

УДК 539.3

## АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ<sup>\*)</sup>

**В.Л. Котов, Е.Ю. Линник, А.А. Макарова, А.А. Тарасова**

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского*

Приводятся решения задачи о расширении сферической полости из точки в безграничной грунтовой среде. Сжимаемость грунта отражает ударная адиабата в виде линейного соотношения, связывающего скорость ударной волны и массовую скорость за фронтом волны. Получено аналитическое решение задачи в предположении несжимаемости среды за фронтом ударной волны и численное решение в полной постановке. Показана близость указанных решений при сверхзвуковых скоростях расширения полости.

*Ключевые слова:* ударная адиабата, расширение сферической полости, модель локального взаимодействия, сжимаемая грунтовая среда.

При исследовании процессов удара и проникания широкое распространение [1–3] получили приближенные подходы с использованием моделей локального взаимодействия (МЛВ) для связи кинематических и силовых факторов на площадке контакта тела и среды [4, 5]. В соответствии с одной из реализаций МЛВ давление в каждой точке боковой поверхности ударника отождествляется с давлением на внутренней поверхности сферической или цилиндрической полости, расширяющейся в безграничной среде от нулевого радиуса до радиуса ударника. Аналитическое решение данной задачи допускает только для несжимаемой среды, более точный учет свойств среды требует привлечения численных методов [5–8]. В данной работе получено аналитическое решение задачи для среды с известной ударной адиабатой в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны. Показана близость полученного решения к численному решению в полной постановке при сверхзвуковых скоростях расширения полости.

1. Рассмотрим задачу о расширении полости из точки в безграничной среде, считая, что граница полости и поверхность раздела пластической и упругой зон перемещаются со скоростями  $V_0$  и  $c$  соответственно.

Решение этой одномерной задачи строится в области пластического течения, ограниченной радиусами  $r = V_0 t$  и  $r = ct$  и примыкающей к области невозмущенной

---

<sup>\*)</sup>Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Программы государственной поддержки ведущих научных школ России (проект НШ-4807.2010.8), а также при поддержке РФФИ (проект 10-08-00376-а).

среды (рис. 1). Область упругого деформирования не рассматривается, так как предполагается, что величина  $c$  больше значения скорости распространения упругой волны.

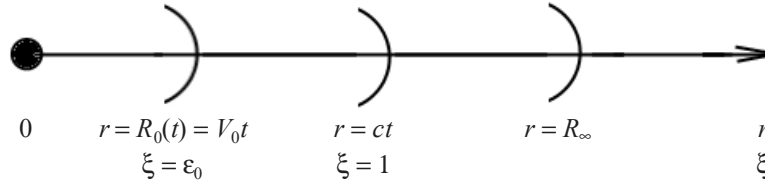


Рис. 1

Движение грунтовой среды в области пластического течения описывается уравнениями неразрывности и изменения количества движения в эйлеровых переменных (сферическая симметрия):

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r} \right) = - \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2 \frac{Y}{r} = - \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность,  $\sigma$  – радиальная компонента тензора напряжений Коши (принимается положительной при сжатии),  $v$  – скорость перемещения среды,  $Y$  – константа условия пластичности Треска.

На границе расширяющейся от начального (нулевого) радиуса  $R_0$  полости задается скорость  $V_0$ , внешняя поверхность сферического слоя  $R_\infty$  принимается свободной от напряжений:

$$v|_{r=R_0} = V_0, \quad \sigma|_{r=R_\infty} = 0, \quad R_0|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Соотношения на ударной волне, распространяющейся со скоростью  $c$  в невозмущенную область (где скорость и напряжения равны нулю), записываются в виде

$$(\rho - \rho_0)c = \rho v, \quad \rho v c = \rho v^2 - \sigma$$

или

$$\theta = \frac{v}{c}, \quad \frac{v}{c} = \frac{v^2}{c^2} + \frac{\sigma}{\rho c^2}, \quad (3)$$

где  $\theta = 1 - \rho_0/\rho$  – объемная деформация,  $\rho$  и  $\rho_0$  – плотность в деформированном и начальном состоянии.

