

УДК 539.3

**О ФОРМЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ В ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ
ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЖЕСТКОЙ ОБОЛОЧКИ,
ОБЛАДАЮЩЕЙ МИНИМАЛЬНОЙ МАССОЙ
И НАИМЕНЬШЕЙ СИЛОЙ СОПРОТИВЛЕНИЯ^{*)}**

Н.В. Баничук¹, С.Ю. Иванова¹, Ф. Рагнетта², М. Серра²

¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

²*Университет г. Кальяри, Италия*

Отыскание формы оболочки вращения минимальной массы и сопротивления рассматривается как задача многокритериальной (многоцелевой) оптимизации. Полная сила сопротивления и масса материала оболочки принимаются в качестве компонент минимизируемого векторного критерия. Форма осесимметричной оболочки играет роль искомой переменной проектирования. Аналитические исследования оптимального решения проводятся с использованием вариационного анализа. Получено точное решение сформулированной многоцелевой задачи оптимизации. Приводятся найденные Парето-фронт и величины оптимизируемых функционалов в зависимости от параметров задачи.

Ключевые слова: многоцелевая оптимизация, проникание в деформируемую среду, форма ударников.

Введение

В настоящей работе обсуждаются вопросы многоцелевой оптимизации жесткой тонкостенной оболочки вращения, движущейся в сплошной деформируемой среде и обладающей минимальными сопротивлением и массой. Рассматриваемая задача относится к кругу проблем многоцелевой оптимизации, возникающих последнее время в механике и ее приложениях. Подобные задачи, как и классические оптимизационные задачи со скалярным критерием, допускают эффективное применение традиционных методов вариационного исчисления. Первые работы, посвященные применению многоцелевой оптимизации в механике, опубликованы Стадлером [1–3], Эшенауэром [4], Эшенауэром, Коски, Осичкой [5] и др. Отметим также обзор Стадлера [6] по многокритериальной оптимизации в механике и монографию Миттенен [7], посвященную нелинейным проблемам многоцелевой оптимизации. Одной из перспективных областей применения подходов и методов многокритериальной оптимизации является тематика высокоскоростного внедрения

^{*)} Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №11-08-00030а, Программы фундаментальных исследований ОЭМПУ РАН №13 и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 3288.2010.1).

жестких тел в деформируемую среду и связанные с ней проблемы пробивания. Отметим, тем не менее, что современные оптимизационные исследования концентрируются в этой области вокруг минимизации или максимизации скалярных функционалов. Так Аптуков и Поздеев [8] исследовали минимаксную проблему определения формы ударника (осесимметричного тела), проникающего в деформируемую среду на максимальную глубину в случае наилучшего распределения свойств слоистых материалов. Оптимальному торможению твердого тела неоднородной пластиной были посвящены статьи [9, 10]. В этом контексте следует также отметить статью [11] и монографию [12]. Отметим также исследование Остапенко и др. [13], посвященное численному определению формы оптимальных поперечных сечений трехмерных конических ударников, проникающих в конденсированную среду на максимальную глубину, и работу Остапенко и Якуниной [14], посвященную проблеме проникания тонких тел с подобными поперечными сечениями.

Значительный вклад в изучение проблемы высокоскоростного проникания твердых тел в деформируемую среду был внесен Бен-Дором, Дубинским и Элпериным [15–19]. Данная проблематика освещена этими авторами также в монографии [20].

1. Постановка задачи оптимизации

Рассмотрим высокоскоростное движение абсолютно жесткой оболочки вращения в твердой упругопластической среде с постоянной скоростью v . Оболочка характеризуется толщиной t , длиной x_f (рис. 1) а также радиусом r затупленной носовой части и радиусом R концевой части. Форма оболочки задается путем вращения кривой $y = y(x)$ вокруг оси x на угол 2π , причем $0 \leq x \leq x_f$. Радиус R является заданной величиной $y(x_f) = R$.

