

УДК 539.3

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ВЫПУЧИВАНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ СЖАТИИ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ<sup>\*)</sup>

А.А. Артемьева, А.И. Кибец, Ю.И. Кибец, Д.В. Шошин

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского*

Приводятся результаты численного моделирования упругопластического деформирования, потери устойчивости и закритического поведения сферических оболочек при сжатии внешним давлением. Для решения задачи применяются метод конечных элементов и явная схема интегрирования по времени типа «крест». Результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* сферическая оболочка, пластические деформации, потеря устойчивости, критическая нагрузка, метод конечных элементов, эксперимент.

Обзор существующих в настоящее время подходов к решению задач устойчивости сферических оболочек и результатов исследований содержат работы [1–4]. Результаты численного решения задачи в осесимметричной постановке изложены в [5–7]. Ниже приводятся результаты конечно-элементного моделирования выпучивания упругопластических сферических оболочек в трехмерной постановке, которая позволяет исследовать как осесимметричные, так и неосесимметричные формы потери устойчивости. Достоверность результатов расчетов подтверждается экспериментальными данными.

### Определяющая система уравнений

Деформирование конструкции описывается в переменных Лагранжа с позиций механики сплошных сред. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей работы:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{U}_i \delta \dot{U}_i dV = \int_{\Gamma} P_i \delta \dot{U}_i d\gamma \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

где  $\dot{U}_i$  – компоненты вектора скорости перемещения в общей декартовой системе координат  $X_i$ ;  $\sigma_{ij}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  – компоненты тензоров напряжений Коши и скоростей дефор-

<sup>\*)</sup> Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4807.2010.8), а также при поддержке РФФИ (проекты 11-08-00557-а, 11-08-97023-р\_поволжье\_а).

маций (симметричной части градиента скорости перемещений);  $\rho$  – плотность;  $P_i$  – распределенная нагрузка;  $\Omega$  – исследуемая область;  $\Gamma$  – зона действия внешнего давления;  $\delta\dot{\epsilon}_{ij}$ ,  $\delta\dot{U}_i$  – вариации  $\dot{\epsilon}_{ij}$ ,  $\dot{U}_i$  (на поверхности с заданными кинематическими граничными условиями  $\delta\dot{U}_i = 0$ ); точка над символом означает частную производную по времени  $t$ ; по повторяющимся индексам ведется суммирование. Компоненты тензора скорости деформаций определяются в метрике текущего состояния:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}(\dot{U}_{i,j} + \dot{U}_{j,i}) \quad (i, j = \overline{1,3}), \\ \dot{U}_{i,j} &= \frac{\partial \dot{U}_i}{\partial X_j}, \quad X_i = X_i|_{t=0} + \int_0^t \dot{U}_i dt.\end{aligned}\tag{2}$$

Уравнения состояния устанавливаются отдельно для шаровых  $\dot{\epsilon}^v$ ,  $\sigma^v$  и девиаторных  $\dot{\epsilon}'_{ij}$ ,  $\sigma'_{ij}$  составляющих скоростей деформаций и напряжений. Связь шаровых компонент скоростей деформаций и напряжений имеет вид:

$$\dot{\sigma}^v = -3K\dot{\epsilon}^v, \quad \dot{\epsilon}^v = \frac{1}{3}(\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}),\tag{3}$$

где  $K$  – коэффициент объемного сжатия. При упругопластическом деформировании девиаторные составляющие скорости деформации  $\dot{\epsilon}'_{ij}$  раскладываются на пластические  $\dot{\epsilon}'_{ij}{}^p$  и упругие  $\dot{\epsilon}'_{ij}{}^e$  компоненты:

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}'_{ij}{}^e + \dot{\epsilon}'_{ij}{}^p, \quad \dot{\epsilon}'_{11}{}^p + \dot{\epsilon}'_{22}{}^p + \dot{\epsilon}'_{33}{}^p = 0.\tag{4}$$

Девиаторные составляющие тензора напряжений вычисляются с помощью соотношений теории течения с кинематическим и изотропным упрочнением:

$$\begin{aligned}D_j \sigma'_{ij} &= 2G\dot{\epsilon}'_{ij}{}^e, \quad \dot{\epsilon}'_{ij}{}^p = \lambda S_{ij}, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}, \\ \rho_{ij} &= \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt, \quad \dot{\rho}_{ij} = 2g\dot{\epsilon}'_{ij}{}^p, \\ S_{ij} S_{ij} &\leq \frac{2}{3} \sigma_T^2, \quad \sigma_T = \sigma_T(\chi, \dot{I}_{2\varepsilon}), \\ \dot{I}_{2\varepsilon} &= \sqrt{2/3}(\dot{\epsilon}'_{ij}{}^p \dot{\epsilon}'_{ij}{}^p)^{1/2}, \quad \chi = \int_0^t \dot{I}_{2\varepsilon} dt.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь  $D_j$  – производная по Яуманну,  $G$  – модуль сдвига,  $g$  – модуль кинематического упрочнения,  $S_{ij}$  и  $\rho_{ij}$  – компоненты тензоров соответственно активных напряжений и микронапряжений;  $\sigma_T$  – предел текучести,  $\lambda$  – параметр, тождественно равный нулю при упругом деформировании и определяемый из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки при упругопластическом деформировании.

