

УДК 539.4

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ УСИЛЕННЫХ ЛЕДЯНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН^{*)}

Ю.В. Немировский, Т.П. Романова

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск

Получены условие пластичности в моментах и закон пластического течения пластины изо льда – материала, имеющего разные значения предела текучести на растяжение и сжатие. На их основе в рамках модели жесткопластического тела построено точное решение задачи определения предельной нагрузки круглой, свободно опертой или заземленной по контуру, усиленной жесткой вставкой ледяной пластины, находящейся на несжимаемом основании, под действием нагрузки, равномерно распределенной по вставке.

Ключевые слова: жесткопластическая модель, ледяная пластина, предельная нагрузка, разнородный материал, жесткая вставка, несжимаемое основание.

Введение

Активное освоение районов Севера и Северо-Востока нашей страны, поиск запасов углеводородного сырья в прибрежных зонах Северного Ледовитого океана и приполярных районах требуют создания временных и стационарных дорог и площадок для переброски, хранения и длительного функционирования оборудования и товарных складов. Буровые установки, комплектующие перекачивающего оборудования и магистральных труб, складские и жилые помещения на таких ледяных платформах создают достаточно высокие нагрузки на ледяной покров, и обеспечение требуемой безопасной несущей способности ледяных баз и платформ приводит к необходимости усиления их несущей способности искусственным путем [1]. В результате проблема оценки пригодности таких ледяных платформ сводится к задаче определения несущей способности ледяной пластины с жесткой вставкой на жидком основании. Лед обладает рядом своеобразных свойств, резко отличающих его от других материалов [2–4]. Описывать деформирование льда с помощью одного универсального закона, учитывающего все его исследованные свойства, по-видимому, невозможно [5]. В зависимости от характера нагружения, температуры и цели исследования целесообразно использовать какую-либо из известных моделей: упругую, вязкоупругую, жесткопластическую, упругопластическую и т.д. Решение упругой задачи, справедливое при малых уровнях нагрузки, получено в [6]. При анализе несущей способности целесообразнее использовать модель жесткопласти-

^{*)} Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-90402-Укр_а).

ческого материала [7]. Однако при этом следует иметь в виду два важных обстоятельства: наличие жесткой (усиленной) платформы и существенно разные свойства сопротивляемости льда при растяжении и сжатии [2, 5], которые не учитывались в [7].

Ниже приводится точное решение задачи определения предельной нагрузки усиленных круглых ледяных нагружаемых площадок, которые моделируются, как и в [7], идеальной жесткопластической пластиной на несжимаемом основании. В отличие от [7] принято, что материал пластины имеет разные значения предела текучести на растяжение и сжатие. Усиленная часть пластины считается жесткой вставкой, которая не деформируется. Пластина имеет свободно опертый или защемленный контур и находится под нагрузкой, равномерно распределенной по жесткой вставке. В литературе анализ такой задачи известен только в случае отсутствия жесткой области. Для свободно опертой круглой пластины при осесимметричном нагружении точное идеальное жесткопластическое решение на основе условия пластичности для моментов типа Треска построено в [7], упругое – в [6]. Случай ледяных пластин произвольного контура, нагружаемых по произвольной области, рассмотрен в работе [8].

1. Условие пластичности и закон пластического течения

Условие пластичности для ледяной пластины имеет вид модифицированного шестиугольника Треска для материалов, имеющих разные значения предела текучести на растяжение σ_0^+ и сжатие σ_0^- (рис. 1, σ_1, σ_2 – главные напряжения). Получим условия пластичности в моментах. При изгибе верхняя и нижняя часть идеальной жесткопластической пластины находятся в разных режимах пластичности. При этом в силу гипотезы Кирхгофа–Лява и ассоциированного закона течения, если в одной части выполняется режим AB , то в другой будет режим DE ($AB \sim DE$), а также $AF \sim DC$, $BC \sim E$ и $EF \sim C$. Пусть H – толщина пластины, z – координата по толщине пластины, z_1 – граница раздела этих режимов, κ_1, κ_2 – главные скорости кривизны поверхности пластины, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_{01}, \epsilon_{02}$ – главные скорости деформации и главные скорости деформации слоя $z = 0$, M_1, M_2 – главные изгибающие моменты, $k = \sigma_0^+ / \sigma_0^-$ (для льда $k < 1$ [2, 5]).

