} = S_i = \partial V_i$  и  $S_{f_i} \cap S_{u_i} = \emptyset$ . Предполагается также, что на общей границе перемещения не заданы, т.е.  $S_{12} \cap S_{u_i} = \emptyset$ .

Запишем первую вариацию функционала (2.3), явно выделив область контакта. Используя тождество

$$\int_{V_i} \mathbf{u}_i \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) dV = \int_{S_i} \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) dS - \frac{1}{2} \int_{V_i} (\nabla \mathbf{u}_i + \nabla \mathbf{u}_i^T) \cdot \boldsymbol{\sigma}_i dV,$$

получим

$$\begin{aligned} \delta \Pi_i(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\sigma}_i) = & \int_{V_i} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_i + \nabla \mathbf{u}_i^T) - \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \right] \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}_i dV - \\ & - \int_{V_i} \delta \mathbf{u}_i \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i + \bar{\mathbf{p}}_i) dV + \int_{S_{f_i} \setminus S_{12}} \delta \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i - \bar{\mathbf{f}}_i) dS + \\ & + \int_{S_{u_i}} (\bar{\mathbf{u}}_i - \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}_i) dS + \int_{S_{12}} \delta \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i - \bar{\mathbf{f}}_i) dS. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как последнее слагаемое в функционале (2.2) является интегралом по об-

шей поверхности, из условия стационарности функционала ( $\delta\Pi = 0$ ) с учетом выражения (2.4) имеем:

– уравнения равновесия

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i + \bar{\mathbf{p}}_i = 0 \quad \text{в } V_i, \quad (2.5)$$

– силовые граничные условия

$$\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = \bar{\mathbf{f}}_i \quad \text{на } S_{f_i} \setminus S_{12}, \quad (2.6)$$

– кинематические граничные условия

$$\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i \quad \text{на } S_{u_i}, \quad (2.7)$$

а также связь между перемещениями и напряжениями:

$$\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_i + \nabla \mathbf{u}_i^T) = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \quad \text{в } V_i. \quad (2.8)$$

Соотношения (2.5)–(2.8) определяют краевую задачу теории упругости везде, кроме общей границы, на которой для замыкания не хватает условий (2.1). Вариация последнего слагаемого в (2.2) и последнее слагаемое в (2.4) дадут вариационное уравнение в интерфейсной области:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{S_{12}} [\delta \mathbf{a} \cdot (\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \bar{\mathbf{f}}_1 - \bar{\mathbf{f}}_2) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{n}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}_2)] dS + \\ & + \int_{S_{12}} \delta \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) dS + \\ & + \int_{S_{12}} [(\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 - \bar{\mathbf{f}}_1 + \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u}_1 + (\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \bar{\mathbf{f}}_2 - \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u}_2] dS. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) выполнено только в том случае, если

$$\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = 0, \quad \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 - \bar{\mathbf{f}}_1 + \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \bar{\mathbf{f}}_2 - \mathbf{b} = 0 \quad \text{на } S_{12}. \quad (2.10)$$

Таким образом, множитель  $\mathbf{a}$  полностью определен и равен нулю. Из второго уравнения следует непрерывность перемещений, а сумма двух последних уравнений дает условие равновесия на общей границе, т.е. из условия стационарности функционала (2.2) следуют и условия (2.1).

Множитель  $\mathbf{b}$  может быть включен в функционал (2.2) как еще одна независимая переменная. Тогда в глобальной системе уравнений появятся дополнительные степени свободы, связанные с аппроксимацией этого множителя. Варианты использования такого подхода можно найти в работах [3, 14]. С другой стороны, два последних равенства из (2.10) определяют множитель  $\mathbf{b}$  через уже введенные переменные и можно априори положить  $\mathbf{b} = -\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \bar{\mathbf{f}}_1$  или  $\mathbf{b} = \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \bar{\mathbf{f}}_2$ . В этом случае дополнительных уравнений в глобальной системе не появится, но появится выделенная область, так как для связи будут использоваться переменные только одной из подобластей. Алгоритм, в котором одно из контактирующих тел принимается за базовое, используется, например, в [15].

