

УДК 519.6:539.3

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЯВНЫХ АЖУРНЫХ СХЕМ «КРЕСТ» РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

К.А. Кастальская, Д.Т. Чекмарев

*Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского*

Получены оценки временного шага двумерных и трехмерных явных ажурных вариационно-разностных схем типа «крест» решения динамических задач теории упругости.

*Ключевые слова:* явная схема «крест», вариационно-разностный метод, метод конечных элементов, устойчивость разностных схем, ажурная схема.

### Введение

Описание принципов построения ажурных схем дано в [1, 2]. Под ажурной схемой будем понимать вариационно-разностную или конечно-элементную схему, у которой ячейки (элементы) покрывают расчетную область не сплошь, а с регулярными промежутками, что позволяет существенно сократить время счета при сохранении точности решения. Например, для равномерной сетки из треугольных элементов, не учитывая в расчетах заштрихованные элементы (рис. 1,а), получим ажурную схему. Для равномерной трехмерной сетки на гексаэдральных ячейках ажурная сетка строится на центральных тетраэдрах (рис. 1,б). Более подробно об ажурных сетках см. работу [3].

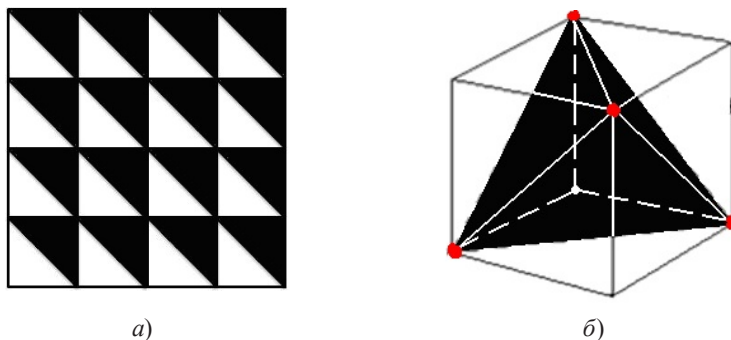


Рис. 1

Оценки устойчивости явных вариационно-разностных схем решения двумерных и трехмерных задач теории упругости получены в [4], включая оценки для двумерных схем на четырехугольных ячейках и для трехмерных схем на шестигранных ячейках. Настоящая работа посвящена выводу аналогичных оценок для ажурных схем.

## 1. Ажурные вариационно-разностные схемы в операторном виде

Для анализа устойчивости вариационно-разностных и конечно-элементных (КЭ) схем их удобнее сначала привести к операторному виду, принятому в теории разностных схем. Это возможно в случае использования равномерных или регулярных КЭ сеток. Общий метод преобразования вариационно-разностных схем к операторному виду описан в [5].

Вариационно-разностная схема «крест» трехмерной динамической задачи теории упругости на равномерной сетке может быть записана в виде

$$(\lambda + \mu) \begin{vmatrix} D_{11}u_1 + D_{12}u_2 + D_{13}u_3 \\ D_{21}u_1 + D_{22}u_2 + D_{23}u_3 \\ D_{31}u_1 + D_{32}u_2 + D_{33}u_3 \end{vmatrix} + \mu D_{\Delta} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \rho D_{tt} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

аналогичном исходной системе дифференциальных уравнений Ламе

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu \Delta u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Здесь разностные операторы  $D_{ij}$  аппроксимируют операторы вторых частных производных:

$$D_{ij} \approx \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$D_{\Delta} = D_{11} + D_{22} + D_{33}, \quad (D_{tt}f) = \frac{1}{\tau^2} [f(t + \tau) - 2f(t) + f(t - \tau)]$$

– разностная производная по времени;  $\lambda, \mu$  – константы Ламе,  $u$  – вектор перемещений,  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – его компоненты. При этом выполнение свойства индексной коммутативности численных схем  $D_{ij}D_{kl} = D_{kj}D_{il} = D_{il}D_{kj}$  ( $i, j, k, l = 0, \dots, n$ ) [6] позволяло преобразовывать их к виду, аналогичному отдельным скалярным дифференциальным уравнениям, следствиям (1):

$$(\lambda + 2\mu)\Delta p = \rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad \mu \Delta q_i = \rho \frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где  $p = \operatorname{div} u$ ,  $q = (q_1, q_2, q_3) = \operatorname{rot} u$ .

