УДК 539.374

О СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

В.Г. Зубчанинов

Тверской государственный технический университет

Анализируются соотношения теории процессов и теории течения при сложном нагружении для малых деформаций.

Ключевые слова: пластичность, упругость, процесс, течение, сложное нагружение, остаточные деформации, постулат изотропии.

Введение

В теории пластичности основными направлениями в ее развитии являются теория процессов и теория течения. Теория упругопластических процессов деформирования сплошных сред при сложном нагружении была создана на рубеже 50-х годов XX столетия в трудах выдающегося механика России А.А. Ильюшина и развивалась в дальнейшем в трудах учеников созданной им научной школы. В настоящее время эта теория является наиболее общей в теории пластичности при сложном нагружении. Общая теория течения пластических сред была разработана В. Прагером также в середине XX века и развивалась в трудах А.Ю. Ишлинского, В.В. Новожилова, Ю.И. Кадашевича и др. В статье обсуждаются некоторые важные вопросы развития теории процессов и течения в современной теории пластичности.

1. Теория процессов и постулат изотропии

В теории процессов постулат изотропии [1–3] относится к любой начально изотропной среде независимо от активного либо пассивного деформирования и нагружения. Напряженно-деформированное состояние (НДС) и процессы в каждой частице тела с координатами x_k ($k = 1, 2, 3$) в физическом пространстве характеризуются заданием шести компонент напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) либо деформаций ε_{ij} как функций времени t, представляющих тензоры

$$(\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + \sigma(S^*_{ij}), \quad (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + Э(Э^*_{ij}), \tag{1.1}$$

где $\sigma_0 = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}/3$; $\sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$, $Э = \sqrt{Э_{ij}Э_{ij}}$ – модули шаровых тензоров и девиаторов,

$$S_{ij} = \sigma S^*_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad Э_{ij} = ЭЭ^*_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 \tag{1.2}$$

– компоненты девиаторов, S^*_{ij}, $Э^*_{ij}$ – компоненты направляющих тензоров.

В основе теории пластичности лежит постулат макроскопической определимости [1–3], согласно которому состояние среды в любой момент t в каждой частице определяется процессом нагружения. При простом процессе мы имеем соотношения общей теории пластичности при пропорциональном нагружении:

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad \sigma = \Phi(Э), \quad S_{ij}^* = Э_{ij}^* \quad \left(S_{ij} = \frac{\sigma}{Э} Э_{ij} \right), \tag{1.3}$$

где K – модуль объемной деформации, $\Phi(Э)$ – универсальная функция простого нагружения. При сложном нагружении вместо (1.3) имеют место следующие соотношения:

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad \sigma = \sigma(s), \quad S_{ij} = \sum_{k=1}^{5} A_k \frac{d^k Э_{ij}}{ds^k}, \tag{1.4}$$

где $s = s(t)$ – параметр прослеживания процесса деформирования, A_k – функционалы процесса. В (1.4) компоненты девиатора S_{ij} разложены по тензорному базису. Это соотношение было названо в [1] постулатом изотропии [1–3].

В векторном шестимерном координатном евклидовом пространстве $\mathbf{E}_6$ при ортонормированном базисе $\{\hat{i}_k\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 5)$ тензорам (1.1) поставлены в соответствие многомерные векторы

$$\bar{S} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\varepsilon} = Э_k \hat{i}_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 5), \tag{1.5}$$

где S_k, $Э_k$ связаны с σ_{ij}, ε_{ij} линейными соотношениями [1–6]:

$$\begin{gathered} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, \quad S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11}, \quad S_2 = \frac{S_{22} - S_{33}}{\sqrt{2}}, \\ S_3 = \sqrt{2} S_{12}, \quad S_4 = \sqrt{2} S_{23}, \quad S_5 = \sqrt{2} S_{13}. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Аналогичные соотношения имеем для $Э_k$. Обе группы компонент при переходе от σ_{ij}, ε_{ij} к S_k, $Э_k$ сохраняют при преобразовании координат x_k все инварианты σ_0, σ, ψ и ε_0, $Э$, φ в $\mathbf{E}_6$, причем

$$\cos 3\psi = \frac{|S_{ij}^*|}{3\sqrt{6}}, \quad \cos 3\varphi = \frac{|Э_{ij}^*|}{3\sqrt{6}}.$$

Следовательно, тензоры в физическом пространстве и компоненты векторов в векторном пространстве $\mathbf{E}_6$ для данного t абсолютно идентичны.