Найдем в общем виде выражение для  $\mathbf{b}$ , полагая его линейной комбинацией поверхностных сил:

$$\mathbf{b} = \gamma(\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 - \bar{\mathbf{f}}_1) + \lambda(\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \bar{\mathbf{f}}_2). \quad (2.11)$$

С учетом (2.11) два последних уравнения из (2.10) составят следующую систему:

$$\begin{aligned} (1 + \gamma)(\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 - \bar{\mathbf{f}}_1) + \lambda(\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \bar{\mathbf{f}}_2) &= 0, \\ -\gamma(\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 - \bar{\mathbf{f}}_1) + (1 - \lambda)(\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \bar{\mathbf{f}}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Система (2.12) будет иметь нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} 1 + \gamma & \lambda \\ -\gamma & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 1 + \gamma - \lambda = 0 \quad \text{или} \quad 1 + \gamma = \lambda. \quad (2.13)$$

Выражение (2.11) с учетом результата (2.13) примет вид

$$\mathbf{b} = (\lambda - 1)(\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 - \bar{\mathbf{f}}_1) + \lambda(\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \bar{\mathbf{f}}_2), \quad (2.14)$$

где  $\lambda$  – произвольное число.

Подставляя (2.14) в (2.2) и учитывая, что  $\mathbf{a} = 0$ , получим модифицированный функционал Рейснера, в котором введена граница между подобластями и который зависит только от полей напряжений и перемещений. Переменные каждой из подобластей независимы друг от друга. При этом уравнениями Эйлера и естественными граничными условиями для модифицированного функционала являются не только уравнения (2.5)–(2.8), но и условия совместности (2.1). Поэтому в тех случаях, когда появляются границы, на которых аппроксимации перемещений несовместны, для корректного применения процедуры МКЭ может использоваться функционал (2.2). Несогласованные сетки – один из таких случаев.

### 3. Построение обобщенного конечного элемента

С учетом формулы (2.14) функционал (2.2) для элементов, принадлежащих разным подобластям ( $i = 1, 2$ ), запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_i^e &= -\frac{1}{2} \int_{V_i^e} (\mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) \cdot \boldsymbol{\sigma}_i dV - \int_{V_i^e} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i + \bar{\mathbf{p}}_i) \cdot \mathbf{u}_i dV - \\ &- \int_{S_{f_i}^e \setminus S_{f_2}^e} \bar{\mathbf{f}}_i \cdot \mathbf{u}_i dS - \int_{S_{f_2}^e} \bar{\mathbf{f}}_i \cdot [\lambda \mathbf{u}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{u}_2] dS + \\ &+ \int_{S_{f_i}^e \setminus S_{f_2}^e} \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) dS + \int_{S_{f_2}^e} [\lambda \mathbf{u}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{u}_2] \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) dS. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для определенности рассмотрим элемент из первой подобласти ( $i = 1$ ). В соответствии с обычной процедурой гибридного метода, основанного на функционале (2.3), напряжения и перемещения, связанные с этим элементом, определяются выражениями

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \boldsymbol{\beta} \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{V}_1, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{S}$  – матрица, составленная из интерполяционных полиномов для напряжений,  $\boldsymbol{\beta}$  – вектор неизвестных внутренних параметров,  $\mathbf{H}_1$  – матрица, составленная из функций формы, а  $\mathbf{V}_1$  – вектор узловых перемещений элемента. Перемещения со-

седней подобласти определяются через функции формы и узловые перемещения элементов, имеющих общую границу с рассматриваемым элементом:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{H}_2 \mathbf{V}_2. \quad (3.3)$$

Представим функционал (3.1) в матричном виде:

$$\Pi_1^e = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{V}_1^T \mathbf{P}_1 - \mathbf{V}_2^T \mathbf{P}_2 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_1 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G}_2 \mathbf{V}_2. \quad (3.4)$$

Здесь  $\mathbf{F}$  – матрица податливости,  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$  – векторы эквивалентных узловых сил,  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  – соединительные матрицы. Вектор  $\boldsymbol{\beta}$  – свой для каждого элемента, поэтому условие стационарности

$$\frac{\partial \Pi_1^e}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{F} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{V}_2 = 0$$

дает связь между внутренними и узловыми параметрами:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{G}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{V}_2).$$

Подставляя это выражение в функционал (3.4), получим

$$\Pi_1^e = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \mathbf{P},$$

где  $\mathbf{K}$  – обобщенная матрица жесткости элемента,  $\mathbf{V}$  – полный вектор перемещений, включающий в себя как исходные узловые перемещения, так и перемещения соседних элементов,  $\mathbf{P}$  – соответствующий ему вектор узловых сил:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, гибридный метод обобщен на случай, когда в элементе есть граница, по которой перемещения аппроксимируются несогласованно с соседними элементами, причем новых интерполяций не вводится, а используются уже введенные при получении базового конечного элемента функции формы. Необходимо только вычислить дополнительную соединительную матрицу, т.к. по выделенной границе берется комбинация перемещений первой и второй подобласти. При этом, если на границе сетка согласована и интерполяции перемещений совместны, т.е. в выражениях (3.2), (3.3)  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$  и  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$  на  $S_{12}^e$ , мы получим обычную матрицу жесткости базового элемента. Заметим также, что если положить  $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1$ , то модифицироваться будут элементы только одной из подобластей.