При выполнении свойств индексной коммутативности [6] схема (1) может быть преобразована к виду, аналогичному (3):

$$(\lambda + 2\mu)D_{\Delta}p = \rho D_{tt}p, \quad \mu D_{\Delta}q_i = D_{tt}q_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где

$$p = D_{01}u_1 + D_{02}u_2 + D_{03}u_3$$

– сеточный аналог дивергенции,

$$q = (q_1, q_2, q_3) = (D_{30}u_2 - D_{20}u_3, D_{10}u_3 - D_{30}u_1, D_{20}u_1 - D_{10}u_2)$$

– сеточный аналог ротора. Благодаря этому анализ устойчивости схемы (1) может быть сведен к анализу устойчивости схем (4).

## 2. Оценки устойчивости двумерных схем

Двумерная разностная схема на равномерной сетке из треугольных ячеек имеет следующий операторный вид:

$$(\lambda + \mu) \begin{bmatrix} D_{11}u + D_{12}v \\ D_{21}u + D_{22}v \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} D_{\Delta}u \\ D_{\Delta}v \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} D_{tt}u \\ D_{tt}v \end{bmatrix}. \quad (5)$$

При этом ажурная схема удовлетворяет свойствам индексной коммутативности, а традиционная – нет.

Пусть сетка задана парой векторов  $\bar{b}_1, \bar{b}_2 : \bar{x}_{jk} = \bar{x}_0 + \bar{b}_1 j + \bar{b}_2 k$ ,  $\bar{b}_3 = \bar{b}_1 - \bar{b}_2$ ,  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – соответствующие высоты треугольной ячейки (рис. 2).

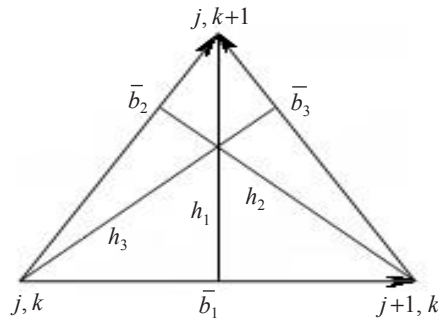


Рис. 2

Сеточный оператор Лапласа получим в виде:

$$(D_{\Delta}f)_{jk} = \frac{1}{|B|^2} [(f_{j-1k+1} + f_{j+1k-1})(\bar{b}_1, \bar{b}_2) + (f_{j-1k} + f_{j+1k})(\bar{b}_2, \bar{b}_3) - (f_{jk-1} + f_{jk+1})(\bar{b}_1, \bar{b}_3) - f_{jk}(\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2 + \bar{b}_3^2)]. \quad (6)$$

Подставляя в полудискретный аналог первого из уравнений (4)

$$(\lambda + 2\mu)D_{\Delta}p = \rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

решение в виде

$$p_{jk} = \exp(i[\alpha j + \beta k + \omega t]) \quad (7)$$

( $i$  – мнимая единица), получим дисперсионное уравнение

$$\frac{1}{|B|^2} \left[ \left( 8 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right) \right) \times \right. \\ \left. \times (\bar{b}_1, \bar{b}_2) - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \bar{b}_2^2 - 4 \sin^2 \frac{\beta}{2} \bar{b}_1^2 \right] = -\omega^2. \quad (8)$$

Отсюда найдем выражение для квадрата собственной частоты:

$$\omega^2 = \frac{4}{|B|^2} \left[ \bar{b}_1^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + \bar{b}_2^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2(\bar{b}_1, \bar{b}_2) \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right]. \quad (9)$$

