

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДИКИ ПРЯМОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ВНЕДРЕНИИ ПОЛУСФЕРИЧЕСКОГО УДАРНИКА В ПЕСЧАНЫЙ ГРУНТ<sup>\*)</sup>

**В.Л. Котов, Вл.Вл. Баландин, Е.Ю. Линник, Вл.В. Баландин**

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского*

Представлены результаты численных экспериментов по определению сил сопротивления, действующих на цилиндрический ударник с полусферическим оголовком на квазистационарной стадии внедрения в сухой песчаный грунт. На основе зависимостей глубины проникания от времени после внедрения головной части определены параметры уравнения движения в форме Понселе (ускорение проникающего тела пропорционально квадрату скорости). В результате численного анализа уточнены условия проведения прямого эксперимента с использованием техники высокоскоростной фотосъемки, обеспечивающие при скоростях 150–200 м/с погрешность методики не более 15–20%.

*Ключевые слова:* удар, проникание, сферический ударник, грунтовая среда, численный эксперимент, погрешность, схема Годунова.

### **Введение**

Нелинейные процессы взаимодействия твердых тел с грунтовыми средами обуславливаются свойствами природных грунтов, формой проникающих тел и многими другими факторами. Их изучение в последнее время проводится комплексно на основе известных моделей грунтов [1], методов математического моделирования процессов удара и проникания в грунт деформируемых тел [2] и данных прямого и обращенного экспериментов [3]. Ранее были представлены экспериментальные результаты определения сил сопротивления, действующих на полусферический оголовок в начальные моменты внедрения в сухой песок [4–6]. Однако ограниченные размеры контейнера с грунтом, метаемого в обращенном эксперименте, не позволили измерить интегральные нагрузки на квазистационарном участке при скоростях внедрения порядка 100 м/с.

В настоящей работе проводится численный анализ методики прямого эксперимента с использованием высокоскоростной киносъемки для определения интегральных нагрузок, действующих на квазистационарном участке внедрения. Параметры уравнения движения в форме Понселе (ускорение проникающего тела пропор-

---

<sup>\*)</sup> Выполнено в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4807.2010.8), а также Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-08-00376-а).

ционально квадрату скорости) определяются методом наименьших квадратов на основе численных зависимостей глубины проникания от времени. Сравнением расчетных и численных значений показывается, что силы сопротивления, действующие на цилиндрические ударники с полусферическими оголовками на квазистационарной стадии внедрения в сухой песчаный грунт, при скоростях 150–200 м/с находятся с погрешностью не более 15–20%.

1. Моделируется осесимметричная задача о взаимодействии жесткого цилиндрического тела с грунтовой средой. Система уравнений динамического деформирования мягкой грунтовой среды Григоряна [2] записывается в переменных Эйлера в цилиндрической системе координат  $roz$  ( $oz$  – ось симметрии) следующим образом:

$$\begin{aligned} (\rho)_{,t} + (\rho u)_{,r} + (\rho v)_{,z} &= -\frac{\rho u}{r}, \\ (\rho u)_{,t} + (\rho u^2 - s_{rr} + p)_{,r} + (\rho uv - s_{rz})_{,z} &= -\frac{2s_{rr} + s_{zz} - \rho u^2}{r}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$(\rho v)_{,t} + (\rho uv - s_{rz})_{,r} + (\rho v^2 - s_{zz} + p)_{,z} = -\frac{s_{rz} - \rho uv}{r},$$

$$(\rho \rho^*)_{,t} + (\rho \rho^* u)_{,r} + (\rho \rho^* v)_{,z} = -\frac{\rho \rho^* u}{r}, \quad (2)$$

$$D_J s_{rr} + \lambda s_{rr} = \frac{2}{3} G \left( 2u_{,r} - v_{,z} - \frac{u}{r} \right),$$

$$D_J s_{rz} + \lambda s_{rz} = G(u_{,z} + v_{,r}), \quad (3)$$

$$D_J s_{zz} + \lambda s_{zz} = \frac{2}{3} G \left( 2v_{,z} - u_{,r} - \frac{u}{r} \right),$$

$$p = f_1(\rho, \rho^*) H(\rho^* - \rho) H(\rho_0 - \rho), \quad f_1 \equiv \frac{\rho_0 a^2 \theta}{(1 - b\theta)^2}, \quad (4)$$

$$J_2 \leq \frac{1}{3} f_2^2(p), \quad f_2 \equiv \sigma_0 + \frac{\mu p}{1 + \mu p / (\sigma_M - \sigma_0)}, \quad (5)$$