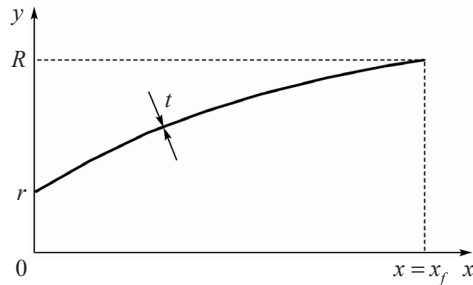


Рис. 1

В качестве неизвестных величин, подлежащих определению, рассматривается функция $y(x)$, длина оболочки x_f и радиус затупленной части $y(0) = r$. Масса тонкостенной затупленной оболочки задается формулой

$$M = 2\pi t \rho_{sh} \left(\int_0^{x_f} y \sqrt{1 + y_x^2} dx + \frac{r^2}{2} \right), \quad (1)$$

где ρ_{sh} – плотность оболочки, $y_x = dy/dx$ – производная функции $y(x)$. Для удобства дальнейших рассмотрений введем соотношение

$$r^2 = R^2 - 2 \int_0^{x_f} y y_x dx \quad (2)$$

и запишем выражение для массы материала оболочки в виде

$$M = 2\pi t \rho_{sh} \left(\int_0^{x_f} y \left(\sqrt{1 + y_x^2} - y_x \right) dx + \frac{R^2}{2} \right). \quad (3)$$

Для оценки силы сопротивления D воспользуемся результатами работы Форрестала и Жоу [21]. Будем иметь следующее выражение для нормальных напряжений, возникающих на поверхности движущейся оболочки, полученное на основе феноменологических предположений и проведенных экспериментов:

$$\begin{aligned} \sigma(v) &= \sigma_* [a_0 + a_1 k v_n + a_2 (k v_n)^2] = \\ &= \sigma_* \left[a_0 + a_1 k v \frac{y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}} + a_2 (k v)^2 \frac{y_x^2}{1 + y_x^2} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $k = \sqrt{\rho_m / \sigma_*}$, где ρ_m и σ_* – соответственно плотность и прочность при одноосном сжатии рассматриваемой деформируемой среды (σ_* играет роль масштабного коэффициента), v_n – нормальная составляющая вектора скорости, a_0, a_1, a_2 – заданные положительные постоянные среды [20, 21].

Интегрирование нормальных напряжений (4) по боковой поверхности оболочки и по поверхности загупленного носика и использование соотношения (2) приводит к следующему выражению для силы сопротивления:

$$D = \pi R^2 \sigma_* \left\{ a_0 + a_1 k v \left[1 - \frac{2I_1}{R^2} \right] + a_2 (k v)^2 \left[1 - \frac{2I_2}{R^2} \right] \right\}, \quad (5)$$

где

$$I_1 = \int_0^{x_f} y y_x \left(1 - \frac{y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}} \right) dx, \quad I_2 = \int_0^{x_f} \frac{y y_x}{1 + y_x^2} dx. \quad (6)$$

В проводимых ниже рассмотрениях в предположении, что $a_1 = 0$ ($a_0 = 4,8$; $a_2 = 1,5$ для алюминиевой среды [20]), минимум силы сопротивления D реализуется при условии, что достигает максимума интеграл I_2 . Максимизация этого интеграла осуществляется путем минимизации функционала $I_D = -I_2(y)$ по y . Таким образом, рассматривается задача предельного уменьшения массы оболочки (что означает снижение массы дорогостоящего материала) при одновременном уменьшении силы сопротивления, действующей на проникающее тело, т.е. решается проблема уменьшения затрат при максимизации эффекта проникания ударника.

Набор величин $h = \{r, x_f, y(x), 0 \leq x \leq x_f\}$ принимается в дальнейшем в качестве искомой переменной проектирования, подчиненной ограничению

$$h \in \Lambda_h = \{0 \leq r, 0 < x_f, y(x) \subset C, 0 \leq x \leq x_f, y(x_f) = R\}. \quad (7)$$

Задача минимизации силы сопротивления и массы оболочки формулируется в следующем виде:

$$J_* = J(h_*) = \min_{h \in \Lambda_h} \left\{ \begin{array}{l} J_D \\ J_M \end{array} \right\}, \quad (8)$$

где

$$J_D = -I_2 = -\int_0^{x_f} \frac{yy_x}{1+y_x^2} dx, \quad J_M = \frac{M}{2\pi t \rho_{sh}} - \frac{R^2}{2} = \int_0^{x_f} y \left(\sqrt{1+y_x^2} - y_x \right) dx. \quad (9)$$

