

УДК 539.3

**ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ВЛИЯНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОНИЦАЕМОСТИ
НА ДИНАМИЧЕСКИЙ ОТКЛИК
В СОСТАВНОМ ПОРОУПРУГОМ ТЕЛЕ^{*)}**

Л.А. Игумнов, И.С. Карелин, А.Н. Петров

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

На основе гранично-элементного подхода исследуется вопрос распространения волн в трехмерном составном пороупругом теле. Анализируется влияние коэффициента проницаемости материала на динамический отклик. Рассматривается модель материала Био с четырьмя неизвестными базовыми функциями.

Ключевые слова: динамическая пороупругость, трехмерные задачи, составные тела, граничный элемент.

Введение

Исследование волновых процессов в пороупругих телах и средах представляет значительный интерес. Модели соответствующих сред существенно усложнены по сравнению с однородной упругой или вязкоупругой моделью. Теория Био [1, 2] является расширением классической теории упругости на случай двухфазной среды с учетом ввода дополнительных параметров, учитывающих взаимодействие фаз. Теория не только качественно, но и количественно правильно предсказывает скорости, амплитуды и частотную зависимость затухания всех трех типов волн в различных насыщенных пористых средах. Наиболее важные волновые эффекты, найденные в рамках теории Био, согласуются с экспериментальными данными.

Рассматривается модель Био для четырех неизвестных базовых функций (перемещения упругого скелета и поровое давление). Ранее в [3] были построены граничные интегральные уравнения динамики однородного пороупругого тела. В настоящей работе рассматривается случай составного пороупругого тела.

1. Математическая модель и метод численного обращения преобразования Лапласа

Система дифференциальных уравнений в преобразованиях Лапласа (параметр s) для однородного пороупругого тела Ω_k через смещения \hat{u}_i^k и поровое давление \hat{p}^k имеет следующий вид:

^{*)} Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4807.2010.8) и при поддержке РФФИ (проект №10-08-01017-а).

$$G\hat{u}_{i,j}^k + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\hat{u}_{j,ij}^k - (\alpha - \beta)\hat{p}_i^k - s^2(\rho - \beta\rho_f)\hat{u}_i^k = -\hat{F}_i^k,$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f}\hat{p}_{,ii}^k - \frac{\phi^2 s}{R}\hat{p}^k - (\alpha - \beta)s\hat{u}_{i,i}^k = -\hat{a}^k, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad k = \overline{1, M},$$

$$\beta = \frac{k\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 k(\rho_a + \phi\rho_f)},$$

где G, K – константы упругости; ϕ – пористость; k – проницаемость; α – эффективный коэффициент напряжений; ρ, ρ_a, ρ_f – плотности пористого скелета, присоединенной массы и жидкой среды; \hat{F}_i^k, \hat{a}^k – плотности источников; M – количество однородных подобластей.

Будем рассматривать следующие типы граничных условий для Ω_k :

$$\hat{u}_l^k(x, s) = f_l^k(x, s), \quad l = \overline{1, 3}, \quad \hat{u}_4^k(x, s) = \hat{p}^k(x, s), \quad x \in S^u \cap S_k,$$

$$\hat{t}_l^k(x, s) = g_l^k(x, s), \quad l = \overline{1, 3}, \quad \hat{t}_4^k(x, s) = \hat{q}^k(x, s), \quad x \in S^\sigma \cap S_k,$$

$$\hat{u}_l^k(x, s) = \hat{u}_l^s(x, s), \quad \hat{t}_l^k(x, s) = -\hat{t}_l^s(x, s), \quad x \in S_{ks}.$$

Здесь S^u и S^σ – части границы S тела Ω_k , по которым заданы соответственно перемещения и поверхностные силы; S_{ks} – граница жесткого контакта частей Ω_k и Ω_s ; $f_l^k(x, s)$ и $g_l^k(x, s)$ – заданные функции.

Одним из базовых инструментов, используемых в решении сформулированных систем дифференциальных уравнений, является интегральное преобразование Лапласа и численное обращение преобразования Лапласа.