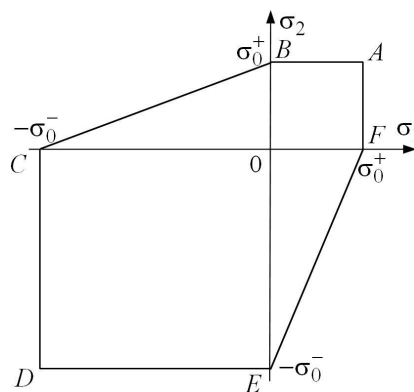


Рис. 1

Если при $0 \leq z \leq z_1$ реализуется режим DE , а при $z_1 \leq z \leq H$ – режим AB , то при $0 \leq z \leq z_1$: $\sigma_2 = -\sigma_0^-$, $-\sigma_0^- \leq \sigma_1 \leq 0$, $\epsilon_{01} = 0$, $\kappa_1 = 0$, $\epsilon_2 = \epsilon_{02} + z\kappa_2 < 0$ и $\epsilon_{02} < 0$.

При $z_1 \leq z \leq H$: $\sigma_2 = \sigma_0^+$, $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_0^+$, $\varepsilon_{01} = 0$, $\kappa_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{02} + z\kappa_2 < 0$. Откуда получим, что $\kappa_2 > 0$.

Поскольку при поперечном изгибе усилия N_1 , N_2 должны быть равны нулю, то из равенства

$$N_2 = \int_0^H \sigma_2 dz = - \int_0^{z_1} \sigma_0^- dz + \int_{z_1}^H \sigma_0^+ dz = 0$$

следует $z_1 = kH/(k+1)$. Тогда

$$M_2 = \int_0^H \sigma_2 z dz = - \int_0^{z_1} \sigma_0^- z dz + \int_{z_1}^H \sigma_0^+ z dz = M_0,$$

при этом $0 \leq M_1 \leq M_0$, где $M_0 = k\sigma_0^- H^2 / [2(1+k)]$.

Если при $0 \leq z \leq z_1$ реализуется режим AB , а при $z_1 \leq z \leq H$ – режим DE , то получим $\kappa_2 < 0$, $M_2 = -M_0$, $-M_0 \leq M_1 \leq 0$.

Если при $0 \leq z \leq z_1$ выполняется режим DC , а при $z_1 \leq z \leq H$ – режим AF , то получим $\kappa_1 > 0$, $M_1 = M_0$, $0 \leq M_2 \leq M_0$. Если при $0 \leq z \leq z_1$ реализуется режим AF , а при $z_1 \leq z \leq H$ – режим DC , то получим $\kappa_1 < 0$, $M_1 = -M_0$, $-M_0 \leq M_2 \leq 0$.

Если при $0 \leq z \leq z_1$ выполняется режим BC , то при $z_1 \leq z \leq H$ будет режим E . Тогда при $0 \leq z \leq z_1$: $\sigma_2 / \sigma_0^+ - \sigma_1 / \sigma_0^- = 1$, $\varepsilon_{01} + k\varepsilon_{02} + z(\kappa_1 + k\kappa_2) = 0$, откуда следует $\varepsilon_{01} + k\varepsilon_{02} = 0$, $\kappa_1 + k\kappa_2 = 0$. При $z_1 \leq z \leq H$: $\sigma_2 = -\sigma_0^-$, $\sigma_1 = 0$. Исключая интеграл $\int_0^{z_1} \sigma_1 dz$ из равенств

$$N_1 = \int_0^H \sigma_1 dz = - \int_0^{z_1} \sigma_1 dz = 0, \quad N_2 = \int_0^H \sigma_2 dz = \int_0^{z_1} (1 - \sigma_1 / \sigma_0^-) \sigma_0^+ dz - \int_{z_1}^H \sigma_0^- dz = 0,$$

найдем $z_1 = H/(k+1)$. Аналогично, исключая интеграл $\int_0^{z_1} \sigma_1 dz$ из выражений

$$M_1 = \int_0^H \sigma_1 z dz = \int_0^{z_1} \sigma_1 z dz, \quad M_2 = \int_0^H \sigma_2 z dz = \int_0^{z_1} (1 - \sigma_1 / \sigma_0^-) \sigma_0^+ z dz - \int_{z_1}^H \sigma_0^- z dz,$$

получим $M_2 = kM_1 - M_0$. При $z = 0$ для этого режима имеем $\varepsilon_{01} < 0$, $\varepsilon_{02} > 0$, а при $z = H$: $\varepsilon_{01} + H\kappa_1 > 0$, $\varepsilon_{02} + H\kappa_2 < 0$, откуда следует $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 < 0$.