Отметим, что если  $(\bar{b}_1, \bar{b}_2) < 0$ , то для правой части выражения (9) легко получается наилучшая оценка через скалярный квадрат разности двух векторов:

$$\omega^2 \leq \frac{4}{|B|^2} [\bar{b}_1 - \bar{b}_2]^2.$$

Отсюда, используя спектральный критерий устойчивости Неймана  $\tau \leq 2/\omega_{\max}$ , получаем для прямоугольных и тупоугольных ячеек точную оценку временного шага:

$$\tau \leq \min(h_1, h_2, h_3). \quad (10)$$

В случае остроугольных треугольников точную оценку получить не удается. Рассмотрим случай равностороннего треугольника. Для него, учитывая, что  $|\bar{b}_1| = |\bar{b}_2| = |\bar{b}_3|$  и  $(\bar{b}_1, \bar{b}_2) = 1/2 \bar{b}_1^2$ , после некоторых преобразований получаем:

$$\omega^2 = \frac{4\bar{b}_1^2}{|B|^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right].$$

Приравняв частные производные нулю, найдем максимальное значение  $\omega$ :

$$\omega_{\max}^2 = \frac{9}{8} \frac{4\bar{b}_1^2}{|B|^2}$$

при  $(\alpha + \beta)/2 = \pi$ ,  $(\alpha - \beta)/2 = \pi/3$ . Отсюда следует оценка для правильного треугольника:

$$\tau \leq \sqrt{\frac{8}{9}} h_1.$$

Используем это соотношение в качестве оценки для остроугольных треугольников:

$$\tau \leq \sqrt{\frac{8}{9}} \min(h_1, h_2, h_3), \quad (11)$$

причем коэффициент  $\sqrt{8/9}$  получен для худшего случая ячейки в форме равностороннего треугольника.

Для анализа устойчивости обычной схемы на треугольных ячейках воспользуемся методом операторных неравенств [7]. Приведем разностную схему к каноническому виду, для этого запишем систему (5) в следующем виде:

$$(A + R\tau^2 D_{tt})u = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора  $A$ :  $Au = \gamma u$ . Подставляя в (6) решение в виде

$$u = c_1 e^{i(\alpha j + \beta k)}, \quad v = c_2 e^{i(\alpha j + \beta k)}, \quad (13)$$

получим квадратное уравнение для нахождения собственных значений  $\gamma$ . Выпишем коэффициенты, которые стоят при различных степенях  $\gamma$ :

при  $\gamma^2$ : 1;

$$\text{при } \gamma: -\frac{4}{|B|^2} \left\{ (\lambda + 3\mu) \left( b_{22}^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b_{21}^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2b_{21}b_{22} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \right.$$

$$+ (\lambda + 3\mu) \left( b_{12}^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b_{11}^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2b_{12}b_{11} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \};$$

при  $\gamma^0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{16}{|B|^4} \left\{ \left( (\lambda + 2\mu) \left( b_{22}^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b_{21}^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2b_{21}b_{22} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \mu \left( b_{12}^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b_{11}^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2b_{12}b_{11} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right) \times \right. \\ & \quad \times \left( (\lambda + 2\mu) \left( b_{12}^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b_{11}^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2b_{12}b_{11} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \right. \\ & \quad \left. \left. + \mu \left( b_{22}^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b_{21}^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2b_{21}b_{22} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right) - \right. \\ & \quad \left. - (\lambda + \mu)^2 \left( b_{12}b_{22} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b_{11}b_{21} \sin^2 \frac{\beta}{2} - (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21}) \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Для оценки максимума корней уравнения был проведен численный эксперимент. Максимум  $\gamma$  достигался при следующих значениях углов  $\alpha$  и  $\beta$ :