Пусть $f(t)$ – функция по $t, f(t) = 0$ для $t < 0$. Функция преобразования по Лапласу и ее обращение определено следующим образом:

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \bar{f}(s)e^{st} ds, \quad s = \alpha + i\omega.$$

Для численного обращения использован алгоритм, предложенный Дурбином:

$$F_k = \operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega_k)], \quad G_k = \operatorname{Im}[\bar{f}(\alpha + i\omega_k)], \quad \Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k,$$

$$f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F_k + F_{k+1})\Delta_k}{2\pi},$$

$$f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{\pi t^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{F_{k+1} - F_k}{\Delta_k} (\cos(\omega_{k+1}t) - \cos(\omega_k t)) - \frac{G_{k+1} - G_k}{\Delta_k} (\sin(\omega_{k+1}t) - \sin(\omega_k t)) \right].$$

2. Гранично-элементная дискретизация

Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассмотрим регуляризованные уравнения для каждой однородной области Ω_k без объемных сил и начальных деформаций:

$$\alpha_{\Omega} v_j^k(x, s) + \int_{\partial\Omega} \{T_{ij}^k(x, y, s)[v_i^k(y, s) - v_i^k(x, s)] - U_{ij}^k(x, y, s)t_i^k(y, s)\} dS_x = 0$$

$$(x \in \partial\Omega_k),$$

$$v^k(y) = (u_1^k(y), u_2^k(y), u_3^k(y), p^k(y)), \quad t^k(y) = (p_1^k(y), p_2^k(y), p_3^k(y), q^k(y)),$$

где $x \in \partial\Omega_k$ называется точкой наблюдения или коллокационной точкой. Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности $\partial\Omega_k$ на N_E граничных элементов E_e ($1 \leq e \leq N_E$) совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы, каждый из которых отображается на некий контрольный элемент Δ_e (каждый Δ_e – это либо квадрат $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$, либо треугольник $0 \leq \xi_1 + \xi_2 \leq 1$, $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$). Элемент E_e отображается на элемент Δ_e с помощью уравнения:

$$y_i(\xi) = \sum_{l=1}^8 N^l(\xi) y_i^{\beta(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \xi \in \Delta_e,$$

где $\beta(k, l)$ – глобальный номер узла, имеющего в k -м элементе локальный номер l ; $N^l(\xi)$ – функции формы. В качестве функций формы выбраны квадратичные полиномы интерполяции.

Естественный базис, метрический тензор и единичная нормаль на E_e получают традиционные для метода граничных элементов [4].

Неизвестные граничные поля (v^k, t^k) интегрируются через узловые значения в интерполяционных узлах. Рассмотрим случай согласованной интерполяции, когда для аппроксимации граничных перемещений применим билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил – постоянные элементы [4]. При этом для расчетного значения параметра s будем иметь следующие выражения обобщенных граничных перемещений и поверхностных сил внутри элемента S_k :

$$v_i(y) = \sum_{l=1}^4 R^l(\xi) v_i^{\chi(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad y \in S_k,$$

$$t_i(y) = t_i^{\chi(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad y \in S_k,$$

где $R^l(\xi)$ – функции формы для линейного четырехугольного элемента.

Для получения дискретного аналога ГИУ для подобласти применим метод коллокации. В качестве узлов коллокации y^m будем выбирать узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируются системы линейных алгебраических уравнений для каждой подконструкции:

$$\frac{1 - \alpha_{\Omega}}{2} v_i^{n,m} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{n,m,k,l} v_j^{n,\chi(k,l)} = \sum_{k=1}^N B_{ij}^{n,m,k} t_j^k, \quad (1)$$

$$\frac{1 - \alpha_{\Omega}}{8} v_i^{n,m} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{n,m,k,l} v_j^{n,\chi(k,l)} = \sum_{k=1}^N B_{ij}^{n,m,k} t_j^k, \quad (2)$$

где $\chi(k, l) = m$ – глобальный номер узла некоторой подконструкции, находящейся с рассматриваемой подконструкцией в контакте по k -му элементу; k – номер эле-

мента сопряженной подконструкции, где задан контакт; N – число элементов границы.