#### 4. Примеры

В настоящем исследовании не вводится новый конечный элемент, но предлагается методика для расширения областей применимости уже существующих элементов. При этом обобщение наследует все свойства исходного элемента. Подход реализован для трех- и четырехузловых элементов плоской оболочки, описанных в

работе [16]. Элементы имеют равновесное поле напряжений и квадратичную интерполяцию перемещений по сторонам.

*Patch-тест.* Первой проверкой работоспособности является моделирование состояний с постоянными деформациями (*patch-тест*). Эти состояния должны воспроизводиться точно на произвольно искаженной сетке. Пример шаблона для обычного теста представлен на рис. 1. Для всех мембранных и изгибных деформаций и соответствующих им напряжений было получено точное решение.

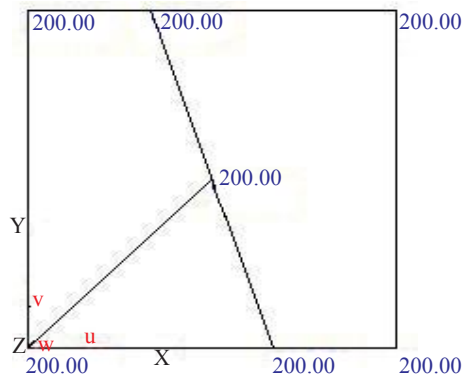


Рис. 1

Для несогласованных сеток предлагается также и контактный *patch-тест*. Два тела, имеющие различные свойства материала и контактирующие без трения, нагружены по свободным верхним краям постоянным давлением  $p_y$ , нижняя кромка закреплена от вертикальных перемещений (рис. 2). Если материалы одинаковы, то это будет одна из разновидностей обычного теста. Предложенная формулировка легко обобщается на такой случай простейшей контактной задачи. На рис. 2 представлены результаты для напряжения  $\sigma_{yy}$ . В этом примере состояние с постоянными деформациями также получено точно и, таким образом, тест полностью пройден. Заметим, что если исходный элемент не проходит тест, то и его модификация также тест не пройдет.

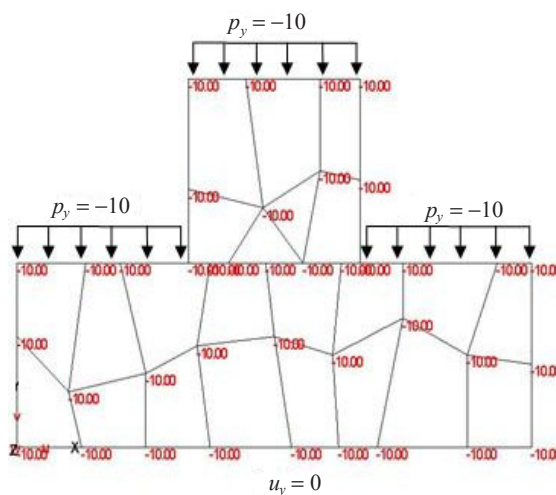


Рис. 2

*Чистый изгиб.* Рассматривается прямоугольная пластина, нагруженная по двум противоположным кромкам линейно меняющимся от  $\pm 10$  до  $\mp 10$  нормальным давлением (рис. 3). Рассматриваются два варианта склеивания сеток. В первом случае соединение производится в середине пластины перпендикулярно нейтральной линии (см. рис. 3,а). Во втором случае грубая сетка располагается в верхней половине пластины и несогласованная граница совпадает с нейтральной линией (см. рис. 3,б).