Операция минимизации в (8) рассматривается в смысле Парето. Это означает, что выражение

$$h_* = \arg \min_{h \in \Lambda_h} J(h) \quad (10)$$

является оптимальным решением сформулированной задачи с векторным функционалом, если не существует другой переменной проектирования \tilde{h} , удовлетворяющей условию (7), такой, что

$$J_i(\tilde{h}) \leq J_i(h_*), \quad i = D, M, \quad (11)$$

и, по крайней мере, для одной из компонент (j -й) векторного функционала выполняется строгое неравенство:

$$J_j(\tilde{h}) < J_j(h_*). \quad (12)$$

Заметим, что минимизируемый векторный функционал J явно зависит от искомым величин (длины оболочки x_j и функции $y(x)$) и неявно от оптимизируемого радиуса r затупленного носика оболочки.

2. Определение оптимальных в смысле Парето форм оболочек

Для решения многоцелевой задачи оптимизации (7)–(9) применим метод целевого взвешивания. Построим функционал взвешивания (функционал предпочтений) J_C в виде суммы целевых функционалов J_D и J_M :

$$J_C = C_D J_D + C_M J_M, \quad (13)$$

где весовые коэффициенты C_D и C_M удовлетворяют условиям

$$C_D \geq 0, \quad C_M \geq 0, \quad C_D + C_M = 1. \quad (14)$$

Под J_D и J_M в (13) будем понимать безразмерные величины $\tilde{J}_D = J_D/J_D^0$, $\tilde{J}_M = J_M/J_M^0$, где J_D^0 и J_M^0 – некоторые характерные величины сопротивления и массы (знак тильды у рассматриваемых безразмерных величин в соотношении (13) и в дальнейшем опускается).

В соответствии с применяемым методом целевого взвешивания решение многоцелевой задачи оптимизации (7)–(9) и отыскание множества оптимальных в смысле Парето форм оболочек сводится к решению задачи минимизации скалярного функционала (13) при ограничениях (14), наложенных на весовые коэффициенты:

$$J_C^* = J_C(h_*) = \min_{h \in \Lambda_h} J_C(h). \quad (15)$$

Представим минимизируемый скалярный функционал J_C в виде

$$J_C = \int_0^{x_f} f dx, \quad (16)$$

где

$$f = -C_D \frac{yy_x}{1+y_x^2} + C_M y \left(\sqrt{1+y_x^2} - y_x \right).$$

Первый интеграл уравнения Эйлера для функционала (16) записывается в форме

$$f - y_x f_{y_x} = -2C_D \frac{yy_x^3}{(1+y_x^2)^2} + C_M \frac{y}{\sqrt{1+y_x^2}} = K, \quad 0 \leq x \leq x_f, \quad (17)$$

где K – произвольная постоянная интегрирования. Необходимые условия экстремума в точках $x = 0$ и $x = x_f$, обусловленные вариациями свободных параметров $r=y(0)$ и x_f , принимают вид:

$$(f_{y_x})_{x=0} = y \left[-C_D \frac{1-y_x^2}{(1+y_x^2)^2} + C_M \left(\frac{y_x}{\sqrt{1+y_x^2}} - 1 \right) \right]_{x=0} = 0, \quad (18)$$

$$(f - y_x f_{y_x})_{x=x_f} = \left[-2C_D \frac{yy_x^3}{(1+y_x^2)^2} + C_M \frac{y}{\sqrt{1+y_x^2}} \right]_{x=x_f} = 0. \quad (19)$$

Из соотношений (17) и (19) вытекает, что $K = 0$, и, следовательно,

$$-2C_D \frac{y_x^3}{(1+y_x^2)^{3/2}} + C_M = 0, \quad 0 \leq x \leq x_f. \quad (20)$$

Используя далее условие нормализации (14) ($C_M = 1 - C_D$) и вводя обозначение

$$\alpha = \frac{C_M}{C_D} = \frac{1}{C_D} - 1, \quad (21)$$

запишем необходимые условия экстремума для функционала J_C в следующем виде:

$$-2 \frac{y_x^3}{(1+y_x^2)^{3/2}} + \alpha = 0, \quad 0 \leq x \leq x_f, \quad (22)$$

$$y \left[-\frac{1-y_x^2}{(1+y_x^2)^2} + \alpha \left(\frac{y_x}{\sqrt{1+y_x^2}} - 1 \right) \right] = 0, \quad x = 0. \quad (23)$$