Динамическая сжимаемость грунтовой среды характеризуется ударной адиабатой в виде линейного соотношения [9], связывающего скорость ударной волны  $c$  и скорость  $v$  за фронтом волны:

$$c = A + \lambda v. \quad (4)$$

На основе соотношений (3), (4) получается выражение для связи напряжения  $\sigma$  и объемной деформации  $\theta$ :

$$\sigma = \frac{\rho_0 A^2 \theta}{(1 - \lambda \theta)^2}. \quad (5)$$

Зависимость (5), представленная на рис. 2, отражает линейное поведение напряжения при малых объемных деформациях и его неограниченный рост при стремлении деформации к предельному значению  $\theta = 1/\lambda$ .

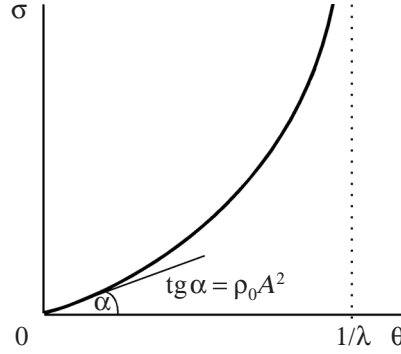


Рис. 2

Подставляя (5) в систему уравнений (1), (2) и переходя к безразмерным переменным  $u = v/c$ ,  $\xi = r/(ct)$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $u$  и  $\theta$  (штрихом обозначено дифференцирование по  $\xi$ ):

$$u' = \frac{2TF/\xi + 2uB/\xi}{\beta^2 F^2 - B}, \quad \theta' = \frac{2T/\xi + 2u\beta^2 F/\xi}{\beta^2 F^2 - B}, \quad (6)$$

где

$$T = \frac{Y}{\rho_0 a^2}, \quad \beta^2 = \frac{c^2}{A^2}, \quad F = \frac{\xi - U}{1 - \theta}, \quad B = \frac{1 + \lambda\theta}{(1 - \lambda\theta)^3}.$$

Граничные условия:

$$u|_{\xi=1} = \frac{c - A}{\lambda c}, \quad \theta|_{\xi=1} = \frac{c - A}{\lambda c}, \quad u|_{\xi=\varepsilon_0} = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{V_0}{c}.$$

Краевая задача для нелинейной системы (6) решается методом стрельбы, в котором неизвестная скорость  $c$  определяется [7, 8] итерационно с заданной точностью  $\delta$  выполнения граничного условия:  $|u - \varepsilon_0| < \delta$ . На каждой итерации численно решается задача Коши при изменении  $\xi$  от 1 до  $\varepsilon_0$ , т.е. от положения фронта пластической ударной волны до границы полости. Используется метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Итерационный процесс обнаруживает достаточно быструю сходимость, если в качестве начального приближения выбирать значения скорости  $c$  в соответствии с приближенным решением, описываемым в следующем разделе статьи.

2. При высоких скоростях расширения полости и высоких давлениях изменение  $\theta$  мало. Система (6) в предположении  $\partial\theta/\partial\xi = 0$ , записанная относительно переменных  $u$  и  $S = \sigma/(\rho c^2)$ , примет вид:

$$u' + \frac{2u}{\xi} = 0, \quad S' + \frac{2\tilde{Y}}{\xi} = u'(\xi - u), \quad (7)$$

где

$$\tilde{Y} = \frac{Y}{\rho c^2}.$$

Граничные условия переписуются в виде:

$$u|_{\xi=1} = \frac{c-A}{\lambda c}, \quad S|_{\xi=1} = u - u^2, \quad u|_{\xi=\varepsilon_0} = \varepsilon_0.$$

Уравнения системы (7) интегрируются в явном виде:

$$u = \frac{\varepsilon_0^3}{\xi^2}, \quad S = -2\tilde{Y} \ln \xi + 2\frac{\varepsilon_0^3}{\xi} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0^6}{\xi^4} - \frac{1}{2}\varepsilon_0^6 - \varepsilon_0^3. \quad (8)$$