где  $t$  – время,  $\rho_0$  и  $\rho$  – начальная и текущая плотности,  $u$ ,  $v$  – компоненты вектора скорости,  $s_{rr}$ ,  $s_{rz}$ ,  $s_{zz}$  – компоненты дивергента тензора напряжений Коши,  $p$  – давление,  $H$  – функция Хевисайда,  $D_J$  – производная Яуманна,  $G$  – модуль сдвига,  $\theta = 1 - \rho_0/\rho$  – объемная деформация,  $J_2 = 1/2 s_{ij} s_{ij}$  ( $i, j = r, z$ ) – второй инвариант дивергента тензора напряжений. Символ после запятой означает дифференцирование по соответствующей переменной, по повторяющимся индексам производится суммирование.

Первые три уравнения (1) системы выражают законы сохранения массы и импульса. Следующее уравнение (2) используется при  $\rho < \rho^*$  для описания необратимой объемной сжимаемости мягкой грунтовой среды и учитывает перенос «истории нагружения» материальной частицы, где  $\rho^*$  – максимальная плотность, достигнутая в процессе активного нагружения грунта. Уравнения (3) представляют собой

обобщенный закон Гука, причем  $\lambda=0$  при упругом деформировании и  $\lambda>0$ , если реализуется условие пластичности Мизеса–Шлейхера (5).

В соотношении (4) функция  $f_1(\rho)$  характеризует объемную сжимаемость грунтовой среды. Приведенная зависимость следует из линейной зависимости скорости ударной волны от массовой скорости за фронтом волны, полученной в плоско-волновых экспериментах [7].

Цилиндрический ударник считается жестким, его скорость направлена по нормали к свободной поверхности грунта. В начальный момент времени скорости и напряжения в грунте равны нулю. На внешних границах области грунтовой среды ставятся граничные условия типа «непроницаемость»:

$$\dot{u}'_{\alpha} = \dot{u}''_{\alpha}, \quad q'_{\alpha} = -q''_{\alpha}, \quad \alpha = r, z,$$

где  $\dot{u}'_{\alpha}, q'_{\alpha}$  – компоненты векторов скорости перемещений и контактного давления, и типа «свободная поверхность»:

$$q_{\alpha} = 0, \quad \alpha = s, \xi,$$

где  $s$  и  $\xi$  – направления касательной и нормали в местном координатном базисе.

Контактный алгоритм «непроницаемости» по нормали со скольжением по касательной с сухим трением формулируется в соответствии с законом трения [8]:

$$\dot{u}'_s = \dot{u}''_s, \quad q'_s = -q''_s, \quad q_s = q'_s = \begin{cases} q_s, & |q_s| \leq k |q_{\xi}|, \\ k |q_{\xi}| \operatorname{sign}(q_s), & |q_s| > k |q_{\xi}|, \end{cases} \quad (6)$$

$k$  – коэффициент трения скольжения.

Применение соотношений (6) необходимо при расчете проникания сферического тела, для которого экспериментально показано наличие переходной зоны в окрестности лобовой точки ударника к скольжению с образованием кавитационной полости за счет отрыва потока грунта. Применяемые условия на поверхностях контакта жесткого тела и грунтовой среды формулируются как комбинация условий непроницаемости на участках поверхностей, которые находятся в данный момент в контакте, и условий на свободных границах на остальных участках. Критерием вступления в контакт является геометрическое пересечение свободных поверхностей тел. Реализация контактных условий основывается на выделении и сопровождении в процессе расчетов контактных и свободных поверхностей [9].

Численное решение осесимметричных задач осуществлялось модифицированным методом Годунова первого порядка точности с применением подвижных эйлерово-лагранжевых сеток [10–12]. В расчетах определялись сила сопротивления, изменение скорости и глубина внедрения в песчаный грунт сферического тела конечной массы. Полученные зависимости сравнивались с интегральными нагрузками, определенными по методике прямого эксперимента.

2. Для описания движения ударника при проникании используется уравнение в форме Понселе:

$$-\ddot{x} = \alpha(\dot{x})^2, \quad (7)$$

где  $\ddot{x}, \dot{x}, x$  – ускорение, скорость и глубина внедрения ударника,  $\alpha$  – числовой коэффициент. Справедливость закона движения (7), по крайней мере в некотором ограниченном диапазоне скоростей, была показана ранее [6].