Векторы (1.5) можно разложить на составляющие в соответствии с представлением (1.1):

$$\begin{cases} \bar{S} = \bar{S}^0 + \bar{\sigma}, \quad \bar{\varepsilon} = \bar{Э}^0 + \bar{Э}, \quad \bar{S}^0 = S_0 \hat{i}_0, \quad Э^0 = Э_0 \hat{i}_0, \\ \bar{\sigma} = \bar{S}_k \hat{i}_k, \quad \bar{Э} = Э_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 5). \end{cases} \tag{1.7}$$

Концы векторов $\bar{S}$, $\bar{\varepsilon}$ описывают в совмещенном пространстве $\mathbf{E}_6$ шестимерные, а $\bar{\sigma}$, $\bar{Э}$ в $\mathbf{E}_5$ – пятимерные траектории. Внутренняя геометрия траекторий определяется движением по ним естественных реперов Френе–Ильюшина. Единичные орты репера $\{\hat{p}_k\}$ траектории деформирования

$$\hat{p}_1 = \frac{d\overline{Э}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\kappa_1}\frac{d^2\overline{Э}}{ds^2}, \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{\kappa_2}\left[\kappa_1\frac{d\overline{Э}}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa_1}\frac{d^2\overline{Э}}{ds^2}\right)\right], \ \ldots, \tag{1.8}$$

где κ_k – параметры кривизны и кручения траектории. Траектория $\overline{Э}(s)$ в $\mathbf{E}_6$ при $\{\hat{i}_k\}$ с построенными в каждой ее точке векторами $\overline{S}$, $d\overline{S}$ и приписанными к ней температурой T и другими нетермофизическими параметрами β создают Э-образ процесса в частице тела. Соотношения постулата изотропии (1.4) с помощью преобразований (1.6) могут в $\mathbf{E}_6$ быть представлены в виде

$$\overline{S}^0 = 3K\overline{Э}^0, \quad \overline{\sigma} = A_k\frac{d^k\overline{Э}}{ds^k}, \quad A_k = A_k\{\varepsilon_0, Э, \varphi, \kappa_m, T, \beta\}_{s(t)} \tag{1.9}$$

или, при использовании (1.8), – в виде [1–11]:

$$\overline{S}^0 = 3K\overline{Э}^0, \quad \overline{\sigma} = \sigma\hat{\sigma} = P_k\hat{p}_k, \quad P_k = P_k\{\varepsilon_0, Э, \varphi, \kappa_m, T, \beta\}_{s(t)}, \tag{1.10}$$

где A_k, P_k – функционалы процесса,

$$P_k = \sigma\cos\beta_k, \quad \hat{\sigma} = \cos\beta_k \cdot \hat{p}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 5), \tag{1.11}$$

β_k – угловые координаты $\hat{\sigma}$ в репере Френе $\{\hat{p}_k\}$, связанные соотношениями

$$\cos\beta_1 = \cos\vartheta_1, \quad \cos\beta_{k+1} = \cos\beta_k \operatorname{tg}\vartheta_k \cos\vartheta_{k+1} \tag{1.12}$$

со сферическими полярными координатами ϑ_m, $m = 1, 2, 3, 4$.

В естественном репере $\{\hat{p}_k\}$ можно вместо $\overline{\sigma}$ разложить любой другой физический вектор [4, 6, 8], в частности,

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = P_k^*\hat{p}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 5), \tag{1.13}$$

где

$$P_k^* = \frac{d}{ds}(\sigma\cos\beta_k) - \sigma(\kappa_k\cos\beta_{k+1} - \kappa_{k-1}\cos\beta_{k-1}). \tag{1.14}$$

Из (1.11)–(1.14) с учетом постулата физической определимости [6, 8] автором получены общие определяющие соотношения теории процессов в локальной и нелокальной формах, размерность которых для начально изотропных сред снижена с пяти до трех [4, 6, 8]:

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = M_1\hat{p}_1 + M\hat{\sigma} + M_3\hat{p}_3, \tag{1.15}$$

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \dfrac{\overline{\sigma}}{\sigma} = \cos\vartheta_1\hat{p}_1 + \sin\vartheta_1(\cos\vartheta_2\hat{p}_2 + \sin\vartheta_2\hat{p}_3), \\ M = \dfrac{d\sigma}{ds} - M_1\cos\vartheta_1 - M_3\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2, \\ M_k = M_k\{\varepsilon_0, Э, \varphi, \kappa_m, T, \beta\}_{s(t)}, \quad (k = 1, 3), \end{cases} \tag{1.16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{\sigma}}{ds} = N_1 \hat{p}_1 + N_\sigma \hat{\sigma} + N_Э \hat{Э}, \\ N_\sigma = \dfrac{d\sigma}{ds} - N_1 \cos\vartheta_1 - N_Э \cos\alpha, \quad \hat{\sigma}\cdot\hat{Э} = \cos\alpha, \end{cases} \tag{1.17}$$

причем функционалы N_1, $N_Э$ и M_1, M_3, $d\sigma / ds = P\cos\vartheta_1$ связаны соответствующими выражениями, приведенными в [4, 6, 8]:

$$\bar{S}^0 = 3K\bar{Э}^0, \quad \bar{\sigma} = \sigma\hat{\sigma} = P_k \hat{p}_k, \quad P_k = \sigma\cos\beta_k, \quad \hat{\sigma} = \cos\beta_k \hat{p}_k,$$

где P_k – функционалы процесса, зависящие от параметров ε_0, Э, φ, κ_m, T, β.