Для определения неизвестной величины  $\varepsilon_0$  с учетом соотношений (3) на ударной адиабате получается кубическое уравнение

$$\lambda \varepsilon_0^3 + \frac{\varepsilon_0}{M} - 1 = 0.$$

Действительное решение этого уравнения таково:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{6} \frac{q^{1/3}}{\lambda M} - \frac{2}{q^{1/3}}, \quad q = \left( 108M + 12\sqrt{3} \sqrt{\frac{4 + 27\lambda M^3}{\lambda M}} \right) \lambda^2 M^2, \quad M = \frac{V_0}{A}.$$

Безразмерное напряжение на границе полости ( $\xi = \varepsilon_0$ ) задается равенством:

$$S|_{\xi=\varepsilon_0} = -2\tilde{Y} \ln \varepsilon_0 + \left( \frac{3}{2} - \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\varepsilon_0^4 \right) \varepsilon_0^2.$$

Общее представление для напряжения имеет вид:

$$\sigma|_{\xi=\varepsilon_0} = \sigma_\tau + \rho_0 V_0^2 C, \quad (9)$$

$$C = \frac{3/2 - \theta^{1/3} - 1/2\theta^{4/3}}{1 - \theta},$$

где величина  $\theta = \varepsilon_0^3$  определяется сжимаемостью на фронте ударной волны.

**3.** Величина  $\theta$  ограничена значением  $1/\lambda$ . Зависимость коэффициента  $C$  от параметра  $\theta = 1/\lambda$  иллюстрирует рис. 3. Предельное значение коэффициента  $C = 3/2$ , установленное ранее в предположении несжимаемости среды [2], получается из (9) при  $\theta = 0$ . Утолщенная линия на рис. 3 соответствует интервалу  $0,4 \leq 1/\lambda \leq 2,5$  изменения параметра  $\theta$ , который характерен для реальных материалов [9]. Коэффициент  $C$  при этом мало отличается от 1, и это можно использовать для оценок в моделях локального взаимодействия.

На рис. 4,а изображены зависимости величины  $\varepsilon_0$  от безразмерной скорости расширения полости  $M$ . Сплошная линия соответствует результатам численных расчетов в полной постановке, штриховая – аналитическому решению в предположении несжимаемости среды за фронтом ударной волны, штрихпунктирная линия – решению в предположении  $\theta = 1/\lambda$ . На рис. 4,б приведены относительные погрешности приближенных решений. Отмечается сближение результатов при  $M > 1$  и их ограниченность при  $M \rightarrow \infty$ .

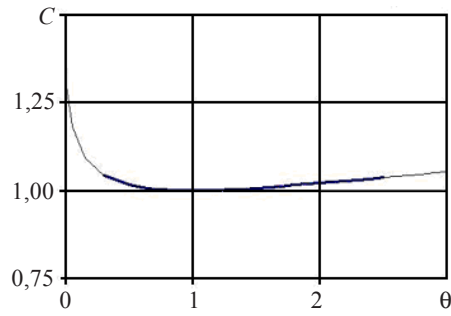


Рис. 3

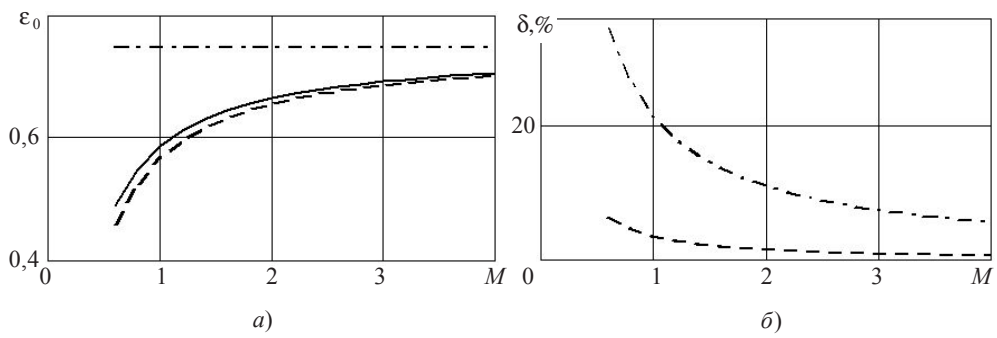


Рис. 4

На рис. 5 представлены безразмерные напряжения на границе полости (а) и соответствующие погрешности в зависимости от  $M$  (б). Обозначения кривых аналогичны принятым на рис. 4.