Интегрирование уравнения движения (7) при начальных условиях  $\dot{x}(t=0)=V_0$ ,  $x(t=0)=x_0$  дает следующие выражения для глубины и скорости проникания:

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln(\alpha V_0 t + 1) + x_0, \quad \dot{x}(t) = \frac{V_0}{\alpha V_0 t + 1}, \quad (8)$$

где  $V_0$  – неизвестная скорость внедрения в некоторый момент времени  $t = t_0$  после полного погружения головной части ударника.

Компоненты вектора коэффициентов  $\Theta = [\alpha, V_0, x_0]^T$  в (8) определяются итерационно методом Ньютона из системы уравнений

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= X_k \Delta \Theta_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \Delta x &= \{x_i^* - x_i\}, \quad X = \left\{ \frac{-x_i + \dot{x}_i t_i}{\alpha}, \frac{\dot{x}_i t_i}{V_0}, 1 \right\}, \quad i = 1, \dots, N, \\ \Theta_{k+1} &= \Theta_k + \Delta \Theta_{k+1}, \quad |\Delta \Theta_{k+1}| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $x_i^*$  и  $x_i$  – значения глубин проникания, полученные соответственно в эксперименте и по формуле (8), в моменты времени  $t_i$ ,  $N \geq 4$  – число зарегистрированных в экспериментах моментов времени,  $\varepsilon$  – требуемая точность,  $k$  – номер итерации.

Для решения переопределенной системы уравнений (9) относительно компонент вектора приращений  $\Delta \Theta = [\Delta \alpha, \Delta V_0, \Delta x_0]^T$  на каждой итерации применяется метод наименьших квадратов, в соответствии с которым

$$\Delta \Theta = (X^T X)^{-1} X^T \Delta x. \quad (10)$$

Погрешности определения компонент вектора коэффициентов  $\Theta = [\alpha, V_0, x_0]^T$  в (8), соответствующие известной абсолютной погрешности измерений  $\Delta x^*$ , определяются в результате решения системы уравнений (10) при  $\Delta x = \pm \Delta x^*$ . Решением  $\Delta \Theta$  в этом случае будем считать такие интервалы изменения компонент вектора  $\Theta$ , которые при подстановке в (8) дадут среднеквадратичное возмущение решения не более  $(\Delta x^*)^2$ . Таким образом, необходимо выполнение условий

$$\frac{1}{N} \sum_i (x(t_i) - \tilde{x}(t_i))^2 \leq (\Delta x^*)^2,$$

где  $x(t_i)$  определяется по формуле (8) при значениях коэффициентов  $\alpha$ ,  $V_0$  и  $x_0$ , полученных в результате решения системы (10), а

$$\tilde{x}(t_i) = x(t_i, \alpha \pm \Delta \alpha, V_0 \pm \Delta V_0, x_0 \pm \Delta x_0), \quad i = 1, \dots, N.$$

Максимальные значения погрешности определения коэффициентов из уравнений (10) получаются при выборе одинаковых знаков абсолютной погрешности измерений  $\Delta x$  на концах временного интервала (при  $t = t_1$  и  $t = t_N$ ) и противоположных в его внутренних точках. Проведенные расчеты показали, что значения относительных погрешностей коэффициентов уменьшаются с увеличением длительности временного интервала, зарегистрированного в эксперименте, т.е. величины  $\Delta t = t_N - t_1$ , и практически не зависят от значения  $N$  при  $N \geq 4$ . Так, увеличение временного интервала в 1,5 раза приводит к уменьшению погрешности определе-

ния коэффициентов в 2 раза. Варьирование величины  $\Delta x^*$  приводит к пропорциональному изменению погрешности.

3. Для верификации методики проводились численные расчеты проникания в мишень ударника массы  $m$  с начальной скоростью  $V_0$ . В качестве мишени использовался сухой песок естественного состава, засыпанный в стальной контейнер. Начальная плотность песка  $\rho_0 = 1,75 \text{ г/см}^3$ . Контейнер представлял собой стальной цилиндр с внутренним диаметром 13 см и длиной 35 см. Ударник считался жестким, его масса  $m = 80 \text{ г}$ . Осесимметричные расчеты проводились в постановке, соответствующей прямому эксперименту, при  $V_0 = 150$  и  $200 \text{ м/с}$ . Параметры модели Григоряна для грунтовой среды типа песка приведены в [13].