Если при $0 \leq z \leq z_1$ выполняется режим E , а при $z_1 \leq z \leq H$ – режим BC , то получим $M_2 = kM_1 + M_0$, $\kappa_1 + k\kappa_2 = 0$, $\kappa_1 < 0$, $\kappa_2 > 0$.

Если при $0 \leq z \leq z_1$ реализуется режим EF , то при $z_1 \leq z \leq H$ будет режим C . Действуя, как выше, получим $M_2 = (M_1 + M_0)/k$, $\kappa_2 + k\kappa_1 = 0$, $\kappa_1 < 0$, $\kappa_2 > 0$. Если при $0 \leq z \leq z_1$ выполняется режим C , а при $z_1 \leq z \leq H$ – режим EF , то получим $M_2 = (M_1 - M_0)/k$, $\kappa_2 + k\kappa_1 = 0$, $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 < 0$.

Таким образом, условие пластичности для ледяной пластины имеет вид восьмиугольника $abcdefgh$, изображенного на рис. 2, где обозначено $m_1 = M_1/M_0$, $m_2 = M_2/M_0$, $m_{2c} = -m_{1c} = m_{1g} = -m_{2g} = 1/(1+k)$.

2. Случай свободного опирания контура

Рассмотрим круглую идеальную жесткопластическую пластину радиуса R_0 , нагруженную нагрузкой P , равномерно распределенной по центральной жесткой круглой области радиуса εR_0 ($0 < \varepsilon < 1$). Считаем направление действия нагрузки P

положительным. Поскольку пластина находится на несжимаемой жидкости, то на нее в отрицательном направлении действует выталкивающая сила Q , равномерно распределенная по всей поверхности пластины, а также выполняется условие несжимаемости

$$\int_0^1 w(r)rdr = 0, \quad (1)$$

где $r = R/R_0$, R – радиальная координата, w – скорость прогиба пластины в положительном направлении. Жесткая часть пластины под действием нагрузки движется в положительном направлении, и так как выполняется условие (1), а пластина закреплена на внешнем контуре, то часть пластины около контура движется в отрицательном направлении (рис. 3).

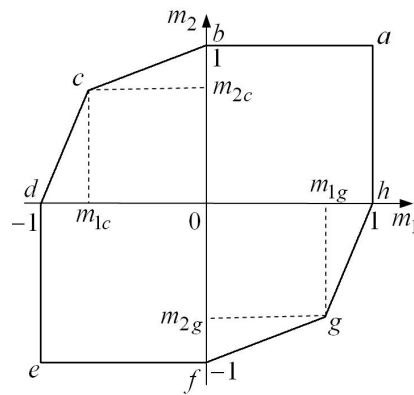


Рис. 2

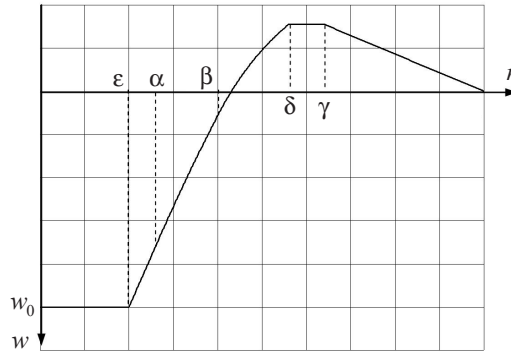


Рис. 3

Изгибающие моменты удовлетворяют уравнению равновесия:

$$(rm_1)' - m_2 = -3p\varepsilon^2 + 3qr^2, \quad (2)$$

с граничными условиями $m_1(\varepsilon) = 1$ и $m_1(1) = 0$ при свободном опирании контура или $m_1(1) = 1$ при его защемлении. Штрих обозначает производную по координате r , $p = PR_0^2/(6M_0)$, $q = QR_0^2/(6M_0)$.

Рассмотрим случай свободного опирания контура пластины. В этом случае от центральной жесткой области до внешнего контура будут последовательно выполняться режимы $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f$ (см. рис. 2), при этом координата r будет последовательно принимать значения $\varepsilon \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \delta \rightarrow \gamma \rightarrow 1$ (см. рис. 3). Окружности $r = \varepsilon$, $r = \delta$ и $r = \gamma$ являются шарнирными линиями, а $r = \alpha$ и $r = \beta$ – нет.

