

УДК 539.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ГРИНА И НЕЙМАНА ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ^{*)}

Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук, В.П. Пазин

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Рассмотрена система уравнений анизотропной теории магнитоэлектродупругости. Построены матрицы Грина и Неймана. Применены два способа построения матриц Грина и Неймана. Приведен численный пример. Представлена визуализация матриц Грина и Неймана в виде поверхностей.

Ключевые слова: матрицы Грина и Неймана, анизотропная магнитоэлектродупругость, трехмерная постановка, численное моделирование.

Введение

Функции Грина используются для нахождения решений многих прикладных задач при исследовании трещин, дефектов, включений и т.д. Большое внимание уделено применению функций Грина в исследованиях анизотропных и пьезоэлектрических материалов с электромеханической связью [1–15].

Широкий класс кристаллов [16] и ряд композитных материалов [17, 18], обладающих одновременно пьезоэлектрическими, пьезомагнетическими и магнитоэлектрическими эффектами, классифицируются как магнитоэлектродупругие среды. Основываясь на расширенном формализме, Рап [19] получил трехмерные функции Грина для анизотропных бесконечных, двухфазных и полубесконечных магнитоэлектродупругих сред. Среди работ авторов, занимавшихся функциями Грина для магнитоэлектродупругих сред, отметим [20–23].

1. Постановка задач

Базовые уравнения трехмерной анизотропной теории упругости имеют вид [24]:

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijlm} \varepsilon_{lm}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j, l, m = \overline{1,3}, \quad (1)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжения, F_i – компоненты плотностей объемной силы, ε_{ij} – компоненты тензора деформации, C_{ijlm} – упругие модули, u_i – упругое смещение; повторение индексов (здесь и в дальнейшем) означает суммирование, запятая – частное дифференцирование.

^{*)} Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4807.2010.8), при поддержке РФФИ (проект №10-08-01017-а).

Базовые уравнения трехмерной линейной теории магнитоэластоупругости записываются в виде [17, 18]:

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0, \quad D_{i,i} - Q = 0, \quad B_{i,i} - M = 0, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijlm} \varepsilon_{lm} - e_{kij} E_k - q_{kij} H_k, \quad D_i = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \tilde{\varepsilon}_{ij} E_j + \lambda_{ij} H_j, \quad (3)$$

$$B_i = q_{ijk} \varepsilon_{jk} + \lambda_{ij} E_j + \mu_{ij} H_j, \quad i, j, k, l, m = \overline{1,3}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad H_i = -\vartheta_{,i} \quad i, j = \overline{1,3}, \quad (5)$$

где σ_{ij} , D_i , B_i – соответственно компоненты тензора напряжения, вектора электрического смещения и магнитной индукции; F_i , Q , M – компоненты плотностей объемной силы, плотности электрического заряда и плотности электрического тока; E_j – компоненты вектора электрического поля, H_j – компоненты вектора магнитного поля; C_{ijlm} , e_{ijk} , $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, μ_{ij} , q_{ijk} , λ_{ij} – упругие модули, электроупругие коэффициенты, диэлектрические константы, модули магнитной проводимости, пьезомагнитные и магнитоэлектрические коэффициенты; u_i , ϕ и ϑ – упругое смещение, электрический и магнитный потенциалы.

Обозначим базовые компоненты для (2)–(5) следующим образом [19]:

$$\hat{u}_i = \begin{cases} u_i, & i = 1, 2, 3, \\ \phi, & i = 4, \\ \vartheta, & i = 5, \end{cases} \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ij}, & i = 1, 2, 3, \\ -E_j, & i = 4, \\ -H_j, & i = 5, \end{cases}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & j = 1, 2, 3, \\ D_i, & j = 4, \\ B_i, & j = 5, \end{cases} \quad \hat{C}_{ijkl} = \begin{cases} C_{ijkl}, & j, k = 1, 2, 3, \\ e_{lij}, & j = 1, 2, 3, k = 4, \\ e_{ikl}, & j = 4, k = 1, 2, 3, \\ q_{lij}, & j = 1, 2, 3, k = 5, \\ q_{ikl}, & j = 5, k = 1, 2, 3, \\ -\lambda_{il}, & j = 4, k = 5; \quad j = 5, k = 4, \\ -\varepsilon_{il}, & j, k = 4, \\ -\mu_{il}, & j, k = 5. \end{cases}$$

Тогда физические уравнения и уравнения равновесия систем (2)–(5) запишутся в форме (1):

$$\hat{\sigma}_{ij} = \hat{C}_{ijkl} \hat{\varepsilon}_{kl}, \quad \hat{\sigma}_{ij,i} + \hat{F}_j = 0,$$

где

$$\hat{F}_j = \begin{cases} F_j, & j = 1, 2, 3, \\ -Q, & j = 4, \\ -M, & j = 5. \end{cases}$$

Следовательно, для систем (2)–(5) можно применить подходы к построению матриц Грина и Неймана, разработанные для (1) [25].