В расчетах требовалось определить интервал внедрения, на котором изменение силы сопротивления пропорционально квадрату скорости внедрения. Для этого необходимо было оценить длительность нестационарной стадии изменения силы сопротивления внедрению, а также время, начиная с которого становится существенным влияние на силу сопротивления отраженных от боковых стенок контейнера волн сжатия. Ранее было показано, что максимального значения сила сопротивления достигает при внедрении полусферы примерно на половину радиуса, далее следует быстрый спад силы, и после внедрения на глубину порядка диаметра сила меняется мало [5, 10].

В расчетах получено, что длительность нестационарной стадии  $t_0 = R/V_0$ , где  $R$  – радиус цилиндрической части ударника. Влияние стенок жесткого контейнера сказывается при  $t = 7t_0$  и  $9t_0$  при  $V_0 = 150$  и  $200 \text{ м/с}$  соответственно.

На рис. 1 пунктирной, штриховой и сплошной линиями изображены расчетные безразмерные сила сопротивления внедрению ( $F/F_0$ ,  $F_0 = 0,5\rho_0 V_0^2 \pi R^2$ ), скорость проникания ( $V/V_0$ ,  $V_0 = 150 \text{ м/с}$  (а) и  $200 \text{ м/с}$  (б)) и глубина внедрения  $x/x_*$  в зависимости от безразмерного времени  $t/t_0$ .

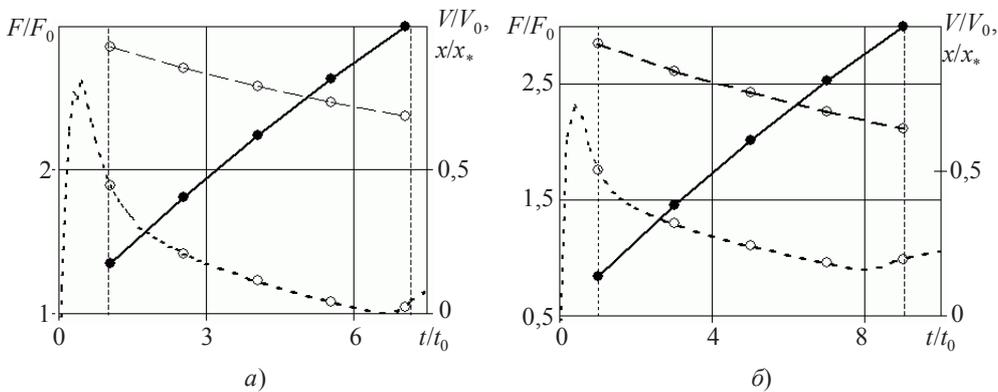


Рис. 1

На рис. 1,а величина  $x_*$  соответствует значению глубины внедрения с начальной скоростью  $150 \text{ м/с}$  на момент времени  $t/t_0 = 7$ , вертикальные пунктирные линии ограничивают искомый интервал внедрения  $1 < t/t_0 < 7$  или  $70\text{--}500 \text{ мкс}$  ( $50\text{--}450 \text{ мкс}$  для  $V_0 = 200 \text{ м/с}$ , рис. 1,б). Темными маркерами выделены значения глубины проникания, которые в качестве «экспериментальных» использовались для определения коэффициента сопротивления по формулам (9), светлыми маркерами – соответствующие значения скорости и силы сопротивления.

На рис. 2 показаны расчетные безразмерные силы сопротивления внедрению ( $F/F_*$ ,  $F_* = 0,5\rho_0 V^2 \pi R^2$ ) в зависимости от безразмерной скорости проникания при  $V_0 = 150$  (а) и 200 м/с (б) соответственно. На квазистационарной стадии внедрения эти значения соответствуют коэффициенту сопротивления  $C_x = F/F_*$ . Темными маркерами показаны значения  $C_x$ , рассчитанные по формулам (9), которые хорошо соответствуют численным результатам. Интервалы погрешности, определенные по формулам (10) при выбранном интервале внедрения и величине погрешности определения глубины проникания  $\Delta x_* = 0,15$  мм, составили  $\pm 19\%$  (а) и  $\pm 12\%$  (б).