В области $\varepsilon \leq r \leq \alpha$ выполняется режим $a \rightarrow b$, при этом $m_2(r) = 1$, $0 \leq m_1(r) \leq 1$, $m_1(\alpha) = 0$, $m_1(\varepsilon) = 1$. Из уравнения (2) с учетом $m_1(\alpha) = 0$ имеем

$$m_1(r) = (1 - 3p\varepsilon^2)(1 - \alpha/r) + q(r^2 - \alpha^3/r). \quad (3)$$

Из (3) и условия $m_1(\varepsilon) = 1$ следует равенство

$$-3p\varepsilon^2(\alpha - \varepsilon) + q(\alpha^3 - \varepsilon^3) + \alpha = 0. \quad (4)$$

В области $\alpha \leq r \leq \beta$ выполняется режим $b \rightarrow c$, при этом $m_2(r) = km_1(r) + 1$, $-1/(1+k) \leq m_1(r) \leq 0$, $m_1(\alpha) = 0$, $m_1(\beta) = -1/(1+k)$. Из уравнения (2) с учетом $m_1(\alpha) = 0$ получаем

$$m_1(r) = \frac{1 - 3p\varepsilon^2}{1 - k} \left[1 - \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{k-1} \right] + \frac{3q}{3 - k} \left[r^2 - \alpha^2 \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{k-1} \right]. \quad (5)$$

Из (5) и условия $m_1(\beta) = -1/(1+k)$ следует равенство

$$\frac{-1}{1+k} = \frac{1 - 3p\varepsilon^2}{1 - k} \left[1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{k-1} \right] + \frac{3q}{3 - k} \left[\beta^2 - \alpha^2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{k-1} \right]. \quad (6)$$

В области $\beta \leq r \leq \delta$ выполняется режим $c \rightarrow d$, при этом $m_2(r) = [m_1(r) + 1]/k$, $m_1(\beta) = -1/(1+k)$, $m_1(\delta) = -1$, $m_2(\beta) = 1/(1+k)$, $m_2(\delta) = 0$. Из уравнения (2) с учетом $m_1(\beta) = -1/(1+k)$ имеем ($k < 1$)

$$m_1(r) = \frac{-1}{1+k} \left(\frac{r}{\beta} \right)^{1/k-1} + \frac{1 - 3kp\varepsilon^2}{k-1} \left[1 - \left(\frac{r}{\beta} \right)^{1/k-1} \right] + \frac{3q}{3 - 1/k} \left[r^2 - \beta^2 \left(\frac{r}{\beta} \right)^{1/k-1} \right], \quad k \neq \frac{1}{3}, \quad (7)$$

$$m_1(r) = -\frac{3}{4} \left(\frac{r}{\beta} \right)^2 - \frac{3(1 - p\varepsilon^2)}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{\beta} \right)^2 \right] + 3qr^2 \ln \left(\frac{r}{\beta} \right), \quad k = \frac{1}{3}.$$

Из (7) и условия $m_1(\delta) = -1$ следует

$$-1 = \frac{-1}{1+k} \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^{1/k-1} + \frac{1 - 3kp\varepsilon^2}{k-1} \left[1 - \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^{1/k-1} \right] + \frac{3q}{3 - 1/k} \left[\delta^2 - \beta^2 \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^{1/k-1} \right], \quad k \neq \frac{1}{3}, \quad (8)$$

$$-1 = -\frac{3}{4} \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^2 - \frac{3(1 - p\varepsilon^2)}{2} \left[1 - \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^2 \right] + 3q\delta^2 \ln \left(\frac{\delta}{\beta} \right), \quad k = \frac{1}{3}.$$

В области $\delta \leq r \leq \gamma$ выполняется режим $d \rightarrow e$, при этом $m_1(r) = -1$, $m_2(\delta) = 0$, $m_2(\gamma) = -1$. Из уравнения (2) с учетом $m_1(r) = -1$ получаем

$$m_2(r) = -1 + 3p\varepsilon^2 - 3qr^2. \quad (9)$$

Из (9) и условий $m_2(\delta) = 0$, $m_2(\gamma) = -1$ следуют равенства

$$3p\varepsilon^2 - 3q\delta^2 - 1 = 0, \quad (10)$$

$$p\varepsilon^2 = q\gamma^2. \quad (11)$$

В области $\gamma \leq r \leq 1$ выполняется режим $e \rightarrow f$, при этом $m_2(r) = -1$, $m_1(1) = 0$, $m_1(\gamma) = -1$. Из уравнения (2) с учетом $m_1(1) = 0$ имеем

$$m_1(r) = -(1 + 3p\varepsilon^2)(1 - 1/r) - q(1/r - r^2). \quad (12)$$

Из (12) и условия $m_1(\gamma) = -1$ следует равенство

$$3p\varepsilon^2(1 - \gamma) - q(1 - \gamma^3) + 1 = 0. \quad (13)$$

Система уравнений (4), (6), (8), (10), (11), (13) служит для определения неизвестных значений безразмерной предельной нагрузки p и величин q , α , β , δ , γ . Уравнения (10), (11), (13) преобразуются к виду

$$p = \frac{\gamma^2}{\varepsilon^2(1 - \gamma)^2(2\gamma + 1)}, \quad (14)$$

$$q = \frac{1}{(1 - \gamma)^2(2\gamma + 1)}, \quad (15)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{3\gamma^2 - (1 - \gamma)^2(2\gamma + 1)}{3}}. \quad (16)$$