2. Получение формул представления матриц Грина и матриц Неймана

Система уравнений (2)–(5) позволяет построить дифференциальное уравнение:

$$\hat{C}_{ijkl} G_{km,li}(x) = -\delta_{jm} \delta(x), \quad i, l = \overline{1,3}, \quad j, k, m = \overline{1,5}, \quad (6)$$

где δ_{jm} – дельта Кронекера, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, G_{km} – компоненты матрицы Грина.

Рассмотрим интегральный метод. Матрица G_{jk} с использованием обратного преобразования Радона может быть записана в виде [26]:

$$G_{jk} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} (\mathcal{M}_{jk}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(z_i r_i) ds(z_i) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{S^2} (\mathcal{M}_{jk}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(z_i r_i^0) ds(z_i),$$

$$r_i^0 = \frac{r_i}{r}, \quad \delta(z_i r_i) = \delta(r z_i r_i^0) = \frac{1}{r} \delta(z_i r_i^0), \quad \mathcal{M}_{jk}^{zz} = \hat{C}_{ijkl} z_i z_l.$$

Интеграл по сфере $S^2: z_i z_i = 1$ преобразуется к интегралу по окружности:

$$G_{jk} = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} (\mathcal{M}_{jk}^{kk}(z_i(\phi)))^{-1} d\phi. \quad (7)$$

Единичная окружность является пересечением единичной сферы с плоскостью $z_i r_i^0 = 0$ (рис. 1).

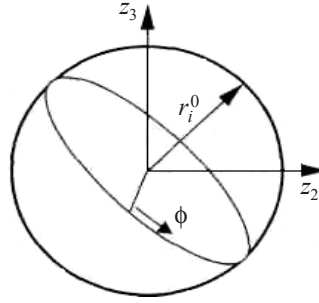


Рис. 1

Матрица Неймана – первая производная матрицы Грина – имеет вид [26]:

$$G_{jk,s} = \frac{1}{8\pi^2 r^2} \int_0^{2\pi} (-r_s^0 (\mathcal{M}_{jk}^{kk})^{-1} - z_s F_{jk}) d\phi, \quad (8)$$

$$D_{nq} = \mathcal{M}_{nq}^{r^0 z} + \mathcal{M}_{nq}^{z r^0}, \quad F_{jk} = (\mathcal{M}_{in}^{zz})^{-1} D_{nq} (\mathcal{M}_{qk}^{zz})^{-1},$$

$$\mathcal{M}_{ik}^{z r^0} = C_{ijkl} z_j r_l^0, \quad \mathcal{M}_{ik}^{r^0 z} = C_{ijkl} r_j^0 z_l.$$

Продемонстрируем второй метод. Построим обратную матрицу $(\mathcal{M}^{zz}(z))^{-1}$, используя матрицу алгебраических дополнений $A_{jk}(z)$ и определитель $D(z)$, тогда матрица Грина примет вид [19]:

$$G_{jk} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \frac{A_{jk}(z_i)}{D(z_i)} \delta(z_i r_i) dS(z_i) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{jk}(p + \zeta q)}{D(p + \zeta q)} d\zeta. \quad (9)$$

Применение теории вычетов позволяет интеграл (8) записать в следующем виде:

$$G_{jk}(x) = -\frac{\text{Im}}{2\pi r} \sum_{m=1}^5 \frac{A_{jk}(p + \zeta_m q)}{a_{11}(\zeta_m - \zeta_m^*) \prod_{k=1, k \neq m}^5 (\zeta_m - \zeta_k)(\zeta_m - \zeta_k^*)}, \quad (10)$$

где ζ_m – корни $D(p + \zeta q) = 0$ – многочлена десятой степени относительно ζ ; a_{11} – коэффициент при ζ^{10} ; $\text{Im} \zeta_m > 0$, $m = \overline{1, 5}$; ζ_m^* – сопряженные к корням ζ_m .

Итак, в отличие от интегрального подхода (7), второй способ дает явную формулу (10), которая гарантирует эффективность использования $G(x)$ и точность получаемых результатов. Отметим, что при построении (10) все полюсы предполагались простыми. В случае кратных полюсов небольшие изменения в константах позволяют свести задачу к простым полюсам с незначительными ошибками в вычислениях расширенной матрицы Грина [27]. При вычислении важно, что матрица M_{jk}^{zz} симметрична, как и ее алгебраическое дополнение A_{jk} , а значит, расширенная матрица Грина симметрична и необходимо вычислить лишь 15 элементов из 25.