1)  $\alpha = 0, \beta = \pi$ , при этом

$$\gamma = \frac{4}{|B|^2} (\lambda + 2\mu) |\bar{b}_1|^2;$$

2)  $\alpha = \pi, \beta = 0$ , при этом

$$\gamma = \frac{4}{|B|^2} (\lambda + 2\mu) |\bar{b}_2|^2;$$

3)  $\alpha = \beta = \pi$ , при этом

$$\gamma = \frac{4}{|B|^2} (\lambda + 2\mu) |\bar{b}_3|^2.$$

Объединяя результаты и используя условие  $R > 1/4A$ , можно получить оценку устойчивости:

$$\frac{\rho}{\tau^2} > \frac{\lambda + 2\mu}{|B|^2} \max(|\bar{b}_1|^2, |\bar{b}_2|^2, |\bar{b}_3|^2).$$

Учитывая, что  $c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ , где  $c$  – скорость звука, окончательно будем иметь:

$$\tau < \frac{1}{c} \frac{|B|}{\max(|\bar{b}_1|, |\bar{b}_2|, |\bar{b}_3|)} = \frac{1}{c} \min(h_1, h_2, h_3). \quad (14)$$

### 3. Оценки устойчивости трехмерных схем

Рассмотрим устойчивость двух вариантов ажурной схемы линейного КЭ-решения трехмерной задачи теории упругости. Первый (базовый) вариант схемы получается путем выделения в каждой шестигранной ячейке регулярной сетки по одному центральному тетраэдральному элементу. Во втором варианте схемы дополни-

тельно удаляются элементы в каждом втором тетраэдре в шахматном порядке (подробнее см. [3]). Разностная схема (3) во втором случае удовлетворяет свойствам индексной коммутативности, и анализ ее устойчивости сводится к анализу устойчивости скалярного сеточного волнового уравнения (4).

Рассмотрим разностную схему (1) на тетраэдральных ячейках.

Пусть  $N_m = (N_{m1}, N_{m2}, N_{m3})$  – внешние нормали к соответствующим граням тетраэдров, образованных вершинами элемента, пронумерованными от 1 до 4:  $N_1$  – нормаль к грани с вершинами 2, 3, 4;  $N_2$  – нормаль к грани с вершинами 1, 3, 4;  $N_3$  – нормаль к грани с вершинами 1, 2, 4;  $N_4$  – нормаль к грани с вершинами 1, 2, 3;  $f_m$  – сеточная функция, заданная в узле с номером  $m$ . Тогда можем записать, что

$$|V_i| = f_1 N_{1i} + f_2 N_{2i} + f_3 N_{3i} + f_4 N_{4i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Распишем разностный оператор  $d_{i,1}^+$ :

$$d_{i,1}^+ = \frac{|V_i|_1}{|V|_1} = \frac{1}{2|B|} (f_{jkl} N_{1i} + f_{j+1k+l} N_{2i} + f_{j+1kl+1} N_{3i} + f_{jk+l+1} N_{4i})$$

и двойственный ему оператор:

$$d_{i,1}^- = \frac{1}{2|B|} (f_{jkl} N_{1i} + f_{j-1k-l} N_{2i} + f_{j-1kl-1} N_{3i} + f_{jk-l-1} N_{4i}).$$