Для определения углов сближения ϑ_1 и депланации ϑ_2, характеризующих векторные свойства материалов, получены уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1\cos\vartheta_2 = \dfrac{1}{\sigma}[-M_1\sin\vartheta_1 + M_3\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2], \\ \sin\vartheta_1\left(\dfrac{d\vartheta_2}{ds} + \kappa_2\right) = \kappa_1\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \dfrac{M_3}{\sigma}\cos\vartheta_2. \end{cases} \tag{1.18}$$

Функционалы процесса деформирования M_k $(k = 1, 3)$, $d\sigma / ds$ и др. зависят от всех трех инвариантов напряженно-деформированного состояния (НДС) ε_0, Э, φ, параметров сложного деформирования κ_m, температуры T и группы параметров β как функций параметра прослеживания процесса деформирования $s(t)$. Для неаналитических траекторий они зависят также от углов излома траекторий θ_n^0, где n – номер точки излома. Из (1.18) совершенно ясно, что функционалы M_k $(k = 1, 3)$ характеризуют векторные свойства материалов.

В частном случае обобщенного плоского НДС $\vartheta_2 = 0$. Из (1.15), (1.16), (1.18) получаем

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1\hat{p}_1 + M\hat{\sigma} + M_3\hat{p}_3, \\ \hat{\sigma} = \cos\vartheta_1\hat{p}_1 + \sin\vartheta_1\hat{p}_2, \\ M = \dfrac{d\sigma}{ds} - M_1\cos\vartheta_1, \quad M_3 = \sigma\kappa_2\sin\vartheta_1, \\ \dfrac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\dfrac{M_1}{\sigma}\sin\vartheta_1. \end{cases} \tag{1.19}$$

Соотношения (1.19) содержат параметры сложного нагружения κ_1, κ_2, и поэтому функционалы процесса также должны от них зависеть. Для плоских траекторий ($\kappa_2 = 0$, $\vartheta_2 = 0$) из (1.18), (1.19) следуют соотношения гипотезы компланарности [2, 4, 6, 7]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1\hat{p}_1 + (P - M_1)\dfrac{\bar{\sigma}d\bar{Э}}{\sigma^2}\bar{\sigma}, \\ P = \dfrac{d\sigma}{ds}\dfrac{1}{\cos\vartheta_1}, \quad \hat{\sigma} = \cos\vartheta_1\hat{p}_1 + \sin\vartheta_1\hat{p}_2, \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma}\sin\vartheta_1. \qquad (1.21)$$

При различных выражениях для функционалов P, M_1 из (1.20) получаем ряд частных теорий пластичности для простых процессов, траекторий малой и средней кривизны, двухзвенных ломаных, простейших из теорий течения Прандтля–Рейсса–Хилла, Прагера и др. [4, 6, 8]. Например, для теории средних кривизн и теории течения Прандтля–Рейсса–Хилла можно принять $M_1 = \alpha \cdot 2G$ ($\alpha = 0{,}68$ и $\alpha = 1$), $\sigma = \Phi(s)$ – универсальный закон упрочнения Одквиста–Ильюшина, мало отличающийся от закона $\sigma = \Phi(Э)$ Роша и Эйхингера при простом нагружении. Тогда для траекторий постоянной кривизны κ_1 можно получить приближенное решение после линеаризации (1.21):

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^* + (\vartheta_1^0 - \vartheta_1^*)e^{-k\Delta s}, \quad \vartheta_1^* = -\frac{\kappa_1}{k}, \qquad (1.22)$$

где $\vartheta_1 < \pi/8 = 22^\circ$, $k = \alpha 2G/\sigma^T$, σ^T – предел текучести, ϑ_1^0 – угол излома траектории деформирования в начальной точке $s = s_0$ участка траектории постоянной кривизны, $\Delta s = s - s_0$. Из (1.22) следует, что угол сближения явно выражен через параметры сложного деформирования ϑ_1^0, κ_1. При этом первое из соотношений (1.20) преобразуется в виду

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \alpha 2G\frac{d\bar{Э}}{ds} + \left[\frac{d\Phi(s)}{ds} - \alpha 2G\cos\vartheta_1\right]\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}. \qquad (1.23)$$

В теории течения для активных процессов считается $\vartheta_1 \approx 0$ и $\sigma = \Phi(s) \approx \Phi(Э)$, т.е. влиянием векторных свойств материала пренебрегается. При такой постановке можно все же вычислять углы ϑ_1 по формуле

$$\cos\vartheta_1 = \hat{\sigma}\cdot\hat{Э} = \frac{S_k Э_k}{\sigma Э} \quad (k = 1, 2, \ldots, 5), \qquad (1.24)$$

пользуясь приближенным решением в предположении $\vartheta_1 \approx 0$.