Подставляя выражения (14)–(16) в (4), (6), (8), получим систему трех алгебраических уравнений для неизвестных α , β , γ , которая решалась численно методом локальных вариаций [9]. В качестве начальных приближений для α , β , γ при некотором значении ε ($0 < \varepsilon < 1$) задаются значения α , β , γ , вычисленные на предыдущем шаге при $\varepsilon - h \geq 0$ ($h > 0$). При $\varepsilon = 0$ величины α , β известны из решения задачи без жесткой области ([7]), и они равны: $\alpha = 0$, $\delta = 0,537$, при этом принималось $\beta = 0,2$.

На рис. 4 приведены значения величин α , β , δ , γ в зависимости от размера жесткой области ε при $k = 0,4$.

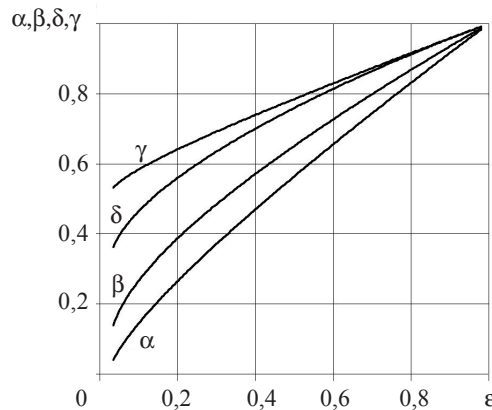


Рис. 4

На рис. 5 приведены зависимости безразмерной полной предельной нагрузки $p_f = P\pi\varepsilon^2 R_0^2 / (6M_0)$ (кривая 1) и безразмерного полного сопротивления основания $q_f = Q\pi\varepsilon^2 R_0^2 / (6M_0)$ (кривая 2) от размера ε при $k=0,4$. Кривая 3 изображает величину p_f , полученную по жесткопластическому точному решению на основе условия пластичности типа Треска в случае отсутствия жесткой области [7].

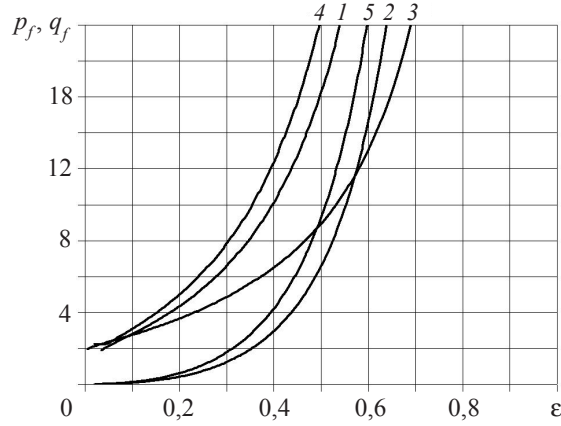


Рис. 5

Из выражений для главных скоростей кривизны ($\kappa_1 = -w''$, $\kappa_2 = -w'/r$), условия пластичности и ассоциированного закона течения следует, что для скоростей прогибов пластины $w(r)$ выполняются уравнения:

$$w'' = 0 \text{ при } \varepsilon \leq r \leq \alpha, \quad w'' = -w'k/r \text{ при } \alpha \leq r \leq \beta,$$

$$w'' = -w'/(kr) \text{ при } \beta \leq r \leq \delta, \quad w' = 0 \text{ при } \delta \leq r \leq \gamma, \quad w'' = 0 \text{ при } \gamma \leq r \leq 1.$$