Оператор Лапласа получим в виде

$$\begin{aligned} (D_{\Delta} f)_{jkl} = & \frac{1}{(\det B)^2} [(N_1, N_2)(f_{j+1kl} + f_{j-1kl}) + (N_1, N_3)(f_{jk+l} + f_{jk-l}) + \\ & + (N_1, N_4)(f_{jkl-1} + f_{jkl+1}) + (N_2, N_3)(f_{j-1k+l} + f_{j+1k-l}) + \\ & + (N_2, N_4)(f_{j-1kl+1} + f_{j+1kl-1}) + \\ & + (N_3, N_4)(f_{jk-l+1} + f_{jk+l-1}) - (N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + N_4^2) f_{jkl}]. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя в (4) общее решение в виде монохроматической волны, получим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(\det B)^2} \left[ (N_1, N_2) \cos 2\alpha + (N_1, N_3) \cos 2\beta + (N_1, N_4) \cos 2\gamma + \right. \\ & \quad \left. + (N_2, N_3) \cos 2(\alpha - \beta) + (N_2, N_4) \cos 2(\alpha - \gamma) + \right. \\ & \quad \left. + (N_3, N_4) \cos 2(\beta - \gamma) - \frac{1}{2}(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + N_4^2) f_{jkl} \right] - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В результате задача сводится к нахождению максимума собственной частоты  $\omega$ . Для базовой трехмерной схемы, как и в традиционной схеме на треугольных ячейках, метод операторных неравенств приводит к необходимости оценки максимального корня кубического уравнения, содержащего большое число параметров. Ввиду громоздкости уравнения приводить его не будем, отметим только, что и в том и в другом случаях аналитическую оценку построить не удалось.

Была выдвинута гипотеза, что схема будет устойчива при выполнении условия

$$\tau < \frac{1}{c} \min\{h_1, h_2, h_3, h_4, l_1, l_2, l_3\}, \quad (17)$$

где  $h_1, h_2, h_3, h_4$  – высоты ячейки (тетраэдра),  $l_1, l_2, l_3$  – расстояния между парами скрещивающихся ребер. Данное условие было проверено путем расчетов значений собственных частот при разных значениях волнового вектора  $(\alpha, \beta, \gamma)$  для ячеек разной формы, и ни одного нарушения его не было выявлено. Таким образом, с большой долей уверенности можно утверждать, что оба варианта трехмерной ажурной схемы будут устойчивы при выполнении условия (17). Это подтверждают и решенные тестовые задачи. Оценка (17) использовалась также на неравномерных сетках и для традиционной схемы на тетраэдрах. Для получения оценки выбиралась ячейка минимальных размеров, при этом в случае традиционной схемы на линейных тетраэдральных элементах оказалось, что возможен устойчивый счет при шаге, несколько превышающем оценку (17) для ячеек минимального размера, что согласуется с выводами [8].

#### 4. Численные результаты

Рассматривалась задача о колебаниях бруса квадратного сечения, защемленного на торцах. Расчетная схема задачи приведена на рис. 3. Здесь  $L = 10$  см,  $H_1 = H_2 = 1$  см,  $p = 0,17$  ГПа на участке поверхности  $4 < x < 6$ ,  $0 < y < 1$ ,  $z = 0$ . Свойства материала:  $\beta_0 = 7,8$  г/см<sup>3</sup>,  $E = 210$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . В момент времени  $t = 0$  к брусу внезапно прикладывается нормальное давление  $p = 0,17$  ГПа, равномерно распределенное на заштрихованном участке поверхности  $4 < x < 6$ ,  $0 < y < 1$ ,  $z = 0$  (ось  $z$  направлена вниз). Давление прикладывается мгновенно (рис. 3, б).

