УДК 519.6

РАЗВИТИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ВОДОНАСЫЩЕННОГО ОДНОРОДНОГО ОСНОВАНИЯ

Т.В. Мальцева, Т.Ю. Володина

Тюменский государственный университет

Рассматривается задача о нагружении водонасыщенного основания (тела) при стабилизированном состоянии (в трехмерной постановке). Напряженно-деформированное состояние двухфазного основания описывается системой дифференциальных уравнений типа Ламе, в которую входят младшие производные. Для решения математической задачи используется «ажурный» вариант метода конечных элементов, который приводит к понижению порядка системы линейных алгебраических уравнений при одинаковом количестве элементов. Построена новая матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: водонасыщенное основание, двухфазное тело, уравнения типа Ламе, метод конечных элементов, «ажурная схема».

Введение

Строительство объектов нефтегазодобывающего комплекса и транспортировка углеводородного сырья в основном ведется на водонасыщенных глинистых грунтах, заторфованных, заболоченных территориях.

Ряд натурных и лабораторных экспериментов указывают на факт существования избыточного давления в поровой воде [1–3], когда кривая порового давления σ_l начиная с некоторого времени t_{stab} имеет постоянное конечное значение σ_{ost} (рис.1), которое не учитывается моделями фильтрационной консолидации.

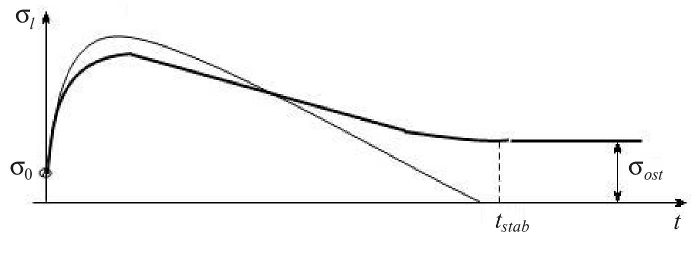


Рис. 1

Исследования, связанные с построением и развитием математической модели, описывающей вклад поровой воды в напряженное и деформированное состояние скелета грунта с помощью младших производных по координатам, а также получением некоторых аналитических решений классических задач типа Фламана и Буссинеска, приводятся в работах [4, 5].

С целью проведения численных расчетов напряженно-деформированного состояния водонасыщенного основания при действии различных нагрузок необходимо получить новый вариант метода конечных элементов (МКЭ), учитывающий остаточные поровые давления.

Постановка задачи

На части границы двухфазного тела (скелет грунта + поровая вода) действуют внешние силы $\mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3)$, на части – нулевые кинематические условия. Влияние избыточных остаточных поровых давлений описывается с помощью кинематической модели [4], которая представляет собой систему трех дифференциальных уравнений эллиптического типа с положительными постоянными коэффициентами G, λ, b, c относительно вектора перемещений скелета грунта $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$:

$$-\left((G+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + G\Delta u_i + b\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + c\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = F_i, \quad i = 1,2,3, \tag{1}$$

$$G = \frac{E_S}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E_S}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad b = \frac{E_l}{\aleph^2}, \quad c = \frac{E_l}{\aleph h}, \quad \theta = \operatorname{div}\mathbf{u},$$

с граничными условиями:

$$u_i\big|_{S_1} = 0, \quad \tilde{t}_{ij} u_j\big|_{S_2} = Q_i(x_1, x_2, x_3), \tag{2}$$

$$\tilde{t}_{ij} = \lambda n_i \partial_j + (G + b\delta_{ij}) n_j \partial_i + G\delta_{ij} n_k \partial_k,$$

где $\partial_j = \partial / \partial x_j$, δ_{ij} – символ Кронекера, E_S – модуль деформации, ν – коэффициент Пуассона скелета грунта, E_l – механическая постоянная поровой воды, $\aleph$ – безразмерная величина $(0 < \aleph < 1)$, определяемая из эксперимента, h – высота сжимаемой толщи, F_i – объемные силы.