Уравнение (1) записано в узлах аппроксимации обобщенных перемещений, уравнение (2) записано в узлах аппроксимации обобщенных усилий:

$$A_{ij}^{k,m,n,l} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [R^l(\xi) T_{ij}^k(x^m, y^n(\xi), p) - \delta_{\chi(k,l),m} T_{ij}^k(x^m, y^n(\xi))] J^n(\xi) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$B_{ij}^{k,m,n} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^k(x^m, y^n(\xi), p) J_n(\xi) d\xi_1 d\xi_2.$$

Особенности подынтегральных выражений коэффициентов дискретных аналогов пороупругости существенно отличаются от упругого случая [5], что определяет специфику методики численного поэлементного интегрирования.

С помощью соответствующих перестановок столбцов между матрицами можно отделить известные (записываемые в правой части) от неизвестных (в левой части), тогда систему линейных алгебраических уравнений запишем в виде:

$$[K]\{X\} = \{Y\},$$

где $\{X\}$ – N -«вектор», объединяющий все скалярные компоненты $\{u\}$, $\{t\}$, $\{p\}$ и $\{v\}$, остающиеся неизвестными. На практике реального построения матриц $[A]$, $[B]$ и т.д. избегают, а в процессе сборки непосредственно получают $[X]$ и $\{Y\}$.

Матрица $[K]$ для однородной задачи полностью заполненная и несимметричная. Элементы матрицы оцениваются с помощью схем численного интегрирования, выбираемых в зависимости от того, каким является интеграл – несингулярным или сингулярным. Несингулярные интегралы получаются, когда коллокационная точка не принадлежит элементу. Здесь применяются стандартные квадратуры, обычно гауссовского типа. Интегрирование по элементу сведено к повторному интегрированию по локальным координатам ξ_1 и ξ_2 . Для каждой из координат будем использовать квадратурные формулы Гаусса. По переменным ξ_1 и ξ_2 берется одинаковое число точек интегрирования. Количество используемых точек Гаусса варьируется в зависимости от расстояния между u и E_e (относительно характерной длины элемента).

Сингулярные интегралы возникают, когда точка x^m принадлежит элементу, по которому производится интегрирование. Из регуляризованного интегрального уравнения получают уравнения МГЭ, сингулярные интегралы на соответствующем элементе дают сходимость. Однако для их точной численной оценки требуется преобразование в несингулярные интегралы. В случае согласованной аппроксимации точка x^m расположена либо в угловом узле, либо в центре элемента. Для устранения особенности подынтегральных выражений использовано преобразование [1].

Построенная ГЭ-схема позволяет создать программное обеспечение и организовать численный расчет трехмерной задачи.

3. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим задачу о действии силы на торец составного призматического пороупругого тела, состоящего из двух тождественных частей (рис. 1), решение этой задачи соответствует аналитическому решению задачи, изображенной на рис. 2.

Параметры материала для полной модели Био следующие: $K = 8 \cdot 10^9$ Н/м²,

$G = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $R = 4,7 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $k = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/\text{Н}\cdot\text{с}$; $\rho = 2458 \text{ кг/м}^3$, $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\phi = 0,19$, $\alpha = 0,867$. На торец ($x_2 = 3 \text{ м}$) действует хевисайдова сила $t_2 = 1 \text{ Н/м}^2$. ГЭ-сетка каждой из подобластей состоит из 506 точек и 504 элементов.