Отсюда с учетом соотношения (22) получим

$$y_x = K_0, \quad K_0 = \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{1/3} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2/3} \right]^{-1/2}, \quad 0 < \alpha < 2, \quad 0 \leq x \leq x_f. \quad (24)$$

Интегрируя уравнение (24) и используя граничное условие $y(x_f) = R$, придем к следующему представлению для оптимальных форм оболочек, составляющих множество оптимальных в смысле Парето форм:

$$y = K_0(x - x_f) + R, \quad 0 \leq x \leq x_f. \quad (25)$$

С учетом условия $y(0) = 0$, вытекающего из условия трансверсальности (23), получим следующее выражение для длины оболочки:

$$x_f = \frac{R}{K_0}. \quad (26)$$

По поводу возможности обращения в нуль выражения, записанного в квадратных скобках в условии трансверсальности (23), см. ниже замечание 1. Таким образом, оптимальные (в смысле Парето) тонкостенные оболочки, обладающие минимальным сопротивлением и массой, имеют коническую форму $y = K_0 x$ с острым носиком, причем длина оболочки и тангенс угла наклона ее поверхности K_0 зависят от параметра α , т.е. от весовых коэффициентов C_D и C_M . На рис. 2 показаны зависимости $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x})$ в безразмерных координатах $\tilde{y} = y/R$, $\tilde{x} = x/R$ с использованием обозначений $\tan \psi^i = (K_0)^i$, $i = 1, 2, \dots$

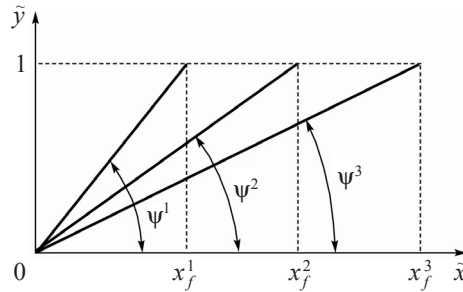


Рис. 2

Найденным оптимальным формам соответствуют следующие значения минимизируемых функционалов:

$$J_D = - \int_0^{x_f} \frac{yy_x}{1+y_x^2} dx = - \frac{R^2}{2(1+K_0^2)}, \quad (27)$$

$$J_M = \int_0^{x_f} y(\sqrt{1+y_x^2} - y_x) dx = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\sqrt{1+K_0^2}}{K_0} - 1 \right) \quad (28)$$

и следующие Парето-оптимальные величины сопротивления D и массы M :

$$D = \pi R^2 \sigma_* a_0 \left[1 + \frac{a_2}{a_0} (kv)^2 \frac{K_0^2}{1+K_0^2} \right], \quad (29)$$

$$M = \pi R^2 t \rho_{sh} \frac{\sqrt{1+K_0^2}}{K_0}. \quad (30)$$

Уравнение, описывающее Парето-фронт, как это следует из найденных выражений (29), (30), имеет вид

$$\tilde{D} = 1 + \frac{\beta}{\tilde{M}^2}, \quad \beta = \frac{a_2}{a_0} (kv)^2 \quad (31)$$

в переменных

$$\tilde{D} = \frac{D}{\pi R^2 \sigma_* a_0}, \quad \tilde{M} = \frac{M}{\pi R^2 t \rho_{sh}}. \quad (32)$$

Парето-фронт показан на рис. 3, а на рис. 4 представлены зависимости функционалов \tilde{D} и \tilde{M} от соотношения α весовых коэффициентов C_M и C_D ($\alpha = C_M/C_D$).