Система уравнений (1)–(5) дополняется начальными и кинематическими граничными условиями.

### Метод решения

Решение определяющей системы уравнений (1)–(5) основано на методе конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест» [8]. Расчетная область покрывается лагранжевой сеткой из 8-узловых конечных элементов. В узлах сетки определяются перемещения  $U$ , скорости  $\dot{U}$  и ускорения  $\ddot{U}$  в общей системе координат  $X_i$ , используемой для стыковки конечных элементов (КЭ). В каждом элементе вводится локальный прямоугольный базис  $x_i$ , отслеживающий вращение элемента как жесткого целого пошаговым пересчетом направляющих косинусов его осей. С помощью полилинейного изопараметрического преобразования конечный элемент, в общем случае искаженный, отображается на куб. Компоненты скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}$  в КЭ аппроксимируются линейными функциями:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^0 + \alpha_1 \dot{\epsilon}_{ij}^1 \xi_1 + \alpha_2 \dot{\epsilon}_{ij}^2 \xi_2 + \alpha_3 \dot{\epsilon}_{ij}^3 \xi_3. \quad (6)$$

Здесь, по аналогии с теорией оболочек,  $\dot{\epsilon}_{ij}^0$  – значения компонент тензора скоростей деформаций в центре КЭ (безмоментные составляющие), а  $\dot{\epsilon}_{ij}^k = \partial \dot{\epsilon}_{ij} / \partial \xi_k = \text{const}$  – их градиенты (моментные составляющие). Чтобы не завывать сдвиговую жесткость элемента, в (6) учитываются только компоненты  $\dot{\epsilon}_{ij}^k$ , соответствующие изгибающим и крутящим моментам в теории оболочек типа Тимошенко [9]. Весовые коэффициенты  $\alpha_k$  вводятся для регулирования влияния моментных составляющих скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}^k$  на численное решение ( $0 < \alpha_k \leq 1$ ,  $k = 1, 3$ ). На основе (6) разработано семейство конечных элементов для моделирования сложных составных конструкций.

Мощность виртуальной работы в каждом конечном элементе выражается через матрицу масс, узловые ускорения и статически эквивалентные узловые силы. Для выполнения интегрирования в уравнении баланса виртуальных мощностей (1) применяются квадратурные формулы. После замены интегрирования по области  $\Omega$  суммированием по элементам получается дискретный аналог уравнений движения (1):

$$[M] \{\ddot{U}\} = \{F\}, \quad (7)$$

где  $[M]$  – диагональная матрица масс;  $\{\ddot{U}\}$ ,  $\{F\}$  – векторы, составленные из ускорений узлов КЭ-сетки и результирующих узловых сил в общей системе координат. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (7) интегрируется по явной конечно-разностной схеме типа «крест». Шаг интегрирования во времени  $\Delta t^{k+1}$  определяется из условия устойчивости Куранта.

### Результаты решения

Изложенная методика реализована в рамках вычислительной системы «Динамика-3» [10]. Для верификации численной методики и ее программной реализации был решен ряд тестовых задач.

Рассмотрена задача [6] упругопластического деформирования, потери устойчивости и закритического поведения жестко защемленной по контуру полусферической оболочки (радиус  $R = 1,443$  см, толщина  $h = 0,1$  см) при равномерном сжатии внешним давлением.

Оболочка выполнена из дюралевого сплава АД1. Для определения критической нагрузки применялся метод продолжения по параметру. Согласно этому мето-

ду внешняя нагрузка увеличивалась пропорционально времени до потери устойчивости. Скорость нарастания внешнего давления выбиралась из условия квазистатического нагружения, исключающего динамические эффекты. Устойчивость оболочки оценивалась по графику изменения во времени прогиба в ее полюсе и по форме ее конечно-элементной сетки (рис. 1). По расчетным данным потеря устойчивости в рассматриваемом варианте задачи происходит при достижении интенсивностью напряжений предела текучести. Критическое давление составляет 7,6 МПа. Значение критической нагрузки с точностью до 5% совпадает с расчетными данными [6]. Такое же соответствие результатов наблюдается и при сопоставлении формы оболочки на различных этапах деформирования после потери устойчивости. Учет пластических деформаций приводит к существенному снижению критической нагрузки.