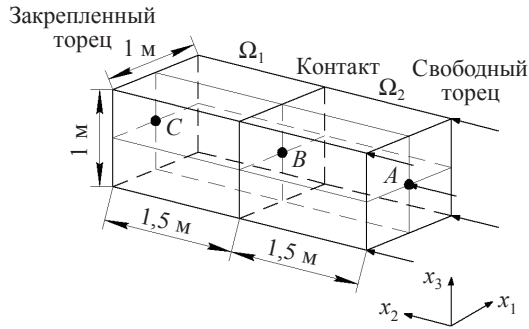


Рис. 1

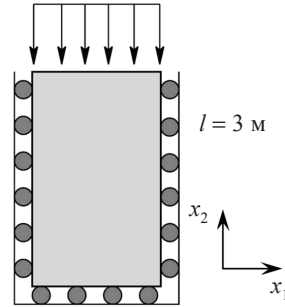


Рис. 2

На рис. 3 представлены перемещения в точках A ($x_2 = 3 \text{ м}$) и B ($x_2 = 1,5 \text{ м}$), на рис. 4 – соответственно давления в точках B ($x_2 = 1,5 \text{ м}$) и C ($x_2 = 0 \text{ м}$).

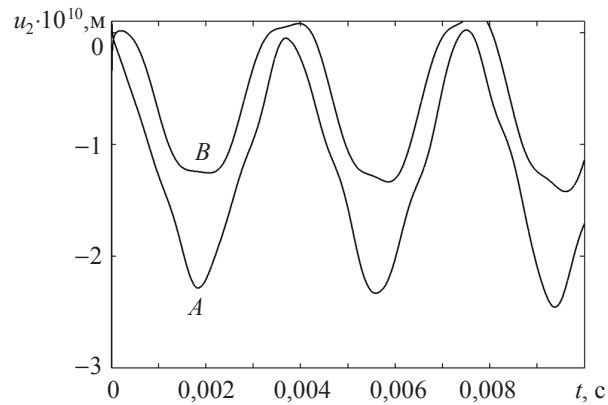


Рис. 3

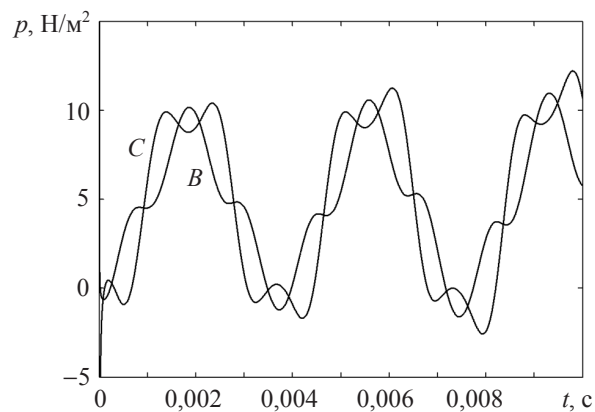


Рис. 4

На рис. 5–8 представлено исследование влияния изменения параметра проницаемости подобласти Ω_2 на отклик перемещений и давлений. На рис. 5 представле-

но перемещение в точке A , цифрами на рисунке обозначены значения параметра проницаемости: 1 – соответственно для $k = 1,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4/\text{Н}\cdot\text{с}$, 2 – $k = 2,9 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4/\text{Н}\cdot\text{с}$, 3 – $k = 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ м}^4/\text{Н}\cdot\text{с}$. На рис. 6 представлены перемещения в точке B , на рис. 7 – давления в точке B , на рис. 8 – давления в точке C .