Тогда, учитывая непрерывность скорости прогибов на окружностях $r = \alpha$, $r = \beta$, $r = \delta$, $r = \gamma$, непрерывность $w'(r)$ при $r = \alpha$, $r = \beta$ и равенство $w(1) = 0$, для скоростей прогибов пластины получим выражения:

$$\begin{aligned} w &= w_0 \quad \text{при} \quad 0 \leq r \leq \varepsilon, \\ w &= w_0[1 - Y(r - \varepsilon)] \quad \text{при} \quad \varepsilon \leq r \leq \alpha, \\ w &= w_0 \left\{ 1 - Y(\alpha - \varepsilon) - \frac{Y}{1-k} \left[r \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{-k} - \alpha \right] \right\} \quad \text{при} \quad \alpha \leq r \leq \beta, \\ w &= w_0 \left(1 - Y(\alpha - \varepsilon) - \frac{Y}{1-k} \left\{ \beta \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-k} - \alpha - k \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-k} \left[r \left(\frac{r}{\beta} \right)^{-1/k} - \beta \right] \right\} \right) \quad \text{при} \quad \beta \leq r \leq \delta, \\ w &= w_0 \left(1 - Y(\alpha - \varepsilon) - \frac{Y}{1-k} \left\{ \beta \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-k} - \alpha - k \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-k} \left[\delta \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^{-1/k} - \beta \right] \right\} \right) \quad \text{при} \quad \delta \leq r \leq \gamma, \end{aligned} \tag{17}$$

$$w = w_0 \left(1 - Y(\alpha - \varepsilon) - \frac{Y}{1-k} \left\{ \beta \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-k} - \alpha - k \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-k} \left[\delta \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^{-1/k} - \beta \right] \right\} \right) \frac{1-r}{1-\gamma}$$

при $\gamma \leq r \leq 1$,

где w_0, Y – константы. Из условия несжимаемости основания (1) следует, что величина Y , входящая в выражения (17), равна ($k < 1$)

$$Y = \frac{1-k}{\left[\Sigma + 6 \frac{1-k}{3-k} \alpha^3 \right] / (1+\gamma+\gamma^2) - (1-k)\varepsilon - \alpha k},$$

где обозначено

$$\Sigma = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-k} \left\{ 3\beta[(1+k)\gamma^2 - \beta^2 k] - \frac{3(1-k)\beta^3}{3-k} - 6k\beta^{1/k} A_1 - \right. \\ \left. - k\delta \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^{-1/k} (1+\gamma+\gamma^2 - 3\delta^2) + \beta(1+k)(1-\gamma)(1+2\gamma) \right\},$$

$$A_1 = \int_{\beta}^{\delta} r^{2-1/k} dr = \frac{1}{3-1/k} (\delta^{3-1/k} - \beta^{3-1/k}) \quad \text{при } k \neq \frac{1}{3},$$

$$A_1 = \int_{\beta}^{\delta} r^{-1} dr = \ln \left(\frac{\delta}{\beta} \right) \quad \text{при } k = \frac{1}{3}.$$

3. Защемление контура

В случае защемления внешнего контура в пластине от центральной жесткой области до внешнего контура будут последовательно реализованы режимы $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow h$ (см. рис. 2), при этом координата r будет последовательно принимать значения $\varepsilon \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \delta \rightarrow \gamma \rightarrow \xi \rightarrow \zeta \rightarrow 1$. Окружности $r = \varepsilon, r = \delta$ и $r = \gamma$ являются шарнирными линиями, а $r = \alpha, \beta, \xi, \zeta$ – нет. Режимы $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e$ в пластине будут такими же, как при свободном опирании контура, и описываются уравнениями, приведенными в п. 2. Для режимов $e \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow h$ аналогично получим

$$m_1(r) = -(1+3p\varepsilon^2)(1-\xi/r) - q(\xi^3/r - r^2) \quad (\gamma \leq r \leq \xi), \quad (18)$$

$$m_1(r) = \frac{-(1+3p\varepsilon^2)}{1-k} \left[1 - \left(\frac{r}{\xi} \right)^{k-1} \right] + \frac{3q}{3-k} \left[r^2 - \xi^2 \left(\frac{r}{\xi} \right)^{k-1} \right] \quad (\xi \leq r \leq \zeta), \quad (19)$$

$$m_1(r) = \frac{1}{1+k} \left(\frac{r}{\zeta} \right)^{1/k-1} - \frac{1+3kp\varepsilon^2}{k-1} \left[1 - \left(\frac{r}{\zeta} \right)^{1/k-1} \right] + \frac{3q}{3-1/k} \left[r^2 - \zeta^2 \left(\frac{r}{\zeta} \right)^{1/k-1} \right], \quad k \neq \frac{1}{3},$$

$$m_1(r) = \frac{3}{4} \left(\frac{r}{\zeta} \right)^2 + \frac{3(1+p\varepsilon^2)}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{\zeta} \right)^2 \right] + 3qr^2 \ln \left(\frac{r}{\zeta} \right) \quad k = \frac{1}{3}, \quad (\zeta \leq r \leq 1). \quad (20)$$