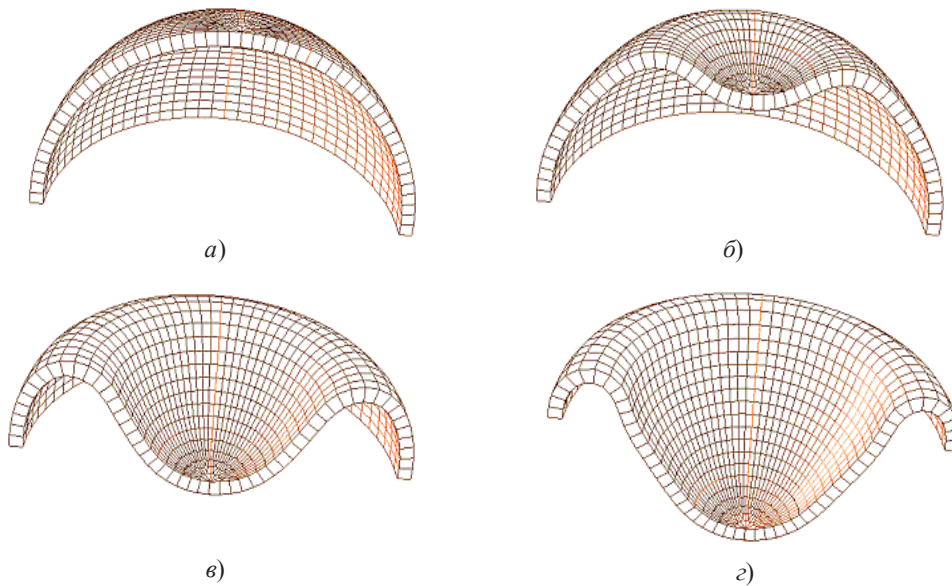
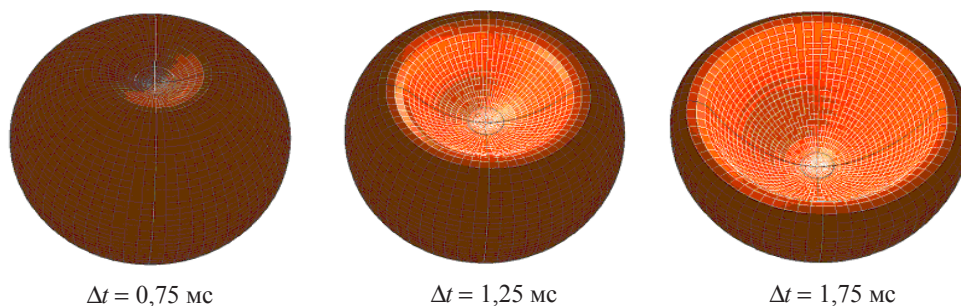


Рис. 1

Проведен конечно-элементный анализ потери устойчивости и упругопластического выпучивания медной сферы (отношение начального радиуса к толщине оболочки  $R_0/h_0 = 23,4$ ) при нагружении сжимающим давлением, равномерно распределенным по внешней поверхности. Как и в предыдущей задаче, нагрузка постепенно увеличивалась во времени до потери устойчивости. Для инициирования потери устойчивости на части оболочки задавался ее начальный прогиб, линейно распределенный по углу поворота с максимальным значением  $0,01h_0$ . Результаты численного решения задачи представлены на рис. 2–4.

На рис. 2, 3 изображены КЭ-сетки оболочки и контуры верхней половины ее образующей для различных временных слоев, отсчитываемых от начала потери устойчивости. На рис. 4 сравниваются остаточные конфигурации верхней половины оболочки, полученные в расчете (пунктирная линия) и в эксперименте [5] (сплошная линия). На начальном этапе узлы конечно-элементной сетки оболочки смещаются внутрь исходной сферы: для любого узла оболочки ее текущий радиус  $r \leq R_0$ . Когда максимальный прогиб оболочки достигает величины приблизительно  $3/4$  начального радиуса  $R_0$ , под действием меридиональных напряжений сегмент оболочки

за точкой перегиба вне вмятины выходит за пределы начальной конфигурации.