Согласно принципу Лагранжа скалярно умножим уравнения (1), записанные в операторном виде, на вектор истинных перемещений $\mathbf{u}$:

$$-((\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{F}, \mathbf{u}), \tag{3}$$

где $A = (G+\lambda)\operatorname{grad}\operatorname{div} + G\Delta$ – оператор Ламе, $B = b(\partial^2/\partial x_1^2, \partial^2/\partial x_2^2, \partial^2/\partial x_3^2)$, $C = c(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ – операторы, описывающие влияние поровой воды на скелет грунта. В [4] установлена связь между скалярными произведениями и полной энергией деформации, на основании которой строится матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

«Ажурная» схема метода конечных элементов

Для численной реализации модели воспользуемся «ажурной» схемой метода конечных элементов, изложенной в работе [6] для решения задач теории упругости.

В качестве конечного элемента выберем центральный тетраэдр $lmnp$ параллелепипеда (один в центре и четыре по краям) (рис. 2). Такая схема называется «ажурной», так как в расчете участвует только один тетраэдр, что приводит к существенному (в несколько раз) снижению порядка СЛАУ.

На основании линейной аппроксимации $u_i = \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}x_j$ (i = 1, 2, 3) вектор искомых перемещений $\mathbf{u}$ представим в виде линейной комбинации узловых перемещений

$$\{\delta\} = (u_1^m, u_2^m, u_3^m, u_1^n, u_2^n, u_3^n, u_1^l, u_2^l, u_3^l, u_1^p, u_2^p, u_3^p):$$

$$u_i = \frac{1}{\Delta}[(d_m + q_m x_1 + y_m x_2 + t_m x_3)u_i^m + (d_n + q_n x_1 + y_n x_2 + t_n x_3)u_i^n +$$

$$+ (d_l + q_l x_1 + y_l x_2 + t_l x_3)u_i^l + (d_p + q_p x_1 + y_p x_2 + t_p x_3)u_i^p] \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где

$$d_m = x_1^n x_2^l x_3^p - x_1^n x_2^p x_3^l - x_1^l x_2^n x_3^p + x_1^l x_2^p x_3^n + x_1^p x_2^n x_3^l - x_1^p x_2^l x_3^n,$$

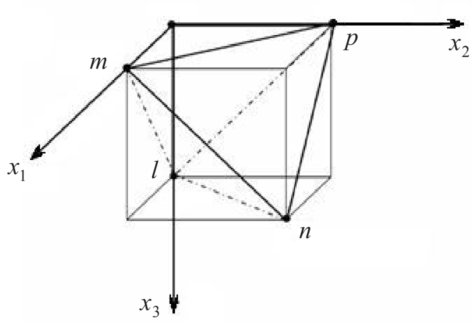
$$q_m = x_2^l x_3^p - x_2^p x_3^l - x_2^n x_3^p + x_2^p x_3^n + x_2^n x_3^l - x_2^l x_3^n,$$

$$y_m = x_1^n x_3^p - x_1^n x_3^l - x_1^l x_3^p + x_1^l x_3^n + x_1^p x_3^l - x_1^p x_3^n,$$

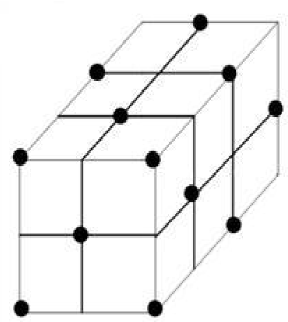
$$t_m = x_1^n x_2^l - x_1^n x_2^p - x_1^l x_2^n + x_1^l x_2^p + x_1^p x_2^n - x_1^p x_2^l,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1^m & x_2^m & x_3^m \\ 1 & x_1^n & x_2^n & x_3^n \\ 1 & x_1^l & x_2^l & x_3^l \\ 1 & x_1^p & x_2^p & x_3^p \end{vmatrix}.$$

Верхний индекс указывает на номер узла тетраэдрального элемента. Коэффициенты d, q, y, t находятся путем круговой перестановки индексов.