Производные матрицы Грина могут быть вычислены на основе интерполяции Лагранжа [25]. Выбор интервала h имеет решающее значение. В настоящем исследовании значения этого интервала взяты $h = r \cdot 10^{-3}$, $h = r \cdot 10^{-2}$, где r – расстояние между произвольной и исходной точками.

3. Численные эксперименты

Для удобства тензор упругих модулей C_{ijkl} запишем через константы $c_{\alpha\beta}$ ($\alpha = \overline{1, 6}$; $\beta = \overline{1, 6}$) [28].

Пьезомагнитные коэффициенты q_{kij} могут быть записаны с двумя индексами q_{kp} ($k = \overline{1, 3}$; $p = \overline{1, 6}$) следующим образом:

$$q_{k1} = q_{k11}; \quad q_{k2} = q_{k22}; \quad q_{k3} = q_{k33}; \quad q_{k4} = q_{k23} = q_{k32}; \\ q_{k5} = q_{k13} = q_{k31}; \quad q_{k6} = q_{k12} = q_{k21}.$$

В качестве примера рассмотрим магнитоэлектроупругий материал BaTiO_3 [17]. Отличные от нуля упругие константы $c_{\alpha\beta}$ даны с точностью до множителя в 10^9 Н/м^2 и приведены в таблице 1, пьезоэлектрические коэффициенты e_{kp} – Кл/м^2 приведены в таблице 2, диэлектрические постоянные $\tilde{\epsilon}_{ij}$ – $10^{-9} \text{ Кл/(В}\cdot\text{м)}$ – в таблице 3, пьезомагнитные коэффициенты q_{kp} – $\text{Н/(А}\cdot\text{м)}$ – в таблице 4, модули магнитной проводимости μ_{ij} – $10^{-6} \text{ Н}\cdot\text{с}^2/\text{Ф}^2$ – в таблице 5. Магнитоэлектрические коэффициенты λ_{ij} – $\text{Н}\cdot\text{с/(В}\cdot\text{Ф)}$ равны нулю для всех $i, j = \overline{1, 3}$.

Таблица 1

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{22}	c_{23}	c_{33}	c_{44}	c_{55}	c_{66}
166,0	77,0	78,0	166,0	78,0	162,0	43,0	43,0	44,5

Таблица 2

e_{15}	e_{24}	e_{31}	e_{32}	e_{33}
11,6	11,6	-4,4	-4,4	18,6

Таблица 3

$\tilde{\epsilon}_{11}$	$\tilde{\epsilon}_{22}$	$\tilde{\epsilon}_{33}$
11,2	11,2	12,6

Таблица 4

q_{15}	q_{24}	q_{31}	q_{32}	q_{33}
550,0	550,0	580,3	580,3	699,7

Таблица 5

μ_{11}	μ_{22}	μ_{33}
5,0	5,0	10,0

Для точки $x = (1, 1, 1)$ компоненты магнитоэластичной матрицы Грина представлены в таблице 6 для интегрального метода в сравнении с формулой на основе полинома.

Таблица 6

Значения индексов компонент p, k	Интегральный метод, м	Формула на основе полинома
1,1	$7,714215538 \cdot 10^{-13}$	$7,714389635 \cdot 10^{-13}$
1,2; 2,1	$1,202690309 \cdot 10^{-13}$	$1,202687889 \cdot 10^{-13}$
1,3; 3,1	$1,294636801 \cdot 10^{-13}$	$1,294626181 \cdot 10^{-13}$
1,4; 4,1	$1,034752139 \cdot 10^{-3}$	$1,034750467 \cdot 10^{-3}$
1,5; 5,1	$-4,266314625 \cdot 10^{-6}$	$-4,266852604 \cdot 10^{-6}$
2,2	$7,714048991 \cdot 10^{-13}$	$7,714048991 \cdot 10^{-13}$
2,3; 3,2	$1,294614670 \cdot 10^{-13}$	$1,294676917 \cdot 10^{-13}$
2,4; 4,2	$1,034734450 \cdot 10^{-4}$	$1,034791046 \cdot 10^{-4}$
2,5; 5,2	$-4,266241639 \cdot 10^{-6}$	$-4,267020888 \cdot 10^{-6}$
3,3	$4,847872021 \cdot 10^{-13}$	$4,847808452 \cdot 10^{-13}$
3,4; 4,3	$5,007545247 \cdot 10^{-4}$	$5,007530930 \cdot 10^{-4}$
3,5; 5,3	$2,419569993 \cdot 10^{-5}$	$2,419607424 \cdot 10^{-5}$
4,4	$-3,404174605 \cdot 10^6$	$-3,404264448 \cdot 10^6$
4,5; 5,4	$2,974912499 \cdot 10^4$	$2,944956912 \cdot 10^4$
5,5	$-4,191966210 \cdot 10^3$	$-4,191996338 \cdot 10^3$

Для точки $x = (1, 1, 1)$ компоненты магнитоэластичных матриц Неймана $G_{pk,1}$, $G_{pk,2}$, $G_{pk,3}$ представлены в таблицах 7–9 для интегрального метода в сравнении с конечно-разностными аналогами ($h = r \cdot 10^{-3}$, $h = r \cdot 10^{-2}$).