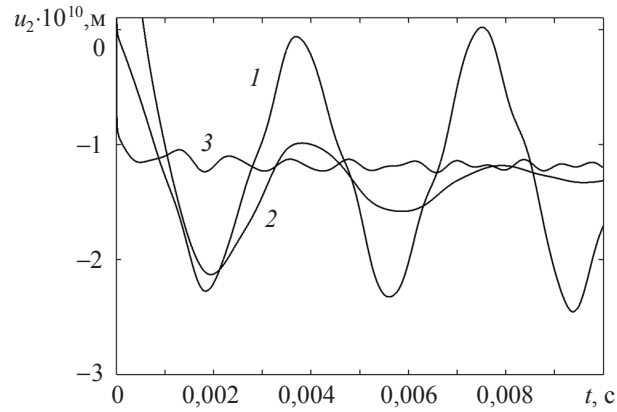


Рис. 5

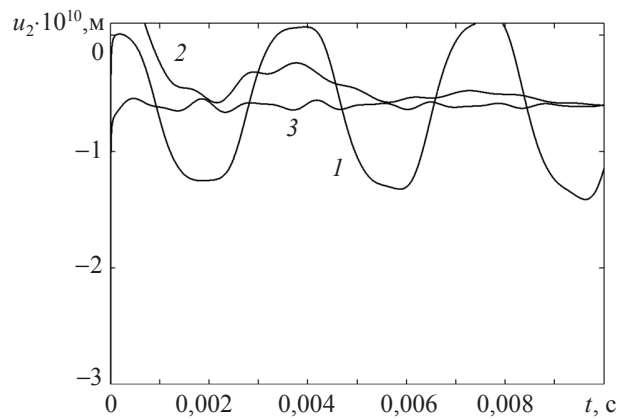


Рис. 6

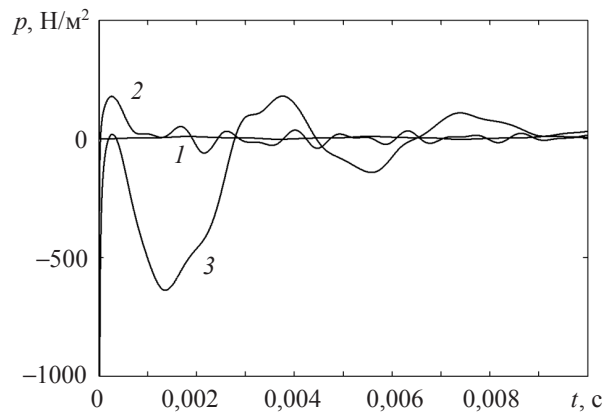


Рис. 7

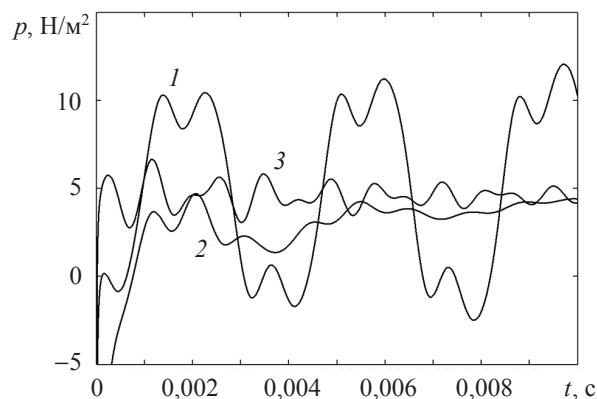


Рис. 8

Литература

1. Biot, M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, No 2. – P. 168–178.
2. Biot, M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, No 2. – P. 179–191.
3. Аменицкий, А.В. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости / А.А. Аменицкий [и др.] // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2009, вып. 71. – С. 164–171.
4. Баженов, В.Г. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.
5. Белов, А.А. Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости / А.А. Белов [и др.] // Труды МАИ: Электрон. журнал. – 2010. – Вып. 40. – С. 1–20.

[26.10.2011]

THE BOUNDARY ELEMENT STUDY OF THE INFLUENCE OF THE PERMEABILITY COEFFICIENT ON THE DYNAMIC RESPONSE IN A COMPOUND POROELASTIC BODY

L.A. Igumnov, I.S. Karelin, A.N. Petrov

The Biot's model of the porous medium with two-phase internal structure is considered. The corresponding boundary integral equations and boundary element solution procedure are presented. Durbin's method with non-uniform piecewise linear approximation of the image is applied. The numerical results for the dynamic state of the compound finite poroelastic bodies on the basis of BE-method are given. The advantages of BE-method for the solution of the boundary value dynamic poroelasticity problem are performed for a model problem. The influence of permeability coefficient on the displacements and pressure values is shown.

Keywords: dynamic poroelasticity, 3D problems, compound bodies, boundary integral equations.