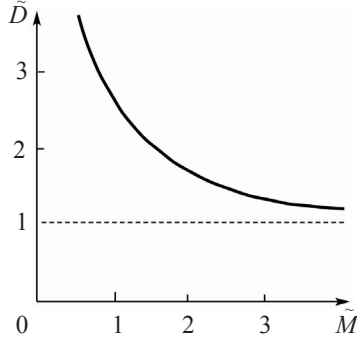


Рис. 3

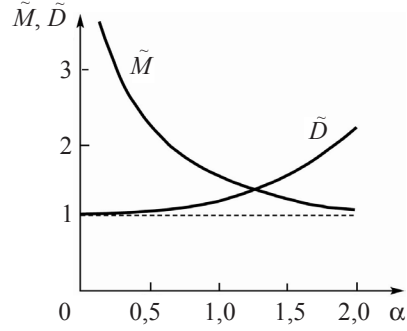


Рис. 4

Замечание 1. В настоящей работе были определены оптимальные формы тонкостенных оболочек, имеющие острый носик ($y(0) = 0$). Для отыскания решения применялось условие трансверсальности (23), записанное в точке $x = 0$, и использовалось частное решение ($y(0) = 0$) этого уравнения. Покажем здесь, что $y(0) = 0$ является единственным решением уравнения (23), то есть

$$g(y_x) \equiv -\frac{1-y_x^2}{(1+y_x^2)^2} + \alpha \left(\frac{y_x}{\sqrt{1+y_x^2}} - 1 \right) \neq 0 \quad (33)$$

на интервале $0 < \alpha < 2$. С этой целью воспользуемся представлениями (24), несколько их видоизменив:

$$\frac{\alpha}{2} = t, \quad 0 < t < 1, \quad y_x = K_0 \equiv \frac{t^{1/3}}{\sqrt{1-t^{2/3}}}, \quad (34)$$

и выполним следующее алгебраическое преобразование:

$$g(K_0) = (2t^{2/3} - 1)(1 - t^{2/3}) + 2t(t^{1/3} - 1) = (1 - t^{1/3})(2t^{2/3} - 1 - t^{1/3}).$$

Принимая во внимание, что $t^{2/3} < t^{1/3}$ для $0 < t < 1$, будем иметь

$$g(K_0) < (1 - t^{1/3})(t^{1/3} - 1) = -(1 - t^{1/3})^2 < 0, \quad (35)$$

и, следовательно, отсутствуют другие решения уравнения трансверсальности, кроме $y(0) = 0$. Таким образом, показана единственность представления многокритериальной задачи оптимизации в форме (25), (26).

Замечание 2. При изменении постановки рассмотренной выше задачи многоцелевой оптимизации и фиксировании параметра задачи r ($r \leq R$ – задается априо-

ри) следует исключить из рассмотрения условие трансверсальности (23). В этом случае использование представления (25) и граничного условия $y(0) = r$ приводит к следующему выражению для длины оптимальной оболочки:

$$x_f = \frac{R - r}{K_0}. \quad (36)$$

Таким образом, в этом случае оптимизируемая тонкостенная оболочка минимальной массы и наименьшего сопротивления имеет форму усеченного конуса с затупленной носовой частью.

Заключение

В работе представлена формулировка многокритериальной задачи оптимизации формы жесткой оболочки вращения, движущейся в деформируемой среде с постоянной скоростью и характеризующейся минимальной массой материала и минимальной силой сопротивления внешней среды. Получены необходимые условия оптимальности для рассматриваемой многокритериальной задачи оптимизации формы оболочки и проведен анализ оптимальных в смысле Парето решений. Учет при анализе условий оптимальности возможного появления затупленной носовой части в данной постановке задачи позволил доказать, что оптимальные оболочки обладают заостренным кончиком и конической формой. Аналитическое решение многокритериальной задачи оптимизации найдено для всех допустимых значений рассматриваемых параметров задачи.