Из (18)–(20) с учетом $m_1(\gamma) = -1$, $m_1(\zeta) = 1/(1+k)$, $m_1(1) = 1$ имеем

$$3p\varepsilon^2(\xi - \gamma) - q(\xi^3 - \gamma^3) + \xi = 0, \quad (21)$$

$$\frac{1}{1+k} = \frac{-(1+3p\varepsilon^2)}{1-k} \left[1 - \left(\frac{\zeta}{\xi} \right)^{k-1} \right] + \frac{3q}{3-k} \left[\zeta^2 - \xi^2 \left(\frac{\zeta}{\xi} \right)^{k-1} \right], \quad (22)$$

$$1 = \frac{1}{1+k} \left(\frac{1}{\zeta} \right)^{1/k-1} - \frac{1+3kp\varepsilon^2}{k-1} \left[1 - \left(\frac{1}{\zeta} \right)^{1/k-1} \right] + \frac{3q}{3-1/k} \left[1 - \zeta^2 \left(\frac{1}{\zeta} \right)^{1/k-1} \right], \quad k \neq \frac{1}{3}, \quad (23)$$

$$1 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\zeta} \right)^2 + \frac{3(1+p\varepsilon^2)}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{\zeta} \right)^2 \right] + 3q \ln \left(\frac{1}{\zeta} \right), \quad k = \frac{1}{3}.$$

Система уравнений (4), (6), (8), (10), (11), (21)–(23) служит для определения неизвестных значений безразмерной предельной нагрузки p и величин q , α , β , δ , γ , ξ , ζ . Уравнения (10), (11), (21) приводятся к виду

$$p = \frac{\gamma^2}{3\varepsilon^2(\gamma^2 - \delta^2)}, \quad q = \frac{1}{(\gamma^2 - \delta^2)}, \quad \delta = \sqrt{\frac{6\gamma^2\xi - 2\gamma^3 - \xi^3}{3\xi}}. \quad (24)$$

Подставляя выражения (24) в (4), (6), (8), (22), (23), получим систему пяти алгебраических уравнений для неизвестных α , β , γ , ξ , ζ , которая решалась численно методом локальных вариаций [9]. Начальные приближения при $\varepsilon = 0,02$ задавались следующие: $\alpha = 0,07$, $\beta = 0,17$, $\gamma = 0,45$, $\xi = 0,8$, $\zeta = 0,95$. На рис. 5 приведены зависимости от величины ε безразмерной полной предельной нагрузки p_f (кривая 4) и безразмерного полного сопротивления основания q_f (кривая 5) для рассматриваемой защемленной пластины при $k = 0,4$.

Для скоростей прогибов такой пластины $w(r)$ выполняются уравнения:

$$w'' = 0 \text{ при } \varepsilon \leq r \leq \alpha, \quad w'' = -w'k/r \text{ при } \alpha \leq r \leq \beta,$$

$$w'' = -w'/(kr) \text{ при } \beta \leq r \leq \delta, \quad w' = 0 \text{ при } \delta \leq r \leq \gamma, \quad w'' = 0 \text{ при } \gamma \leq r \leq \xi,$$

$$w'' = -w'k/r \text{ при } \xi \leq r \leq \zeta, \quad w'' = -w'/(kr) \text{ при } \zeta \leq r \leq 1.$$

Тогда, учитывая непрерывность скорости прогибов на окружностях $r = \alpha$, β , δ , γ , ξ , ζ , непрерывность $w'(r)$ при $r = \alpha$, β , ξ , ζ и равенство $w(1) = 0$, для скоростей прогибов защемленной пластины получим выражения:

$$w = w_0 \text{ при } 0 \leq r \leq \varepsilon, \quad w = w_0[1 - Y(r - \varepsilon)] \text{ при } \varepsilon \leq r \leq \alpha,$$

$$w = w_0[1 - Y(\alpha - \varepsilon)] + \{w_1 - w_0[1 - Y(\alpha - \varepsilon)]\} \frac{r^{1-k} - \alpha^{1-k}}{\beta^{1-k} - \alpha^{1-k}} \text{ при } \alpha \leq r \leq \beta,$$