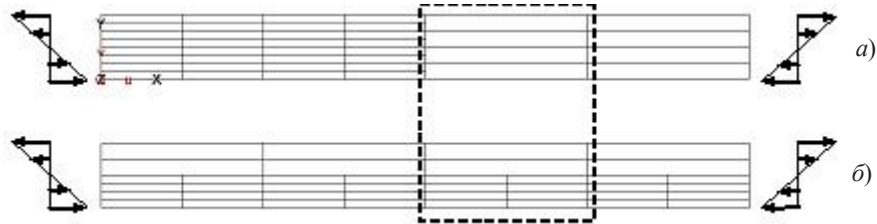


Рис. 3

На согласованных регулярных сетках базовый элемент давал точное решение, хотя в этом случае поле напряжений и не является постоянным. На рис. 4 представлены результаты для изгибающего напряжения  $\sigma_{xx}$  (область, отображенная на этом рисунке, выделена пунктирной рамкой на рис. 3). Из рисунка видно, что и на несогласованных сетках также получено точное решение.

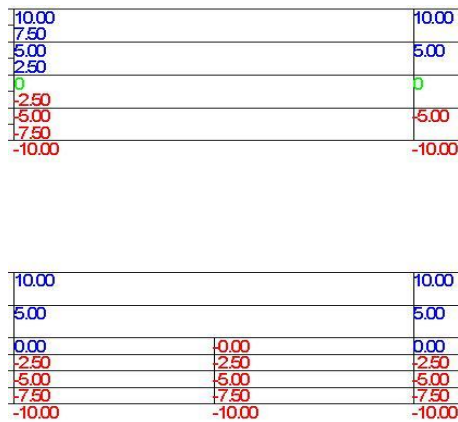


Рис. 4

Этот и предыдущий примеры показывают, что обобщение предложенной процедуры на несогласованные сетки не портит свойств исходного элемента.

*Консольная балка.* Стержень квадратного сечения  $10 \times 1 \times 1$  полностью заделан по одному из торцов. Стержень моделируется оболочечными элементами. Рассматриваются две согласованные сетки: грубая сетка из  $10 \times 2$  элементов (I) и более мелкая сетка из  $40 \times 8$  элементов (III), а также несогласованная сетка с меньшим шагом в области закрепления и большим шагом в регулярной области, являющаяся комбинацией двух предыдущих (II). Расчетные модели (I), (II), (III) приведены на рис. 5. Характеристики материала: модуль упругости  $E = 3 \cdot 10^7$  (имеет размерность давления), коэффициент Пуассона  $\nu = 0,2$ . Стержень находится под действием посто-

янных объемных поперечных нагрузок  $p_y$  и  $p_z$ . Рассматриваются два варианта приложения нагрузки. В первом случае реализуется плоское напряженное состояние, во втором – изгибное.

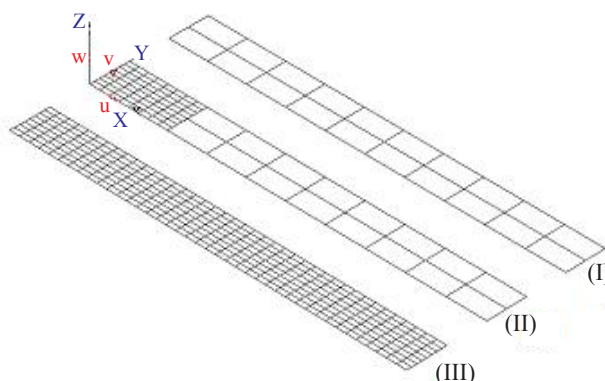


Рис. 5

Анализируется влияние параметра  $\lambda$ , который определяет интерполяцию на несогласованной границе (последнее слагаемое в формуле (3.1)). В приводимых далее результатах  $\lambda = 0$  соответствует тому, что в области с мелкой сеткой используется аппроксимация, полученная по грубому разбиению,  $\lambda = 1$  переносит мелкое разбиение на грубую сетку, а  $\lambda = 0,5$  соответствует симметричному использованию интерполяций из соседних подобластей. Отклонения центральной точки свободного торца консольной балки для двух случаев нагружения приведены в таблице.

Таблица

| Сетка                | $p_y = 100, u_y \cdot 10^3$ | $p_z = 100, u_z \cdot 10^3$ |
|----------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (I)                  | 50,1617                     | 50,1182                     |
| (II) $\lambda = 0$   | 50,3307                     | 50,2728                     |
| (II) $\lambda = 0,5$ | 50,3349                     | 50,2732                     |
| (II), $\lambda = 1$  | 50,3409                     | 50,2773                     |
| (III)                | 50,3754                     | 50,3305                     |

Наблюдается ожидаемая картина. Результаты на несогласованной сетке (II) ближе к результатам на грубой согласованной сетке (I) при  $\lambda = 0$  и ближе к результатам, полученным на мелкой сетке (III), если  $\lambda = 1$ . Результаты для  $\lambda = 0,5$  лежат между результатами для  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$ . Также видно, что результаты на несогласованной сетке (II) при всех значениях параметра существенно ближе к результатам на мелкой сетке (III). Это объясняется тем, что несогласованная модель (II) имеет мелкое разбиение в области с возмущениями и крупное в регулярной области. Таким образом, несогласованная модель гораздо ближе к «хорошей» сетке (III), а не лежит посередине между двумя регулярными разбиениями разного качества. При этом результаты для разных значений параметра  $\lambda$  близки, так как несогласованная граница находится практически в невозмущенной области.