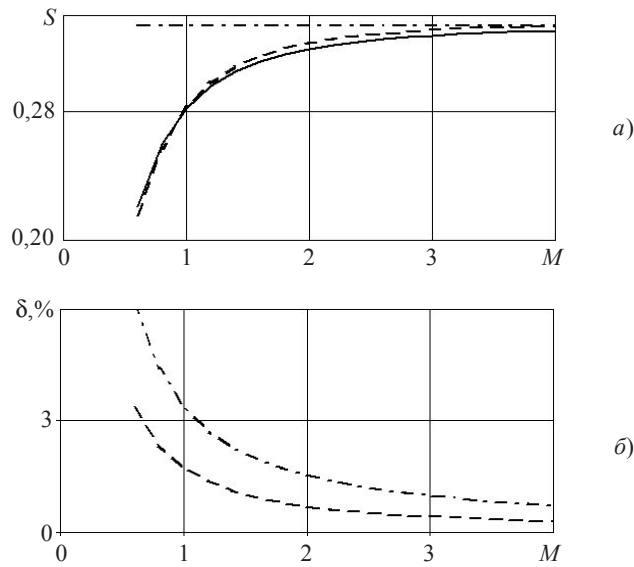


Рис. 5

Таким образом, получено решение задачи о расширении сферической полости в среде с линейной ударной адиабатой  $c = A + \lambda u$  в предположении несжимаемости

за фронтом ударной волны. Установлено, что напряжение на границе расширяющейся сферической полости для большинства грунтовых сред может быть представлено в виде  $\sigma \approx \rho_0 V_0^2$  с погрешностью менее 5% при скоростях расширения полости  $V_0 > A$ .

#### Литература

1. Сагомоян, А.Я. Проникание / А.Я. Сагомоян. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 299 с.
2. Высокоскоростное взаимодействие тел / В.М. Фомин [и др.]. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 600 с.
3. Баженов, В.Г. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред / В.Г. Баженов, В.Л. Котов. – М.: Физматлит, 2011. – 208 с.
4. Мирошин, Р.Н. Локальные методы в механике сплошных сред / Р.Н. Мирошин, И.А. Халидов. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. – 304 с.
5. Баженов, В.Г. Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе моделей локального взаимодействия / В.Г. Баженов, В.Л. Котов // ПММ. – 2010. – Т. 74, №3. – С. 391–402.
6. Forrestal, M.J. Penetration into soil targets / M.J. Forrestal, V.K. Luk // Intern. J. Impact Engng. – 1992. – V. 12, No 3. – P. 427–444.
7. Penetration into ductile metal targets with rigid spherical-nose rods / Forrestal M.J. [et al.] // Int. J. Impact Engng. – 1995. – V. 16, No 5/6. – P. 699–710.
8. Котов, В.Л. Исследование применимости автомодельного решения задачи о расширении сферической полости в сжимаемой среде для определения давления на поверхность контакта «ударник–грунт» / В.Л. Котов // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2008. – Вып. 70. – С. 123–130.
9. Физика взрыва / Под ред. Л.П. Орленко. – Изд. 3-е, испр. – В 2 т. Т. 2. – М.: Физматлит, 2004. – 656 с.

[16.09.2011]

#### THE ANALYSIS OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF A SPHERICAL CAVITY EXPANSION IN A SOIL MEDIUM PROBLEM

V.L. Kotov, E.Yu. Linnik, A.A. Makarova, A.A. Tarasova

The solutions of a problem of a spherical cavity expansion from a point to an infinite soil medium are presented. Compressibility of the soil is described by the impact adiabat in the form of the linear relation combining shock wave velocity and mass velocity behind the wave front. The analytical problem solution under the assumption of medium incompressibility behind the wave front and the numerical solution in complete formulation are obtained. The proximity of both solutions is shown for supersonic velocities of the cavity expansion.

*Keywords:* impact adiabat, spherical cavity expansion, local interaction model, compressible soil medium.