$$\begin{aligned}
w &= w_1 + (w_2 - w_1) \frac{r^{1-1/k} - \beta^{1-1/k}}{\delta^{1-1/k} - \beta^{1-1/k}} \quad \text{при } \beta \leq r \leq \delta, \\
w &= w_2 \quad \text{при } \delta \leq r \leq \gamma, \quad w = w_2 + (w_3 - w_2) \frac{r - \gamma}{\xi - \gamma} \quad \text{при } \gamma \leq r \leq \xi, \\
w &= w_3 + (w_4 - w_3) \frac{r^{1-k} - \xi^{1-k}}{\zeta^{1-k} - \xi^{1-k}} \quad \text{при } \xi \leq r \leq \zeta, \\
w &= w_4 \frac{1 - r^{1-1/k}}{1 - \zeta^{1-1/k}} \quad \text{при } \zeta \leq r \leq 1,
\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}
w_1 &= w_0 [1 - Y(r - \varepsilon) - Y(\beta^{1-k} - \alpha^{1-k}) \alpha^k / (1 - k)], \\
w_2 &= w_1 - \{w_1 - w_0 [1 - Y(r - \varepsilon)]\} k \beta^{1/k-k} (\delta^{1-1/k} - \beta^{1-1/k}) / (\beta^{1-k} - \alpha^{1-k}), \\
w_3 &= \frac{w_2 (\zeta^{1-k} - \xi^{1-k})}{(1-k)(\xi - \gamma) \zeta^{-k}} \left/ \left[1 + \frac{\zeta^{1-k} - \xi^{1-k}}{(1-k)(\xi - \gamma) \zeta^{-k}} - \frac{k(1 - \zeta^{1-1/k})}{k(1 - \zeta^{1-1/k}) - \zeta^{k-1/k} (\zeta^{1-k} - \xi^{1-k})} \right] \right., \\
w_4 &= \frac{w_3 k (1 - \zeta^{1-1/k})}{k(1 - \zeta^{1-1/k}) - \zeta^{k-1/k} (\zeta^{1-k} - \xi^{1-k})},
\end{aligned}$$

а величина Y , входящая в (25), определяется из условия несжимаемости (1).

Литература

1. *Вербух, Н.Ф.* Усиление несущей способности ледовых переправ и болотистых грунтов / Н.Ф. Вербух, А.И. Герасимов, С.Н. Попов // Безопасность жизнедеятельности. – 2010. – №6. – С. 21–25.
2. *Лавров, В.В.* Вопросы физики и механики льда / В.В. Лавров // Труды Арктического и Антарктического научно-исследовательского института. – Л.: Морской транспорт, 1962. – Т. 247. – С. 45–116.
3. *Бычковский, Н.Н.* Ледовые строительные площадки, дороги и переправы / Н.Н. Бычковский, Ю.А. Гурьянов. – Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2005. – 260 с.
4. *Песчанский, И.С.* О некоторых проблемах ледоведения / И.С. Песчанский // Вопросы арктического ледоведения. – М.–Л., 1964. – Т. 267. – С. 5–12.
5. *Шапиро, Г.С.* Об уравнениях деформирования льда / Г.С. Шапиро // Механика и физика льда (под ред. акад. А.Ю. Ишлинского). – М.: Наука, 1983. – С. 164–167.
6. *Kerr, A.D.* Изгиб круговых пластинок, ограниченных несжимаемой жидкостью / А.Д. Керр // Прикладная механика. Серия Е. – 1965. – Т. 32, №3. – С. 264–266.
7. *Hodge, P.G.* Yield-point load of a circular plate sealing an incompressible fluid / P.G. Hodge, Chang-Kuei Sun // Int. J. Mech. Sci. – 1967. – V. 9, No 7. – P. 405–414.
8. *Немировский, Ю.В.* Несущая способность ледяных пластин произвольного контура, нагружаемых по произвольной области / Ю.В. Немировский, Т.П. Романова // Труды V Евразийского симпозиума по проблемам прочности материалов и машин для регионов холодного климата EURASTRENCOLD – 2010, Якутск, 1–5 июня 2010. – Якутск, 2010. – Пленарные доклады. – С. 81–91.
9. *Черноузько, Ф.Л.* Вариационные задачи механики и управления / Ф.Л. Черноузько, В.Н. Баничук. – М.: Наука, 1973. – 238 с.

[28.06.2010]

CARRYING CAPACITY OF REINFORCED ICE CIRCULAR PLATES

Yu.V. Nemirovsky, T.P. Romanova

The plasticity condition in moments and plastic yield law for the ice plate, the material with different tension and compression yielding values, are obtained. On this basis the exact solution of the problem within bounds of a rigid-plastic body model is constructed to define the ultimate load for simply supported or clamped circular ice plate lying on non-compressible foundation under uniformly distributed over rigid inset load.

Keywords: rigid-plastic body model, ice plate, ultimate load, material with different tension and compression yielding values, rigid inset, non-compressible foundation.