Определяющие соотношения (1.9), (1.10) либо более общие (1.15)–(1.18) для начально изотропных сред в $\mathbf{E}_6$ полностью отражают свойства квазиизотропной среды при сложном упругопластическом деформировании в физическом пространстве, поскольку отмеченные определяющие соотношения ковариантны относительно преобразований вращения системы координат x_k и тензоров в теле. При ортогональных преобразованиях базиса $\{\hat{i}_k\}$ в $\mathbf{E}_6$ все параметры-аргументы функционалов процесса, кроме ε_0, φ и матрицы χ преобразований, ковариантны относительно этих преобразований. Исключение составляют преобразования, которые соответствуют частному случаю преобразований системы координат, когда сохраняются все три инварианта НДС. Поскольку ортогональные преобразования базиса $\{\hat{i}_k\}$ для одного и того же образа процесса и ортогональные преобразования вращения и отражения траекторий и образов процесса при неподвижном базисе $\{\hat{i}_k\}$ в $\mathbf{E}_6$ реализуются при одной и той же матрице χ преобразований, то определяющие соотношения (1.15)–(1.18) образа процесса инвариантны лишь для выше отмеченного частного случая НДС. В общем случае векторное пространство $\mathbf{E}_6$ математически неизотропно, а определяющие соотношения (1.9)–(1.18) в нем неинвариантны относительно преобразований вращения и отражения образов физических процессов.

Однако для многих материалов физические свойства слабо зависят от вида НДС (параметров ε_0, φ и σ_0, ψ). В этом весьма важном для инженерных приложений случае имеет место частная формулировка постулата изотропии: образ физического процесса в $\mathbf{E}_6$ инвариантен относительно всех преобразований вращения и отражения траекторий, если в соответствующих точках сохраняются параметры T, β. Это свойство настолько упрощает экспериментальные исследования физических процессов деформирования, что позволяет построить теорию экспериментов при сложном нагружении и решать краевые задачи. Экспериментальные исследования на автоматизированных испытательных комплексах подтверждают постулат изотропии. Теория процессов и ее постулат изотропии способны напрямую и обоснованно оценить влияние векторных свойств материалов на закономерности их деформирования [1–11].

2. Теория течения

В основе современной теории течения пластических сред лежат две основные гипотезы, которые отличают ее от современной теории процессов. Первая из них – это гипотеза о возможности разложения полных деформаций ε_{ij}, $Э_{ij}$ на упругие ε_{ij}^e, $Э_{ij}^e$ и пластические ε_{ij}^p, $Э_{ij}^p$ составляющие:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad Э_{ij} = Э_{ij}^e + Э_{ij}^p \quad (i,\ j = 1, 2, 3), \tag{2.1}$$

где упругие части следуют закону Гука. В линейном координатном девиаторном пространстве $\mathbf{E}_5$ соотношениям (2.1) соответствуют выражения [1–3, 4–8]

$$\overline{Э} = \overline{Э}^e + \overline{Э}^p, \quad d\overline{Э} = d\overline{Э}^e + d\overline{Э}^p, \quad \overline{Э}^e = \frac{\overline{\sigma}}{2G}, \quad d\overline{Э}^e = \frac{d\overline{\sigma}}{2G}. \tag{2.2}$$

В современной теории процессов эта гипотеза в общем случае отвергается. Она выполняется лишь для простых процессов нагружения-разгружения, когда после разгрузки возможно приближенно определить остаточную деформацию и принять ее за пластическую в момент начала разгрузки. Как следствие обсуждаемой гипотезы, В. Прагером была предложена концепция о мгновенных предельных поверхностях нагружения $f(\overline{\sigma}, \overline{Э}^p) = 0$ в векторном пространстве нагружения Σ_5. Согласно этой концепции, наиболее четко сформулированной А.А. Ильюшиным для векторных пространств $\mathbf{E}_5$ и Σ_5 [3], все продолжения процессов из некоторой точки K при пересечении траекторий с текущей предельной поверхностью можно разделить на два множества. Первое из них образуют продолжения, направленные в область, внешнюю к этой поверхности, и соответствующие активному процессу упругопластического деформирования и нагружения. Второе множество образуют продолжения, направленные внутрь предельной поверхности. Они соответствуют пассивному упругому процессу разгрузки, при котором изменяется только упругая часть деформации $\overline{Э}^e$, а пластическая $\overline{Э}^p$ остается неизменной. Предельная поверхность деформирования $F(\overline{Э}^p) \equiv 0$ при разгрузке как бы «заморожена».