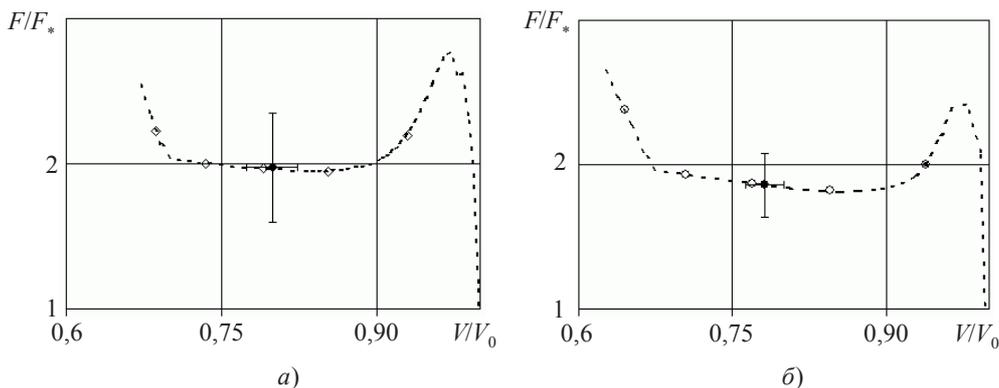


Рис. 2

#### Литература

1. Сагомоян, А.Я. Проникание / А.Я. Сагомоян. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 299 с.
2. Григорян, С.С. Об основных представлениях динамики грунтов / С.С. Григорян // ПММ. – 1960. – Т. 24, №6. – С. 1057–1072.
3. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях / Под ред. Н.Л. Златина, Г.И. Мишина. – М.: Наука, 1974. – 344 с.
4. Баландин, В.В. Экспериментальная методика измерения сил сопротивления при взаимодействии ударника с грунтовой средой / В.В. Баландин, А.М. Брагов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 1991. – С. 101–104.
5. Исследование взаимодействия полусферического ударника с грунтовой средой / В.В. Баландин [и др.] // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2001. – Вып. 63. – С. 141–148.
6. Аллен, У. Динамика проникания снаряда в песок / У. Аллен, Э. Мэйфилд, Г. Моррисон // Механика: Сб. переводов. – 1957. – №6. – С. 125–137.
7. Методика определения ударной адиабаты мягких грунтов по результатам обращенных экспериментов / А.М. Брагов [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2006. – Т. 32. – Вып. 11. – С. 52–55.
8. Григорян, С.С. Новый закон трения и механизм крупномасштабных горных обвалов и оползней / С.С. Григорян // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, №4. – С. 846–849.
9. Пакет программ «Динамика-2» для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами / В.Г. Баженов [и др.] // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, №6. – С. 67–72.
10. Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт / В.Г. Баженов [и др.] // ПММ. – 2003. – Т. 67, №6. – С. 686–697.
11. Баженов, В.Г. Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе моделей локального взаимодействия / В.Г. Баженов, В.Л. Котов // ПММ. – 2010. – Т. 74, №3. – С. 391–402.
12. Баженов, В.Г. Модификация численной схемы Годунова применительно к решению

задач импульсного нагружения мягких грунтов / В.Г. Баженов, В.Л. Котов // ПМТФ. – 2002. – Т. 43, №4. – С. 139–149.

13. *Баженов, В.Г.* Экспериментально-теоретическое исследование процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред / В.Г. Баженов, А.М. Брагов, В.Л. Котов // ПМТФ. – 2009. – Т. 50, №6. – С. 115–125.

[16.09.2011]

#### **THE NUMERICAL ANALYSIS OF THE DIRECT EXPERIMENTAL METHOD OF PENETRATION OF A SEMISPHERE STRIKER INTO A SAND MEDIUM**

**V.L. Kotov, VI.VI. Balandin, E.Yu. Linnik, VI.V. Balandin**

The results of the numerical experiments concerned evaluating the resistance forces applied to a cylindrical striker with a semispherical cap on a quasi-stationary stage of penetration into a dry sand soil are presented. The parameters of the equation of motion in the Poncelet's form (acceleration of penetrating body is proportional to the square of velocity) are obtained on the basis of the depth of penetration dependences on the time after penetration of the head part. As a result of numerical analysis the conditions of the direct experiment performed with high-speed photographic technique providing percentage error not more than 15–20% under velocities 150–200 m/sec are determined.

*Keywords:* impact, penetration, spherical striker, soil medium, numerical experiment, error, Godunov's scheme.