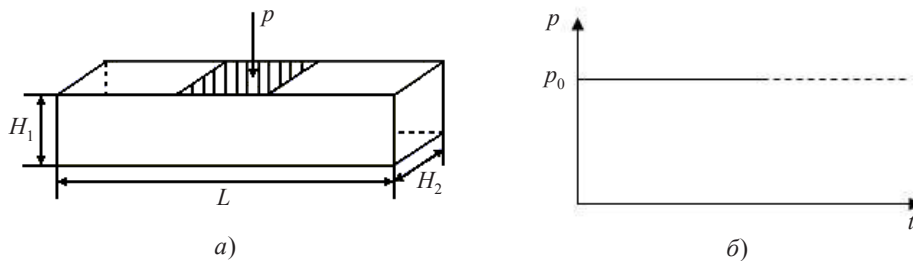


Рис. 3

Проведена серия расчетов на сетках  $40 \times 4 \times 4$  и  $80 \times 8 \times 8$  шестигранных элементов (схема Уилкинса), на ажурных сетках двух типов и на схеме линейного элемента с аналогичным разбиением на шестигранники. Сетки содержали следующее число узлов и элементов. Разбиение  $40 \times 4 \times 4$ : схема Уилкинса – 1025 узлов и 640 элементов; ажурная схема – 512 узлов и 640 элементов, суперажурная схема – 512 узлов и 488 элементов, линейный элемент – 1025 узлов и 3200 элементов. Разбиение  $80 \times 8 \times 8$ : схема Уилкинса – 6561 узел и 5120 элементов; ажурная схема: 3280 узлов и 5120 элементов; суперажурная схема: 3280 узлов и 2312 элементов; линейный элемент – 6561 узел и 25600 элементов. Расчеты велись до 2500 мкс. На рис. 4–7 приведены графики нормальных скоростей в точке с координатами  $(5; 0,5; 1)$  (в центре грани, противоположной нагруженной), полученные по разным программам и на разных сетках. Все вычисления были выполнены с помощью разных вариантов одной программы, поэтому была возможность сравнить их по реальной эффективности. Расчеты производились на одном компьютере в однопроцессорном режиме.