Однако в этом случае невозможно объяснить состояния полной и неполной пластичности материалов по Хаару и Карману при активном упругопластическом деформировании, а также состояния полной и неполной упругости при сложной разгрузке [8, 12]. В теории процессов концепция предельных поверхностей не используется, но и не отвергается. Предельные поверхности трактуются шире и включены в понятия образов процессов нагружения в Σ_5 и деформирования в $\mathbf{E}_5$, что имеет важное познавательное и методическое значение. Предельным поверхностям в теории процессов ставятся в соответствие диаграммы прослеживания процессов в условиях сложного нагружения.

Вторая гипотеза в теории течения относится к возможности разложения полного вектора напряжений $\overline{\sigma}$ на ортогональный к предельной поверхности нагружения $f(\overline{\sigma}, \overline{Э}^p) = 0$ вектор активных напряжений $\overline{\sigma}^0$ и вектор добавочных микронапряжений $\overline{a}$ [12–14]:

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma}^0 + \overline{a}. \tag{2.3}$$

Вектор $\overline{\sigma}^0$ характеризует изменение размеров и формы предельной поверхности f, а вектор $\overline{a}$ – смещение этой поверхности в векторном девиаторном пространстве Σ_5 напряжений, что позволяет учесть эффект Баушингера. Различные теории течения отличаются лишь формой задания функции нагружения $f(\overline{\sigma}, \overline{Э}^p)$. В простейшем случае вводятся понятия изотропного и трансляционного анизотропного упрочнения. При изотропном упрочнении начальная поверхность нагружения расширяется подобно самой себе. Если принимается критерий пластичности Мизеса и закон единой кривой упрочнения при простом нагружении Роша и Эйхингера, то предельная поверхность в Σ_5 представляет собой гипершар. При сложном нагружении для траектории деформирования малой и средней кривизны радиус поверхности предлагается описывать универсальной функцией упрочнения Одквиста $\sigma^0 = C_p(s^p)$, где s^p – длина дуги траектории пластического деформирования. Иногда этот параметр при сложном нагружении ошибочно называют параметром накопленной пластической деформации, не учитывая, что $s^p > Э^p$.

Для описания трансляционного упрочнения используется известная модель В. Прагера, явно учитывающая эффект Баушингера [13]. Согласно этой модели вектор $\overline{\sigma}$ смещает предельную поверхность поступательно как жесткое целое в направлении вектора $\overline{\sigma}^0$. В действительности оба типа упрочнения взаимосвязаны и благодаря изменению структуры материала вызывают возникновение деформационной анизотропии и явления интерект-эффекта и $Э_2$-эффекта. Обычно для функции нагружения в современной теории течения принимают соотношение

$$2f = \overline{\sigma}^0 \cdot \overline{\sigma}^0 - C_p^2(s^p) = 0, \tag{2.4}$$

из которого следует условие ортогональности В. Прагера для вектора $\overline{\sigma}^0$ к предельной поверхности нагружения [12–15]:

$$\overline{\sigma}^0 = \operatorname{grad} f(\overline{\sigma}, \overline{Э}^p). \tag{2.5}$$

В теории процессов гипотеза (2.5) отвергается и наряду с поступательным перемещением допускается поворот предельной поверхности. В этом случае направление процесса нагружения определяет полный вектор

$$\overline{\sigma} = \operatorname{grad} f(\overline{\sigma}), \tag{2.6}$$

ортогональный к предельной поверхности, причем векторы $\overline{\sigma}^0$, $\overline{a}$ имеют с ним единое направление ($\overline{\sigma} = \overline{\sigma}^0 = \overline{a}$) [8].

Предел текучести материалов σ_T при растяжении определяется, как правило, по допуску $\varepsilon_*^p = 0{,}2\%$ на остаточную деформацию. В девиаторном пространстве ему соответствует допуск $Э_*^p = 0{,}245\%$ при определении условного предела текучести $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$. Эти пределы зависят от многих факторов (температуры, термообработки, скорости деформирования, ползучести и релаксации, изменения структуры и приобретенной деформационной анизотропии и др.) и поэтому могут иметь естественный разброс. При нормальной температуре следует обратить внимание на ограниченную ползучесть и релаксацию и деформационную анизотропию на участке избыточного пластического деформирования диаграмм. В работе [16] приведены результаты систематических экспериментальных исследований эффекта Баушингера для различных конструкционных материалов с учетом знакопеременных нагружений. Эффект Баушингера оценивался отношением γ предела текучести σ_P^T при знакопеременном нагружении после разгрузки к пределу текучести σ_K^T в момент начала разгрузки: $\gamma = \sigma_P^T / \sigma_K^T$. Для стали это отношение было порядка 0,8 после стабилизации при $\varepsilon^p > (2 \div 3)\%$. Однако результаты обработки опытных данных [16] показывают, что для всех материалов в процессе роста s^p концепция предельных поверхностей выполняется и наблюдается монотонный рост функции $\sigma^0 = C_p(s^p)$. Аналогичные результаты при обработке экспериментальных данных получены в [17].