а)



б)

Рис. 2

Из уравнений Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

относительные деформации внутри конечного элемента выражаются через искомые узловые перемещения $\{\delta\}$:

$$\{\varepsilon\} = [N]\{\delta\},$$

где

$$[N]=\begin{pmatrix} q_m & 0 & 0 & q_n & 0 & 0 & q_l & 0 & 0 & q_p & 0 & 0 \\ 0 & y_m & 0 & 0 & y_n & 0 & 0 & y_l & 0 & 0 & y_t & 0 \\ 0 & 0 & t_m & 0 & 0 & t_n & 0 & 0 & t_l & 0 & 0 & t_p \\ y_m & q_m & 0 & y_n & q_n & 0 & y_l & q_l & 0 & y_p & q_p & 0 \\ t_m & 0 & q_m & t_n & 0 & y_l & t_l & 0 & q_l & t_p & 0 & q_p \\ 0 & t_m & y_m & 0 & t_n & y_n & 0 & t_l & y_l & 0 & t_p & y_p \end{pmatrix}$$

– геометрическая матрица, соответствующая положению тетраэдра.

Построение СЛАУ

Для получения матрицы, отвечающей сумме операторов ($\mathbf{A}+\mathbf{B}$), согласно принципу Лагранжа используется равенство работ внешних $\{\delta\}^T\{F\}$ (T – операция транспонирования) и внутренних сил.

Удельная работа внутренних сил, отвечающих скелету грунта, с учетом влияния поровой воды через оператор **B** равна $\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}$, где $\{\varepsilon\}^T=\{\delta\}^T[N]^T$. Напряжения и деформации для скелета грунта связаны законом $\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$, где D – матрица механических характеристик водонасыщенного грунта для тетраэдрального элемента.

От удельной работы перейдем к работе внутренних сил в пределах объема конечного элемента, в результате получим:

$$\{\delta\}^T\int_V [N]^T[D][N]dV\{\delta\}=\{\delta\}^T[k^s]\{\delta\},\quad [k^s]=[N]^T[D][N]\Delta,$$

где $[k^s]$ – матрица для скелета грунта с учетом поровой воды, зависящая от механических и геометрических характеристик элемента.

Построим матрицу, соответствующую третьему операторному слагаемому ($-\mathbf{Cu}$, $\mathbf{u}$) в системе уравнений (3):

$$\{\delta\}^T[k^s]\{\delta\}+(-\mathbf{Cu},\mathbf{u})=\{\delta\}^T\{F\}, \tag{5}$$

$$(-\mathbf{Cu},\mathbf{u})=\int_V c\frac{\partial u_i}{\partial x_i}u_i dV=c\int_v (u_1\ u_2\ u_3)\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\end{pmatrix}dV. \tag{6}$$

Перемещения **u** запишем в матричном виде согласно формулам (4):

$$\{u\}=[M^*]\{\delta\}, \tag{7}$$

где

$$[M^*]=\begin{pmatrix} \xi_m^* & 0 & 0 & \xi_n^* & 0 & 0 & \xi_l^* & 0 & 0 & \xi_p^* & 0 & 0 \\ 0 & \xi_m^* & 0 & 0 & \xi_n^* & 0 & 0 & \xi_l^* & 0 & 0 & \xi_p^* & 0 \\ 0 & 0 & \xi_m^* & 0 & 0 & \xi_n^* & 0 & 0 & \xi_l^* & 0 & 0 & \xi_p^* \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

здесь $\xi_k^* = d_k + q_k x_1 + y_k x_2 + t_k x_3$, $k = l, m, n, p$. Отметим, что нулевые элементы в $[M^*]$ добавлены, чтобы выполнить требование одинаковой размерности матричных слагаемых (5).