Литература

1. *Stadler, W.* Preference optimality and application of Pareto-optimality / W. Stadler // *Multicriteria decision making* (Eds: Marzollo/Leitmann), CISM Courses and lectures. – Berlin: Springer, 1975. – P. 125–225.
2. *Stadler, W.* Natural structural shapes (the static case) / W. Stadler // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. – 1978. – V. 31. – P. 169–217.
3. *Stadler, W.* Stability of the natural shapes of sinusoidally loaded uniform shallow arches / W. Stadler // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. – 1983. – V. 34. – P. 1–22.
4. *Eschenauer, H.A.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity / H.A. Eschenauer. – Siegen, Bonn-Fries: Druckerei und Verlag, 1986. – 309 p.
5. *Eschenauer, H.A.* Multicriteria optimization – Fundamental and motivation / H.A. Eschenauer, J. Koski, A. Osyczka // *Multicriteria design optimization* / Eds. H. Eschenauer, J. Koski, A. Osyczka. – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – P. 1–32.
6. *Stadler, W.* Multicriteria optimization in mechanics (A survey) / W. Stadler // *Applied Mechanics Review*. – 1984. – V. 37, No 3. – P. 227–286.
7. *Miettinen, K.M.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity / M.K. Miettinen. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 298 p.
8. *Аптуков, В.Н.* Некоторые минимаксные задачи технологии и прочности конструкций / В.Н. Аптуков, А.А. Поздеев // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. – 1982. – №1. – С. 47–55.
9. *Аптуков, В.Н.* Оптимальное торможение твердого тела неоднородной пластиной при ударе по нормали / В.Н. Аптуков, Г.И. Петрухин, А.А. Поздеев // *Изв. АН СССР. МТТ*. – 1985. – №1. – С. 165–170.
10. *Аптуков, В.Н.* Оптимизация структуры слоистой плиты при проникании жесткого ударника / В.Н. Аптуков, В.Л. Белоусов, М.А. Каниболотский // *Механика композитных материалов*. – 1986. – №2. – С. 252–257.
11. *Аптуков, В.Н.* Оптимальная структура неоднородной пластины с непрерывным распределением свойств по толщине / В.Н. Аптуков // *Изв. АН СССР. МТТ*. – 1985. – №3. – С. 149–152.

12. Каниболотский, М.А. Оптимальное проектирование слоистых конструкций / М.А. Каниболотский, Ю.С. Уржумцев. – Новосибирск: Наука, 1989. – 176 с.
13. Остапенко, Н.А. Оптимальные формы трехмерных тел, проникающих в плотные среды / Н.А. Остапенко, В.И. Романенко, Г.Е. Якунина // Прикладная механика и техническая физика. – 1994. – Т. 4. – С. 515–521.
14. Остапенко, Н.А. Форма тонких трехмерных тел, проникающих на максимальную глубину в плотные среды / Н.А. Остапенко, Г.Е. Якунина // Прикладная математика и механика. – 1999. – Т. 63. – С. 953–967.
15. Ben-Dor, G. Shape optimization of high velocity impactors using analytical models / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin // Int. J. Fract. – 1997. – V. 87, No 1. – L7–L10.
16. Ben-Dor, G. Optimal 3D penetrating into layered targets / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin // Theoret. Appl. Fract. Mech. – 1997. – V. 27, No 3. – P. 161–166.
17. Ben-Dor, G. Optimization of the shape of a penetrator taking into account plug formation / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin // Int. J. Fract. – 2000. – V. 106, No 3. – L29–L34.
18. Ben-Dor, G. Shape optimization of a penetrator nose / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin // Theoret. Appl. Fract. Mech. – 2001. – V. 35, No 3. – P. 261–270.
19. Ben-Dor, G. Numerical solution for shape optimization of an impactor penetrating into a semi-infinite target / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin // Computers and Structures. – 2003. – V. 81, No 1. – P. 9–14.
20. Ben-Dor, G. Applied high-speed plate penetration dynamics / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin. – Dordrecht: Springer, 2006. – 365 p.
21. Forrestal, M.J. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets / M.J. Forrestal, D.Y. Tzou // International Journal of Solids and Structures. – 1997. – V. 34, No 31–32. – P. 4127–4146.

[04.07.2011]

ON A SHAPE OF AXISYMMETRIC RIGID SHELL MOVING IN DEFORMABLE MEDIUM AND HAVING MINIMAL MASS AND RESISTANCE FORCE

N.V. Banichuk, S.Yu. Ivanova, F. Ragnedda, M. Serra

A shape of a rigid shell of revolution of minimal mass and resistance force is considered as a multicriterion (multiobjective) optimization problem. The total resistance force and the mass of the shell material are taken as components of the minimized vectorial criterion. The shape of the axisymmetric shell is considered as a desired design variable. Analytical investigations of the optimal solution are performed by variational analysis. The exact solution of the multiobjective optimization problem is found. Particularly Pareto-front and optimized functionals are presented as functions of the problem parameters.

Keywords: multiobjective optimization, penetration in deformable medium, striker shape.