В общей теории течения Мелана–Прагера с учетом постулата пластичности Драккера определяющие соотношения имеют вид [4, 6, 8]:

$$d\bar{Э}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad d\bar{Э}^p = D \operatorname{grad} f(\bar{\sigma}, \bar{Э}^p) df, \qquad df = \operatorname{grad} f \cdot d\bar{\sigma} > 0 \tag{2.7}$$

для активных процессов упругопластического деформирования и вид

$$d\bar{Э}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad d\bar{Э}^p = 0, \quad df = \operatorname{grad} f \cdot d\bar{\sigma} = 0 \tag{2.8}$$

для упругого деформирования и пассивных процессов линейной упругой разгрузки. Если принять (2.4), то для активных процессов имеем

$$d\bar{Э}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad d\bar{Э}^p = ds^p \frac{\bar{\sigma}^0}{\sigma} \tag{2.9}$$

или после преобразования

$$d\bar{Э}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad d\bar{Э}^p = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G}\right)\frac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{k\sigma^2}(\bar{\sigma} - \bar{a}), \tag{2.10}$$

где

$$P = \frac{d\sigma}{ds}\frac{1}{\cos\vartheta_1}, \quad ds^p = g_0 ds, \quad g_0 = \frac{\sigma_0 \cos\vartheta_1}{k\sigma}\left(1 - \frac{P}{2G}\right), \quad k\sigma^2 = \bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}^0. \tag{2.11}$$

Для полных приращений $d\bar{Э}, d\bar{\sigma}$ найдем:

$$\begin{cases} d\bar{Э} = \dfrac{d\bar{\sigma}}{2G} + \left(\dfrac{1}{P} - \dfrac{1}{2G}\right)\dfrac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{k\sigma^2}(\bar{\sigma} - \bar{a}), \\ d\bar{\sigma} = 2G d\bar{Э} + (p - 2G)\dfrac{\bar{\sigma} d\bar{Э}}{k\sigma^2}(\bar{\sigma} - \bar{a}). \end{cases} \tag{2.12}$$

В теории Прагера для квазипростых процессов при изотропном упрочнении $\overline{a} = 0$, $k = 1$, $\overline{\sigma}^0 = \overline{\sigma}$, $P = d\sigma / dЭ$ и определяющие уравнения (2.12) принимают вид гипотезы компланарности (1.20), (1.21). Для нахождения функции P используется опыт на простое растяжение и универсальная функция простого нагружения $\sigma = \Phi(Э)$ Роша и Эйхингера, которая не содержит параметров сложного нагружения и поэтому не может в полной мере характеризовать особенности сложного нагружения с учетом векторных свойств материалов.

В теории Прандтля–Рейсса–Хилла $M_1 = 2G$ и, как отмечалось выше, угол сближения ϑ_1 может быть найден из уравнения (1.22) через параметры сложного нагружения. Однако под влиянием принципа градиентальности принимается скользящий образ процесса для траектории пластического деформирования, т.е. считается $\vartheta_1 \approx 0$. Закон упрочнения Одквиста $\sigma = \Phi(s)$ достаточно близок к $\sigma = \Phi(Э)$, что приводит к тому, что принимается $P = d\Phi(s)/ds \approx d\Phi(Э)/dЭ$. Следовательно, для определения функции P вновь достаточно использовать лишь опыт на простое растяжение без учета параметров сложного нагружения.

В теории Кадашевича–Новожилова для дополнительных напряжений принимается закон

$$\overline{a} = 2g\overline{Э}^p = 2g\left(\overline{Э} - \frac{\overline{\sigma}}{2G}\right), \tag{2.13}$$

где функция $2g$ при идеальном эффекте Баушингера также определяется из опыта на простое растяжение:

$$2g = \frac{a}{Э^p} = \frac{\sigma - \sigma^0}{Э - \sigma/2G},$$

где $\sigma = \Phi(Э)$, $\sigma^0 = \sigma^T = \mathrm{const}$.

При неидеальном эффекте Баушингера необходимо установить закон $\sigma^0 = C_p(s^p)$. Одним из простейших вариантов этого закона может служить функция

$$\sigma^0 = C_p(s^p) = \sigma_*^T + (\sigma^T - \sigma_*^T)e^{-\gamma s^p},$$

где $\sigma^0 = \sigma_*^T$ – значение радиуса предельной поверхности при больших s^p, σ^T – значение при $s^p = 0$.