Поля напряжений при  $\lambda = 0,5$  приведены на рис. 6–9.

Изгибающие напряжения  $\sigma_{xx}$  (рис. 6) практически совпадают для всех трех сеточных моделей, т.е. несогласованная сетка не вносит возмущений в решение. Для касательных напряжений  $\sigma_{xy}$  (рис. 7) решение (II) совпадает с (I) в регулярной обла-



сти и с (III) в возмущенной области. Изгибающий момент  $M_{xx}$  (рис. 8) также одинаков для всех сеток. Для поперечной силы  $Q_x$  (рис. 9) в несогласованной модели наблюдается плавный переход из одной области в другую. Нет сильных возмущений, хотя шаг сетки меняется в четыре раза. Как и ожидалось, в области с закреплением поле напряжений (II) повторяет результаты (III), а в регулярной области практически совпадает с результатами (I).

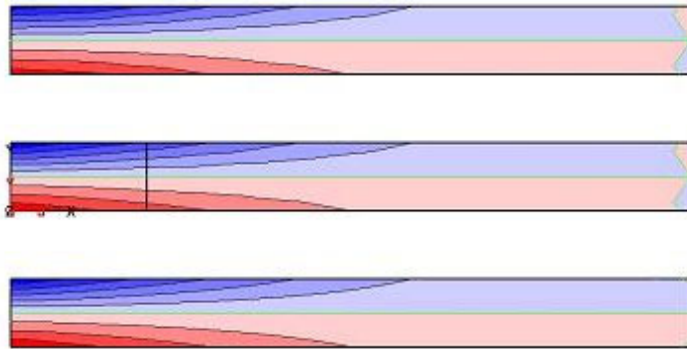


Рис. 6

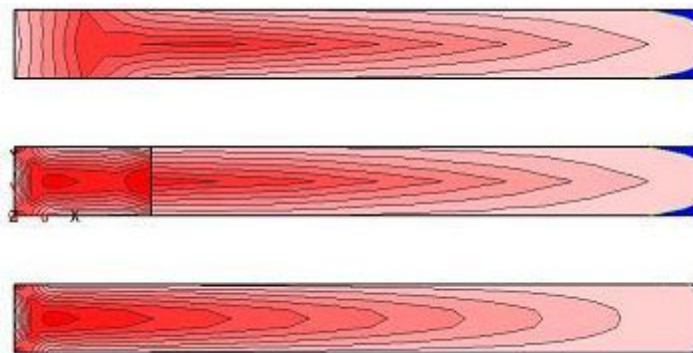


Рис. 7



Рис. 8

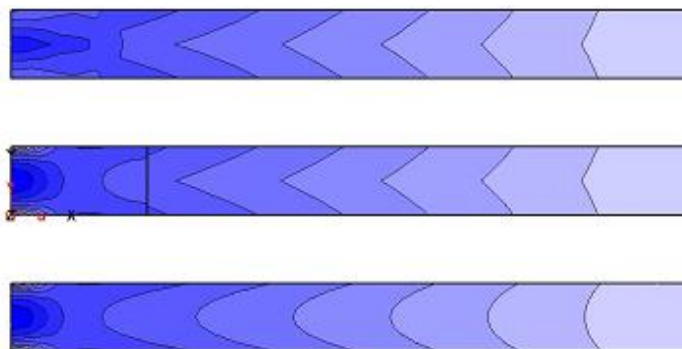


Рис. 9

## 5. Заключение

Рассматривались функционал Рейснера и модификация элемента, который был сформулирован на его основе. Аналогичным образом можно модифицировать другие вариационные принципы и, соответственно, конечные элементы, полученные с их использованием. Внимание было уделено несогласованным сеткам, но подход применим всякий раз, когда возникает необходимость соединять области с различной аппроксимацией. Например, при описании соединения стержней и пластин [17,18].