Таблица 7

Значения индексов компонент p, k	Интегральный метод, м	Формула на основе полинома $h = r \cdot 10^{-3}$, м	Формула на основе полинома $h = r \cdot 10^{-2}$, м
1	2	3	4
1,1	$-9,8619624 \cdot 10^{-14}$	$-9,7185368 \cdot 10^{-14}$	$-1,0181226 \cdot 10^{-13}$
1,2; 2,1	$4,9196556 \cdot 10^{-15}$	$4,8202192 \cdot 10^{-15}$	$5,2111568 \cdot 10^{-15}$
1,3; 3,1	$3,8690715 \cdot 10^{-15}$	$4,0672418 \cdot 10^{-15}$	$3,4542521 \cdot 10^{-15}$
1,4; 4,1	$4,7463037 \cdot 10^{-6}$	$4,9050369 \cdot 10^{-6}$	$4,4065895 \cdot 10^{-6}$
1,5; 5,1	$-1,4048214 \cdot 10^{-6}$	$-1,4116536 \cdot 10^{-6}$	$-1,3850792 \cdot 10^{-6}$
2,2	$-3,3913495 \cdot 10^{-13}$	$-3,3805723 \cdot 10^{-13}$	$-3,4160767 \cdot 10^{-13}$
2,3; 3,2	$-1,2558514 \cdot 10^{-13}$	$-1,2510472 \cdot 10^{-13}$	$-1,2665409 \cdot 10^{-13}$
2,4; 4,2	$-9,8722125 \cdot 10^{-5}$	$-9,8337499 \cdot 10^{-5}$	$-9,9584286 \cdot 10^{-5}$
2,5; 5,2	$2,8617374 \cdot 10^{-6}$	$2,8455247 \cdot 10^{-6}$	$2,9027184 \cdot 10^{-6}$
3,3	$-1,9558380 \cdot 10^{-13}$	$-1,9485334 \cdot 10^{-13}$	$-1,9713804 \cdot 10^{-13}$
3,4; 4,3	$-1,8935050 \cdot 10^{-4}$	$-1,8858305 \cdot 10^{-4}$	$-1,9101680 \cdot 10^{-4}$

Продолжение таблицы 7

1	2	3	4
3,5; 5,3	$-1,1712346 \cdot 10^{-5}$	$-1,1692019 \cdot 10^{-5}$	$-1,1750239 \cdot 10^{-5}$
4; 4	$1,1785391 \cdot 10^6$	$1,1737228 \cdot 10^6$	$1,1893233 \cdot 10^6$
4,5; 5,4	$-1,3080034 \cdot 10^4$	$-1,3048614 \cdot 10^4$	$-1,3143548 \cdot 10^4$
5; 5	$1,5679576 \cdot 10^3$	$1,5620287 \cdot 10^3$	$1,5805828 \cdot 10^3$

Таблица 8

Значения индексов компонент p, k	Интегральный метод, м	Формула на основе полинома $h=r \cdot 10^{-3}$, м	Формула на основе полинома $h=r \cdot 10^{-2}$, м
1,1	$-3,3915701 \cdot 10^{-13}$	$-3,4364674 \cdot 10^{-13}$	$-3,3834666 \cdot 10^{-13}$
1,2; 2,1	$4,9476002 \cdot 10^{-15}$	$5,3059481 \cdot 10^{-15}$	$4,8881906 \cdot 10^{-15}$
1,3; 3,1	$-1,2558514 \cdot 10^{-13}$	$-1,2611220 \cdot 10^{-13}$	$-1,2547014 \cdot 10^{-13}$
1,4; 4,1	$-9,8722125 \cdot 10^{-5}$	$-9,9233223 \cdot 10^{-5}$	$-9,8630586 \cdot 10^{-5}$
1,5; 5,1	$2,8617374 \cdot 10^{-6}$	$2,8898501 \cdot 10^{-6}$	$2,8582871 \cdot 10^{-6}$
2,2	$-9,8590072 \cdot 10^{-14}$	$-1,0208954 \cdot 10^{-13}$	$-9,7999566 \cdot 10^{-14}$
2,3; 3,2	$3,8864695 \cdot 10^{-15}$	$2,3695594 \cdot 10^{-15}$	$4,1571077 \cdot 10^{-15}$
2,4; 4,2	$4,7599804 \cdot 10^{-6}$	$3,5372712 \cdot 10^{-6}$	$4,9753857 \cdot 10^{-6}$
2,5; 5,2	$-1,4052179 \cdot 10^{-6}$	$-1,3477601 \cdot 10^{-6}$	$-1,4134653 \cdot 10^{-6}$
3,3	$-1,9558045 \cdot 10^{-13}$	$-1,9779398 \cdot 10^{-13}$	$-1,9515677 \cdot 10^{-13}$
3,4; 4,3	$-1,8934726 \cdot 10^{-4}$	$-1,9171355 \cdot 10^{-4}$	$-1,8890744 \cdot 10^{-4}$
3,5; 5,3	$-1,1712146 \cdot 10^{-5}$	$-1,1766988 \cdot 10^{-5}$	$-1,1699631 \cdot 10^{-5}$
4; 4	$1,1785190 \cdot 10^6$	$1,1937625 \cdot 10^6$	$1,1758146 \cdot 10^6$
4,5; 5,4	$-1,3079811 \cdot 10^4$	$-1,3170731 \cdot 10^4$	$-1,3061175 \cdot 10^4$
5; 5	$1,5679308 \cdot 10^3$	$1,5858761 \cdot 10^3$	$1,5645073 \cdot 10^3$