В теории типа течения [18], названной теорией пластического деформирования, для определения вектора добавочных микронапряжений $\overline{a}$ предложено так называемое «эвристическое» дифференциальное уравнение вида

$$d\overline{a} = gd\overline{Э}^p + ds^p(g_a\overline{a} + g_\varepsilon\overline{Э}^p), \tag{2.14}$$

происхождение которого неизвестно и физическая достоверность которого никак не обоснована. Прямая экспериментальная проверка (2.14) невозможна. Предполагается, что предельная поверхность нагружения может изотропно расширяться ($d\sigma^0 > 0$) и изотропно сужаться ($d\sigma^0 < 0$) при монотонном увеличении параметра s^p прослеживания процесса пластического деформирования, что противоречит основной гипотезе теории пластичности о линейной упругой разгрузке и неизменяемости положения предельной поверхности нагружения, а также результатам исследований [16, 17]. При знакопеременных нагружениях происходит циклическое многократное изменение пластических деформаций и первоначально изотропный материал приобретает определенную деформационную анизотропию вследствие его структурных изменений. При многократном циклическом нагружении реализуется процесс усталостного разупрочнения, отличающийся от такового при однократном или малократном нагружении. Заметное упрочнение либо разупрочнение возможно за счет изменения структуры материала. Этими вопросами занимается теория пластичности при переменных нагружениях [19]. В теории [18] материальные функции g, g_a, g_ε в (2.14) считаются постоянными и вместе с функцией $C_p(s^p)$ определяются из двух простейших опытов на растяжение и растяжение с предварительным сжатием. При этом дополнительно считается, что функция $C_p(s^p)$ в этих опытах для одинаковых значений s^p не изменяется, что выполняется не для всех материалов, так как эта функция определяется только из диаграммы растяжения материала в исходном состоянии. Разность экспериментальных диаграмм при одинаковых значениях s^p позволяет в [18] получить зависимость, из которой находятся упомянутые выше материальные постоянные g, g_a, g_ε. Ясно, что такая методика весьма ограниченна. Функции не содержат параметров сложного нагружения и деформирования κ_m. Безусловно, циклические нагружения относятся к классу сложных нагружений растяжения-сжатия с изломом циклов на 180°. Однако этого далеко не достаточно для построения общей теории течения или деформирования при произвольном сложном нагружении, ее физического обоснования и достоверности.

В работах автора [20, 21] предложена обобщенная теория течения, названная модифицированной. В этой теории используется только гипотеза о разложении полных деформаций (2.2). Используя эту гипотезу, из нелокальной формы определяющего соотношения (1.17) следует уравнение

$$bd\overline{\sigma} = N_1 d\overline{Э}^p + ds(N^*\overline{\sigma} + N_Э^*\overline{Э}^p), \quad d\overline{Э}^e = \frac{d\overline{\sigma}}{2G}, \tag{2.15}$$

где

$$N^* = N_\sigma^* + \frac{N_Э^*}{2G}, \quad b = 1 - \frac{N_1}{2G} > 0. \tag{2.16}$$

В классической теории течения $N_1 = 2G$ и из (2.15) следует

$$d\overline{Э}^e = \frac{d\overline{\sigma}}{2G}, \quad d\overline{Э}^p = -\frac{ds}{2G}[N^*\overline{\sigma} + N_Э^*\overline{Э}^p]. \tag{2.17}$$

В современной теории процессов и модифицированной теории течения принята гипотеза об ортогональности полного вектора напряжений $\overline{\sigma}$ к предельной поверхности нагружения (2.6) вместо гипотезы Прагера (2.5). Из (2.17) получаем принцип градиентальности в модифицированной теории течения:

$$d\overline{Э}^* = d\overline{Э}^p + \frac{ds}{2G} N_Э^* \overline{Э}^p = D \operatorname{grad} f(\overline{\sigma}), \tag{2.18}$$

который отличен от принципа градиентальности Драккера: ортогональным к предельной поверхности нагружения является не вектор $d\overline{Э}^p$, а некоторый вектор $d\overline{Э}^*$, коллинеарный $\overline{\sigma}$.

На практике условный предел текучести $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$ (σ_T – предел текучести при растяжении) определяется по допуску на остаточную избыточную пластическую деформацию $Э_*^p = 0{,}245\%$ ($\varepsilon_*^p = 0{,}2\%$). В этом случае начальная точка пластичности оказывается на искривленном участке диаграммы и $N_1 = N_1^* < 2G$, $b > 0$. Соотношение (2.15) модифицированной теории течения преобразуется к виду

$$d\overline{\sigma} = g_1 d\overline{Э}^p + ds(g_\sigma \overline{\sigma} + g_Э \overline{Э}^p), \quad d\overline{\sigma} = 2Gd\overline{Э}^e, \tag{2.19}$$

где $g_1 = N_1 / b$, $g_\sigma = N^* / b$, $g_Э = N_Э^* / b$. Упругая разгрузка и догрузка после начальной точки текучести считаются линейными.