$\Delta t = 0,75 \text{ мс}$

$\Delta t = 1,25 \text{ мс}$

$\Delta t = 1,75 \text{ мс}$

Рис. 2

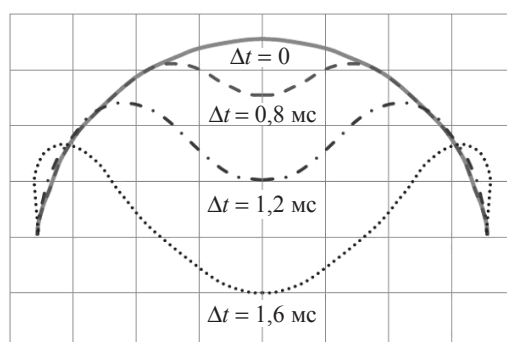


Рис. 3

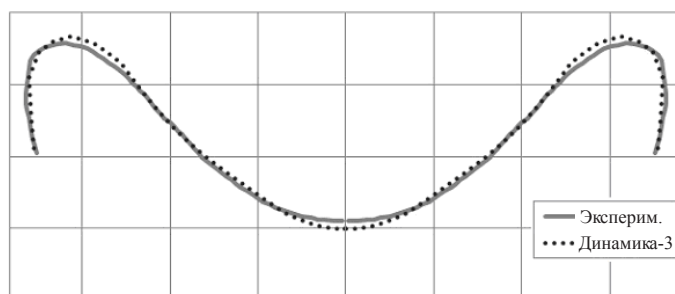


Рис. 4

Из рис. 2–4 видно, что в процессе деформирования происходит значительное изменение формы оболочки. Расхождение расчетного и экспериментального значений максимального прогиба в остаточном положении составляет 6%.

В рассмотренных задачах как в эксперименте, так и в расчетах неосесимметричных форм потери устойчивости не возникало. При сжатии замкнутой сферической оболочки равномерным внешним давлением потеря устойчивости происходит только с одной стороны, что подтверждается экспериментом. Такое изменение формы является устойчивым. Даже при одновременном образовании вмятин на двух полюсах развивается только одна из них – та, в которую переходит вся энергия деформирования. Выпучивание же оболочки на противоположной стороне затухает.

Таким образом, полученные результаты показали, что вычислительный комплекс «Динамика-3» [10] и реализованная в нем конечно-элементная методика [8] позволяют качественно правильно и количественно удовлетворительно описывать большие формоизменения сферической оболочки и оценивать величину критической нагрузки при потере устойчивости.

#### *Литература*

1. *Вольмир, А.С.* Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. *Григолюк, Э.И.* Механика деформирования сферических оболочек / Э.И. Григолюк, В.И. Мамай. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 114 с.
3. *Гудрамович, В.С.* Устойчивость упругопластических оболочек / В.С. Гудрамович. – Киев: Наукова думка, 1987. – 216 с.
4. *Ruan, H.H.* Crushing of thin-walled spheres and sphere arrays / H.H. Ruan, Z.Y. Gao, T.X. Yu // *Int. J. of Mechanical Sciences*. – 2006. – V. 48. – P. 117–133.
5. *Рябов, А.А.* Численное исследование упругопластического выпучивания сферической оболочки / А.А. Рябов, В.И. Романов, С.В. Зефириков // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 1999. – С. 125–128.
6. *Якушев, В.Л.* Потеря устойчивости полусферических оболочек при пластических деформациях / В.Л. Якушев // Труды XVIII Международ. конф. по теории оболочек и пластин. – Саратов, 1997. – Т. 2. – С. 136–141.
7. Конечно-элементный анализ устойчивости упругопластической сферической оболочки при всестороннем сжатии / А.А. Артемьева [и др.] // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №3(1). – С. 158–162.
8. Верификация конечно-элементного решения трехмерных нестационарных задач упругопластического деформирования, устойчивости и закритического поведения оболочек / А.А. Артемьева [и др.] // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, №2. – С. 5–14.
9. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А.С. Сахарова, И. Альтенбаха. – Киев: Вища школа; Лейпциг: ФЭБ Фахбухферлаг, 1982. – 480 с.
10. Программный продукт «Пакет прикладных программ для решения трехмерных задач нестационарного деформирования конструкций, включающих массивные тела и оболочки, «Динамика-3» (ППП «Динамика 3»). Сертификат соответствия Госстандарта России № РОСС RU.ME20.H00338/2000.

[28.10.2011]

#### **FINITE ELEMENT SOLUTION OF ELASTIC-PLASTIC BULGING PROBLEM FOR A SPHERICAL SHELL UNDER QUASISTATIC COMPRESSION IN 3D FORMULATION**

**A.A. Artemyeva, A.I. Kibets, Yu.I. Kibets, D.V. Shoshin**

The results of numerical modeling of elastic-plastic deformation, loss of stability and supercritical behavior of spherical shells under applied compression pressure are presented. The solution of the problem is obtained using finite element method and explicit cross-type time-integration scheme. The numerical results are compared with the experimental data.

*Keywords:* spherical shell, plastic deformations, loss of stability, ultimate load, finite element method, experiment.