Таблица 9

Значения индексов компонент p, k	Интегральный метод, м	Формула на основе полинома $h=r \cdot 10^{-3}$, м	Формула на основе полинома $h=r \cdot 10^{-2}$, м
1,1	$-3,3366498 \cdot 10^{-13}$	$-3,1878572 \cdot 10^{-13}$	$-3,3470624 \cdot 10^{-13}$
1,2; 2,1	$-1,3012485 \cdot 10^{-13}$	$-1,3134021 \cdot 10^{-13}$	$-1,3005335 \cdot 10^{-13}$
1,3; 3,1	$-7,7183403 \cdot 10^{-15}$	$-5,7183403 \cdot 10^{-15}$	$-7,8761210 \cdot 10^{-15}$
1,4; 4,1	$-9,5112663 \cdot 10^{-6}$	$-7,8479984 \cdot 10^{-6}$	$-9,5996635 \cdot 10^{-6}$
1,5; 5,1	$2,8080119 \cdot 10^{-6}$	$2,7205609 \cdot 10^{-6}$	$2,8118594 \cdot 10^{-6}$
2,2	$-3,3364696 \cdot 10^{-13}$	$-3,2219887 \cdot 10^{-13}$	$-3,3445424 \cdot 10^{-13}$
2,3; 3,2	$-7,7653431 \cdot 10^{-15}$	$-2,7605263 \cdot 10^{-15}$	$-8,0901980 \cdot 10^{-15}$
2,4; 4,2	$-9,5111107 \cdot 10^{-6}$	$-5,4823346 \cdot 10^{-6}$	$-9,7707108 \cdot 10^{-6}$
2,5; 5,2	$2,8079641 \cdot 10^{-6}$	$2,6224830 \cdot 10^{-6}$	$2,8188273 \cdot 10^{-6}$
3,3	$-9,3682219 \cdot 10^{-14}$	$-8,6271366 \cdot 10^{-14}$	$-9,4167042 \cdot 10^{-14}$
3,4; 4,3	$-1,2210196 \cdot 10^{-4}$	$-1,1421671 \cdot 10^{-4}$	$-1,2262035 \cdot 10^{-4}$
3,5; 5,3	$-7,7191907 \cdot 10^{-7}$	$-5,8730969 \cdot 10^{-7}$	$-7,9006406 \cdot 10^{-5}$
4; 4	$1,0471092 \cdot 10^6$	$9,9683730 \cdot 10^5$	$1,0506540 \cdot 10^5$
4,5; 5,4	$-3,5902439 \cdot 10^3$	$-3,2865551 \cdot 10^3$	$-3,6156749 \cdot 10^3$
5; 5	$1,0563282 \cdot 10^3$	$9,9655024 \cdot 10^2$	$1,0606568 \cdot 10^3$

4. Визуализация матриц Грина и матриц Неймана

Опишем построение матриц Грина в виде двумерных поверхностей на основе интерполяционной схемы вычисления. Функции $G_{pk}(x)$ зависят от трех пространственных переменных x_1, x_2 и x_3 . Перейдем к сферическим координатам (r, θ_1, θ_2) .

Для единичной сферы $G_{pk}(\theta_1, \theta_2)$ – это функции только двух переменных: полярного угла $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ и азимутного угла $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$. Значение G_{pk} для конкретных θ_1 и θ_2 строится с помощью интерполяции Лагранжа [26].

На рис. 2–4 представлены компоненты магнитоэластичной матрицы Грина, на рис. 5–7 представлены компоненты магнитоэластичной матрицы Неймана для BaTiO_3 .