Дифференциальные уравнения (2.19) представляют собой определяющие соотношения модифицированной (обобщенной) теории течения [8, 19, 20]. Из (2.19) следует «эвристическое» уравнение (2.14), в котором коэффициенты g, g_a, g_ε можно просто выразить через g_1, g_a, g_ε в (2.19) либо наоборот. Для определения $d\overline{Э}^p$ из (2.5), (2.9) имеем:

$$d\overline{Э}^p = \frac{ds^p}{C_p(s^p)} \overline{\sigma}^0, \quad \overline{\sigma}^0 = \overline{\sigma} - \overline{a}. \tag{2.20}$$

Таким образом, теория, названная в [18] теорией пластического деформирования, и теории, подобные ей, являются частным вариантом модифицированной теории течения [8, 20, 21]. Эта теория не содержит функционалов либо материальных функций, зависящих от параметров сложного деформирования или нагружения. Поэтому она не может в полной мере характеризовать особенности процессов сложного упругопластического деформирования и нагружения, а также установить пределы ее применимости. Тем более она не может быть отнесена к современной теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина [1–12], в которой диапазон влияния параметров сложного процесса деформирования установлен.

Литература

1. *Ильюшин, А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
2. *Ильюшин, А.А.* Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин. – М.: МГУ, 1990. – 310 с.
3. *Ильюшин, А.А.* Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность / А.А. Ильюшин. – М.: Физматлит, 2004. – 479 с.
4. *Зубчанинов, В.Г.* Математическая теория пластичности / В.Г. Зубчанинов. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.
5. *Зубчанинов, В.Г.* Устойчивость и пластичность. Т. 1. Устойчивость / В.Г. Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2007. – 447 с.
6. *Зубчанинов, В.Г.* Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность / В.Г. Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2008. – 336 с.
7. *Зубчанинов, В.Г.* Устойчивость и пластичность. Т. 3. Доклады / В.Г. Зубчанинов. – Тверь: ТГТУ, 2006. – 400 с.
8. *Зубчанинов, В.Г.* Механика процессов пластических сред / В.Г. Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.
9. *Зубчанинов, В.Г.* Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред / В.Г. Зубчанинов // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – №1. – С. 27–37.
10. *Зубчанинов, В.Г.* Гипотеза ортогональности и принцип градиентальности в теории пластичности / В.Г. Зубчанинов // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – №5. – С. 68–73.
11. *Зубчанинов, В.Г.* Теория процессов и постулат изотропии / В.Г. Зубчанинов // Упругость и неупругость: Сб. статей. – М.: МГУ, 2011. – С. 73–79.
12. *Зубчанинов, В.Г.* Теория процессов, полная и неполная пластичность сплошных сред и постулат изотропии / В.Г. Зубчанинов // Вестник ЧГПУ. Сер. Механика предельного

состояния. – Чебоксары: ЧГПУ, 2011. – №1 (9). – С. 38–60.
13. *Поль, Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения / Б. Поль // Разрушение. Т. 2. – М.: Мир, 1975. – С. 336–520.
14. *Новожилов, В.В.* Вопросы механики сплошной среды / В.В. Новожилов. – Л.: Судостроение, 1989. – 397 с.
15. *Кадашевич, Ю.И.* Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // ПММ. – 1958. – Т. 22. – Вып. 1. – С. 78–89.
16. *Талыпов, Г.Б.* Пластичность и прочность стали при сложном нагружении / Г.Б. Талыпов. – Л.: ЛГУ, 1968. – 134 с.
17. *Арутюнян, Р.А.* Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов / Р.А. Арутюнян. – СПб: СПбГУ, 2004. – 252 с.
18. *Бондарь, В.С.* Неупругость. Варианты теории / В.С. Бондарь. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.
19. *Москвитин, В.В.* Пластичность при переменных нагружениях / В.В. Москвитин. – М.: МГУ, 1965. – 264 с.
20. *Зубчанинов, В.Г.* Модифицированная теория течения и математические модели процессов пластического деформирования / В.Г. Зубчанинов // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегородский ун-т. – 2009. – Вып. 71. – С. 5–19.
21. *Зубчанинов, В.Г.* Модифицированная теория течения / В.Г. Зубчанинов // Вестник ЧГПУ. Сер. Механика предельного состояния. – Чебоксары: ЧГПУ, 2009. – №1 (6). – С. 81–97.

[01.12.2011]

ON RELATIONS BETWEEN STRESSES AND STRAINS IN THE THEORY OF PLASTICITY UNDER COMPLEX LOADING

V.G. Zubchaninov

The relations between stresses and small strains in the theory of processes and the theory of yield under complex loading are discussed.

Keywords: plasticity, elasticity, process, yield, complex loading, residual strains, isotropy postulate.