Продолжим преобразование выражения (5):

$$(-\mathbf{Cu},\mathbf{u}) = \int_V \{\delta\}^T [M^*]^T [D_l]\{\varepsilon\} dV = \{\delta\}^T \int_V [M^*]^T [D_l]\,[N]\{\delta\} dV =$$

$$= \{\delta\}^T \int_V [M^*]^T dV [D_l]\,[N]\{\delta\}, \quad [D_l] = c[E], \tag{8}$$

где $[E]$ – единичная матрица. В формулы перемещений (7) входят аргументы x_1, x_2, x_3, поэтому подынтегральное выражение содержит произведения $x_i dV$, $i = 1, 2, 3$. Интегралы с точностью до константы вычислим с помощью координат центра тяжести тетраэдра:

$$\int_V x_i dV = x_{ic} V, \quad x_{ic} = \frac{\sqrt{(x_1^p - x_1^n)^2 + (x_2^p - x_2^n)^2 + (x_3^p - x_3^n)^2}}{2}.$$

В формуле (8) объемный интеграл заменим на произведение $[M]\{\delta\}$, тогда с учетом координат центра тяжести тетраэдра окончательно получим:

$$(-\mathbf{Cu},\mathbf{u}) = \{\delta\}^T [k^l]\{\delta\},$$

где $[k^l] = [M]^T [D_l][N]$.

Выражение (5) после сокращения на $\{\delta\}^T$ примет вид:

$$([N]^T [D][N] + [M]^T [D_l][N])\{\delta\} = \{F\} \text{ или } ([k^s] + [k^l])\{\delta\} = \{F\}.$$

Сумму матриц $[k^s] + [k^l]$ назовем матрицей жесткости для тетраэдрального двухфазного элемента.

Заключение

На основе матриц жесткости строится глобальная матрица коэффициентов СЛАУ. Она имеет блочную структуру. Аналогичная матрица жесткости была построена для случая плоского конечного элемента (треугольника, прямоугольника) в работе [7].

Литература

1. *Амарян, Л.С.* Свойства слабых грунтов и методы их изучения / Л.С. Амарян. – М.: Недра, 1990. – 220 с.

2. *Зехниев, Ф.Ф.* Стабилизация оснований с плоскими вертикальными песчаными дренами: автореф. дис… канд. техн. наук: 05.23.02 / Зехниев Фархад Фархадович. – М., 1988. – 25 с.

3. *Набоков, А.В.* Исследование напряженно-деформированного состояния основания из водонасыщенной глины: дис… канд. техн. наук: 05.23.02: защищена 05.07.2004: утв. 08.10.2004 / Набоков Александр Валерьевич. – Тюмень, 2004. – 142 с.

4. *Мальцева, Т.В.* О разрешимости смешанной задачи, отвечающей обобщенному оператору Ламе / Т.В. Мальцева // Вестник ТюмГУ. – 2006. – №5. – С. 230–234.

5. *Мальцева, Т.В.* Моделирование двухфазного тела с учетом несущей способности жидкой фазы / Т.В. Мальцева, Е.Р. Трефилина // Математическое моделирование. – 2004. – Т.16, №11. – С. 47–60.

6. *Чекмарев, Д.Т.* Об одном классе двухмерных схем МКЭ / Д.Т. Чекмарев, К.М. Гладильщикова // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2006. – Вып. 68. – С. 236–241.

7. *Мальцева, Т.В.* Сопоставление матриц жесткости при расчете двухфазной полуплоскости / Т.В. Мальцева, Т.В. Салтанова // Вестник ТюмГУ. – 2007. – №5. – С. 25–33.

[21.09.2011]

DEVELOPMENT OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR CALCULATION OF WATER-SATURATED HOMOGENEOUS BASE

T.V. Maltseva, T.Yu. Volodina

A problem of loading of water-saturated base (body) in a stabilized state (a spatial case) is considered. The stressed-strained state of the two-phase base is described by Lame's differential equations which include the lower order derivatives. To solve the mathematical problem a rare mesh version of the finite element method is used that leads to the decrease in the order of a system of linear algebraic equations with the same number of elements. A new coefficient matrix for the system of linear algebraic equations is constructed.

Keywords: water-saturated base, two-phase body, Lame's equations, finite element method, rare mesh scheme.