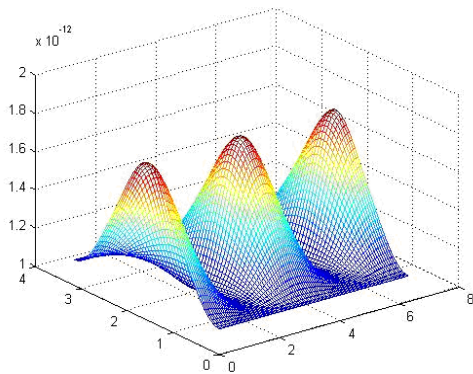


Рис. 2. Компонента G_{11}

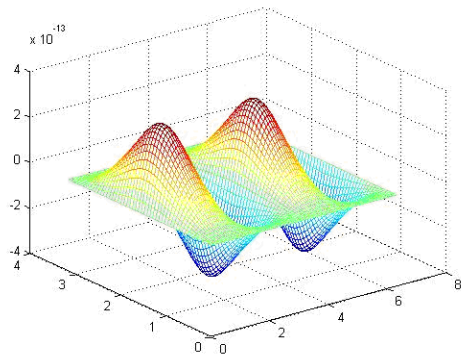


Рис. 3. Компонента G_{12}

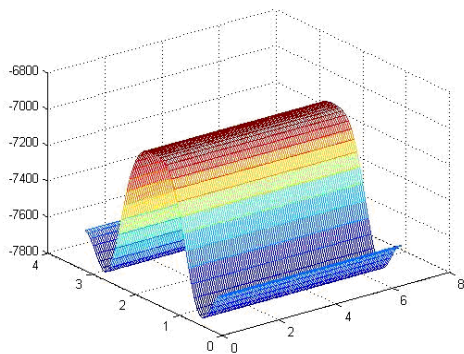


Рис. 4. Компонента G_{55}

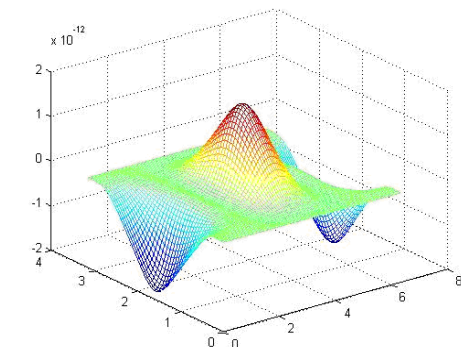


Рис. 5,а. Компонента $G_{11,1}$,
интегральный метод

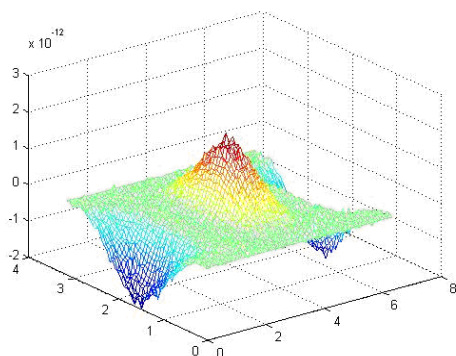


Рис. 5,б. Компонента $G_{11,1}$,
формула на основе полинома
при $h = r \cdot 10^{-3}$

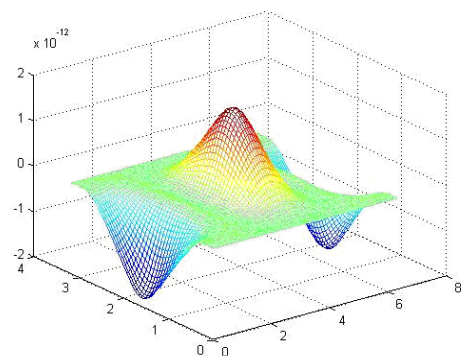


Рис. 5,в. Компонента $G_{11,1}$,
формула на основе полинома
при $h = r \cdot 10^{-2}$

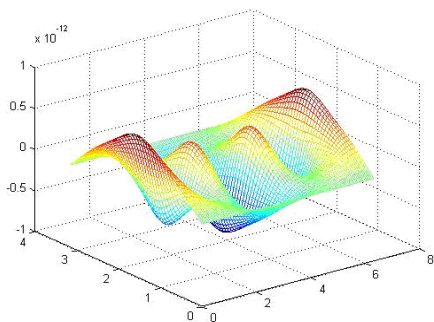


Рис. 6,а. Компонента $G_{12,2}$,
интегральный метод

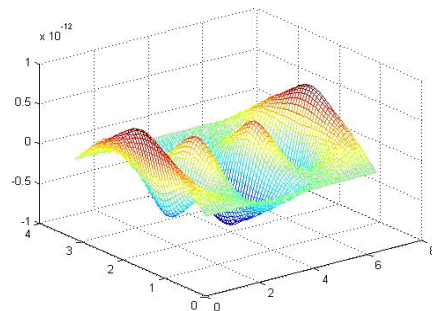


Рис. 6,б. Компонента $G_{12,2}$,
формула на основе полинома
при $h = r \cdot 10^{-3}$