### Литература

1. A new computational approach to contact mechanics using variable-node finite elements / J.H. Kim [et al.] // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 2008 – V. 73. – P. 1966–1988.
2. *Laurson, T.A.* Consistent mesh tying methods for topologically distinct discretized surfaces in non-linear solid mechanics / T.A. Laurson, M.W. Henstein // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 2003. – V. 57. – P. 1197–1242.
3. *Parks, M.L.* A novel Lagrange-multiplier based method for consistent mesh tying / M.L. Parks, L. Romero, P. Bochev // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* – 2007. – V. 196. – P. 3335–3347.
4. *Park, K.C.* A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces / K.C. Park, C.A. Felippa, G. Rebel // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 2002. – V. 53. – P. 2117–2142.
5. *Pantano, A.* A penalty-based interface technology for coupling independently modeled 3D finite element meshes / A. Pantano, R.C. Averill // *Finite Elements in Analysis and Design.* – 2007. – V. 43. – P. 271–286.
6. *Day, D.* Analysis and computation of a least-squares method for consistent mesh tying / D. Day, P. Bochev // *J. of Comput. and Appl. Mathem.* – 2008. – V. 218. – P. 21–33.
7. *Pencheva, G.* Interior superconvergence in mortar and non-mortar mixed finite element methods on non-matching grids / G. Pencheva, I. Yotov // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* – 2008. – V. 197. – P. 4307–4318.
8. *Zavarise, G.* A modified node-to-segment algorithm passing the contact patch test / G. Zavarise, L. Lorenzis // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 2009. – V. 79. – P. 379–416.
9. *Tian, R.* Non-matching mesh gluing by meshless interpolation – an alternative to Lagrange multipliers / R. Tian, G. Yagawa // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 2006. – V. 71. – P. 473–503.
10. *Liu, R.* A three-dimensional nodal-based implementation of a family of discontinuous Galerkin methods for elasticity problems / R. Liu, M.F. Wheeler, C.N. Dawson // *Computers & Structures.* – 2009. – V. 87. – P. 141–150.
11. *Бураго, Н.Г.* Обзор контактных алгоритмов / Н.Г. Бураго, В.Н. Кукуджанов // *Изв. РАН. МТТ.* – 2005. – №1. – С. 45–87.
12. *Капустин, С.А.* Численный анализ нелинейных квазистатических процессов дефор-

мирования составных конструкций / С.А. Капустин // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация научных исследований: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьков. ун-т. – 1979. – С 68–80.

13. *Розин, Л.А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам / Л.А. Розин. – М.: Стройиздат, 1977. – 128 с.

14. *Адясова, Н.М.* Исследование упруго-пластических составных конструкций МКЭ / Н.М. Адясова, С.А. Капустин // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьков. ун-т. – 1975. – Вып. 2. – С. 119–127.

15. *Баженов, В.Г.* Численное решение задач нестационарного контактного взаимодействия упругопластических оболочек вращения при больших деформациях / В.Г. Баженов, С.В. Зефилов, М.В. Петров // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьков. ун-т. – 1984. – Вып. 28. – С. 54–59.

16. *Semenov, V.A.* Hybrid finite elements for analysis of shell structures / V.A. Semenov, P.Yu. Semenov // Proc. International Congress ICSS-98, 22–26 June 1998, Moscow, Russia. – Moscow, 1998. – Vol. 1. – P. 244–251.

17. *Семенов, В.А.* Выбор расчетных моделей пространственных комбинированных систем МКЭ / В.А. Семенов, П.Ю. Семенов // Пространственные конструкции зданий и сооружений: Сб. статей. Вып. 9 / Под ред. В.В. Шугаева и др. – М., 2004. – С. 54–64.

18. *Семенов, В.А.* Метод соединения различных моделей конечных элементов и его приложение к стержням и оболочкам / В.А. Семенов, П.Ю. Семенов // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов: Труды XXI Междунар. конф., Санкт-Петербург, 4–7 октября 2005 г. – СПб., 2006. – С. 416–424.

[27.10.2011]

#### HYBRID FINITE ELEMENT FOR THE ANALYSIS ON NON-MATCHED MESHES

**P.Yu. Semenov**

A variational approach for «glueing» of non-matched interfaces is proposed. Lagrange's multipliers introduced on a general functional level are explicitly defined by the basic independent variables. Thereby the global system of equations includes only nodal degrees of freedom. The formulation is verified by the standard and contact patch-tests.

*Keywords:* non-matched mesh, Reissner's functional, Lagrange's multipliers, hybrid finite element.