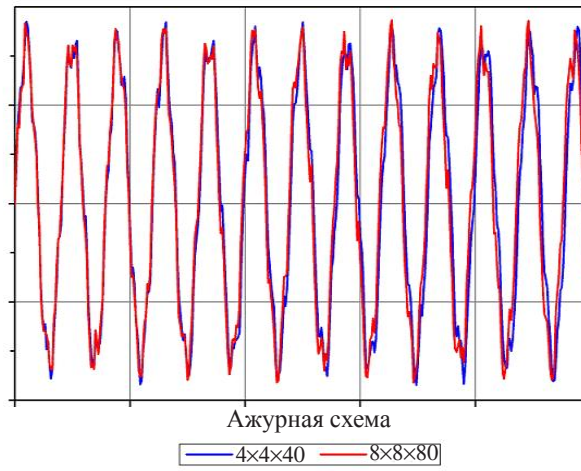


Рис. 4

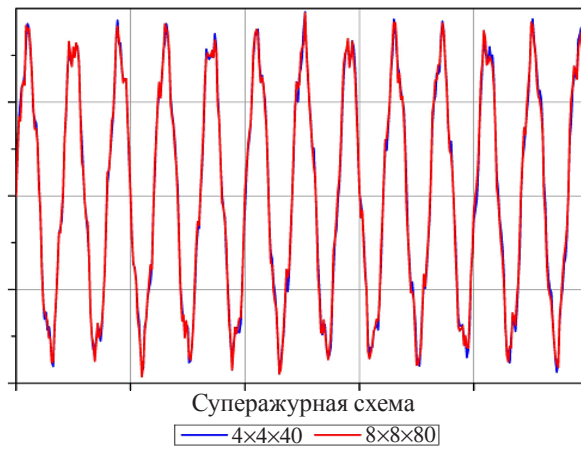


Рис. 5

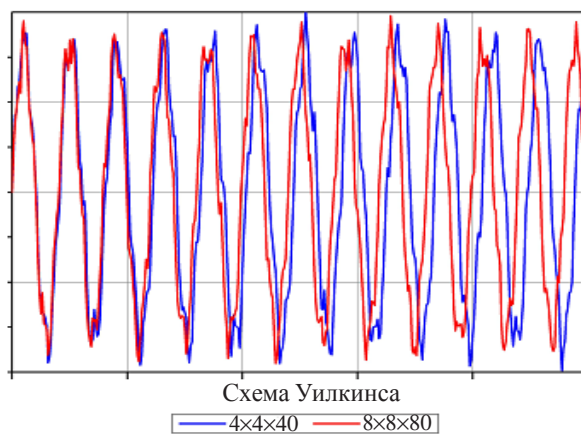


Рис. 6



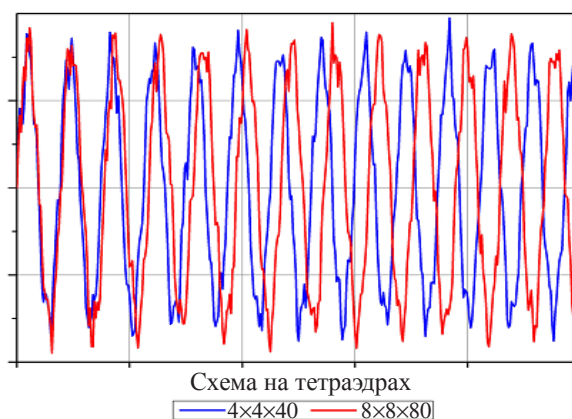


Рис. 7

В таблице приведено сравнение временных затрат по отношению к времени  $t_A$  расчета по ажурной схеме.

Таблица

Схема	Время счета $t$ , с	$t/t_A$	$(t - t_A)/t_A \cdot 100\%$
ажурная, $8 \times 8 \times 80$	216	1	0%
«суперажурная», $8 \times 8 \times 80$	155	0,718	-28,24%
Уилкинс, $8 \times 8 \times 80$	324	1,5	50,00%
тетраэдры, $8 \times 8 \times 80$	1336	6,185	518,52%

Шаг по времени ажурной, суперажурной и схемы Уилкинса брался из условия  $\tau \leq h/c$ , где  $h$  – минимальный размер ячейки. Для схемы на тетраэдрах шаг выбирался с коэффициентом  $\tau \leq 0,7h/c$ , что несколько превышает условие Куранта для минимального размера тетраэдра. Факт превышения условия Куранта согласуется с выводами [8].

Приведенные примеры показывают, что ажурная схема обладает лучшей сходимостью по сравнению со схемой на шестигранниках (схемой Уилкинса) и схемой на тетраэдрах.

#### Литература

1. Чекмарев, Д.Т. Ажурные схемы метода конечного элемента / Д.Т. Чекмарев // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 1997. – Вып. 55. – С. 157–159.
2. Чекмарев, Д.Т. Численные схемы метода конечного элемента на «ажурных» сетках / Д.Т. Чекмарев // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. – 2009. – Вып. 2. – С. 49–54.
3. Чекмарев, Д.Т. О построении трехмерных ажурных сеток / Д.Т. Чекмарев, К.А. Кас- тальская // Супервычисления и математическое моделирование: Труды XII Междунар. семинара. – Саров, 2011. – С. 374–381.
4. Баженов, В.Г. Оценки устойчивости явной конечно-разностной схемы «крест» решения нестационарных задач теории упругости и теории оболочек / В.Г. Баженов, Д.Т. Чек- марев // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Горьков. ун-т. – 1984. – Вып. 28. – С. 15–22.
5. Баженов, В.Г. Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2000. – 118 с.

6. *Баженов, В.Г.* Об индексной коммутативности численного дифференцирования / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // Ж. вычисл. математики и мат. физики. – 1989. – Т. 29, №5. – С. 662–674.

7. *Самарский, А.А.* Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1973. – 415 с.

8. *Бондаренко, Ю.А.* Применение вариационных принципов механики для построения дискретных по времени разностных моделей газодинамики. Ч. 2 / Ю.А. Бондаренко, А.М. Стенин // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. – 1986. – Вып. 1. – С. 14–26.

[19.09.2011]

### **THE STABILITY OF EXPLICIT RARE MESH CROSS-TYPE SCHEMES FOR THE SOLUTION OF DYNAMIC PROBLEMS OF ELASTICITY**

**K.A. Kastalskaya, D.T. Chekmarev**

The time step estimations of 2D and 3D explicit rare mesh variational-difference cross-type schemes for the solution of dynamic problems of elasticity is received.

*Keywords:* explicit cross-type scheme, variational-difference method, finite element method, stability of differential scheme, rare mesh scheme.