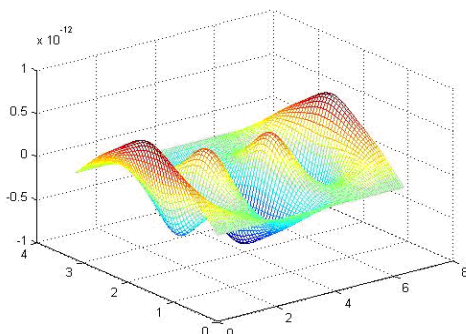


Рис. 6,в. Компонента $G_{12,2}$,
формула на основе полинома
при $h = r \cdot 10^{-2}$

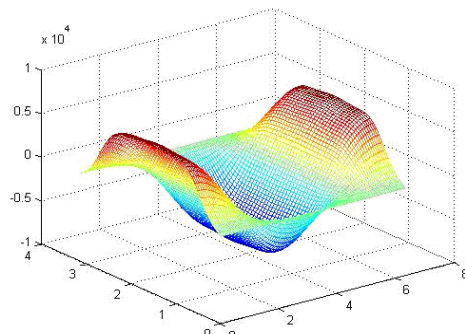


Рис. 7,а. Компонента $G_{55,1}$,
интегральный метод

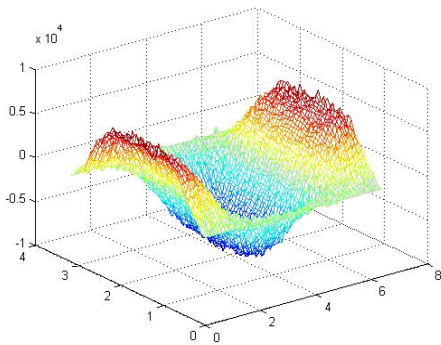


Рис. 7,б. Компонента $G_{55,1}$,
формула на основе полинома
при $h = r \cdot 10^{-3}$

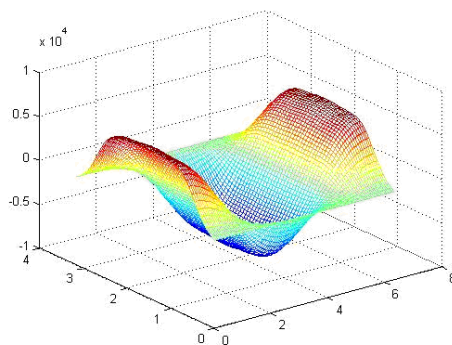


Рис. 7,в. Компонента $G_{55,1}$,
формула на основе полинома

Заключение

Представленные подходы к построению матриц Грина и матриц Неймана позволяют получать значения необходимых компонент с высокой точностью. Вид компонент магнитоэластических матриц Грина и матриц Неймана позволят учесть специфику их поведения при организации поэлементного численного интегрирования для получения коэффициентов дискретного аналога граничного интегрального уравнения.

Литература

1. Deeg, W.F. The analysis of dislocation, crack, and inclusion problem in piezoelectric solids: Ph.D. Dissertation. Stanford University, 1980.
2. Wang, B. Three dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material / B. Wang // Int. J. Solids Struct. – 1992. – V. 29. – P. 293–308.
3. Benveniste, Y. The determination of the elastic and electric fields in a piezoelectric inhomogeneity / Y. Benveniste // J. Appl. Phys. – 1992. – No 72. – P. 1086–1095.
4. Chen, T.Y. Green's functions and the non-uniform transformation problem in a piezoelectric medium / T.Y. Chen // Mech. Res. Commun. – 1993. – V. 20. – P. 271–278.
5. Chen, T.Y. Numerical evaluation of derivatives of the anisotropic piezoelectric Green's functions / T.Y. Chen, F.Z. Lin // Mech. Res. Commun. – 1993. – V. 20. – P. 501–506.
6. Pan, E. Three-dimensional Green's functions in anisotropic piezoelectric solids / E. Pan, F. Tonon // Int. J. Solids Struct. – 2000. – V. 37. – P. 943–958.
7. Pan, E. Three-dimensional Green's functions in anisotropic piezoelectric bimetals / E. Pan, F.G. Yuan // Int. J. Eng. Sci. – 2000. – V. 38. – P. 1939–1960.
8. Wang, Z.K. A general solution and the application of space axisymmetric problem in piezoelectric materials / Z.K. Wang, G.C. Chen // App. Math. Mech. – 1994. – No 15. – P. 615–626.
9. Wang, Z.K. The general solution of three-dimensional problem in piezoelectric media / Z.K. Wang, B.L. Zheng // Int. J. Solids Struct. – 1995. – V. 31. – P. 105–115.
10. Dunn, M.L. Electroelastic Green's functions for transversely isotropic piezoelectric media and their application to the solution of inclusion and inhomogeneity problems / M.L. Dunn // Int. J. Eng. Sci. – 1994. – V. 32. – P. 119–131.
11. Dunn, M.L. Green's functions for transversely isotropic piezoelectric solids / M.L. Dunn, H.A. Wienecke // Int. J. Solids Struct. – 1996. – V. 33. – P. 4571–4581.
12. Dunn, M.L. Half-space Green's functions for transversely isotropic piezoelectric solids / M.L. Dunn, H.A. Wienecke // J. App. Mech. – 1999. – No 66. – P. 675–679.
13. Ding, H.J. Fundamental solution for transversely isotropic piezoelectric media / H.J. Ding, J. Liang, B.Chen // Sci. China (A). – 1996. – V. 39. – P. 766–775.
14. Ding, H.J. On the Green's functions for two-phase transversely isotropic piezoelectric media / H.J. Ding, B. Chen, J. Liang // Int. J. Solids Struct. – 1997. – V. 34. – P. 3041–3057.
15. Dunn, M.L. Inclusions and inhomogeneities in transversely isotropic piezoelectric solids / M.L. Dunn, H.A. Wienecke // Int. J. Solids Struct. – 1997. – V. 34. – P. 3571–3582.
16. Sirotnin, Y.I. Fundamentals of crystal physics / Y.I. Sirotnin, M.P. Shaskolskaya. – Moscow: Mir Publishers, 1982.
17. Huang, J.H. The analysis of piezoelectric/piezomagnetic composite materials containing an ellipsoidal inclusion / J.H. Huang, W.S. Kuo // J. App. Phys. – 1997. – No 81. – P. 1378–1386.
18. Li, J.Y. Micromechanics of magneto-electro-elastic composite materials: average fields and effective behavior / J.Y. Li, M.L. Dunn // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1998. – V. 7. – P. 404–416.
19. Pan, E. Three-dimensional Green's functions in anisotropic magneto-electro-elastic bimetals / E. Pan // Z. Angew. Math. Phys. – 2002. – No 53. – P. 815–838.
20. Wang, X. The general solution of three-dimensional problems in magneto-electro-elastic media / X. Wang, Y.P. Shen // Int. J. Eng. Sci. – 2002. – V. 40. – P. 1069–1080.
21. Alshits, V.I. Angularly inhomogeneous piezoelectric piezomagnetic magneto-electric anisotropic media / V.I. Alshits, H.O.K. Kirchner, T.C.T. Ting // Philos. Mag. Lett. – 1995. – V. 71. – P. 285–288.
22. Kirchner, H.O.K. Elastically anisotropic angularly inhomogeneous media II. The Green's function for piezoelectric piezomagnetic and magneto-electric media / H.O.K. Kirchner, V.I. Alshits // Philos. Mag. – 1996. – V. 74. – P. 861–885.
23. Liu, J.X. Green's functions for anisotropic magneto-electro-elastic solids with an elliptical or a crack / J.X. Liu, X.L. Liu, Y.B. Zhao // Int. J. Eng. Sci. – 2001. – V. 39. – P. 1405–1418.
24. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
25. Игумнов Л.А. Численно-аналитическое построение матриц Грина трехмерных теорий упругости и электроупругости // Л.А. Игумнов [и др.] // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2010. – №3, Ч.1. – С.134–140.

26. *Баженов, В.Г.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.

27. *Tonon, F.* Green's functions and BEM formulation for 3D anisotropic media / F. Tonon, E. Pan, B. Amadei // Computers and Structures. – 2001. – No 79. – P. 469–482.

28. *Ting, T.C.T.* Anisotropic Elasticity – Theory and Applications / T.C.T. Ting. – NY: Oxford University Press, 1996.

[26.10.2011]

NUMERICAL-ANALYTICAL CONSTRUCTION OF GREEN'S AND NEUMAN'S MATRIXES OF THE 3D MAGNETOELECTROELASTICITY THEORY

L.A. Igumnov, S.Yu. Litvinchuk, V.P. Pazin

The system of equations of anisotropic magnetoelasticity is considered. The Green's and Neuman's matrixes are constructed. Two methods of construction of Green's and Neuman's matrixes are used. The numerical example is given. Visualization of Green's and Neuman's matrixes is presented in the form of the surfaces.

Keywords: Green's and Neuman's matrixes, anisotropic magnetoelasticity, 3D formulation, numerical modeling.