

УДК 539.374

## ВАРИАНТ ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ ПЛАСТИЧНОСТИ

**В.С. Бондарь, В.В. Даншин, П.В. Семенов**

*Московский государственный технический университет «МАМИ»*

На основе уравнений теории упругопластического деформирования, относящейся к классу теорий течения при комбинированном упрочнении, получен вариант теории упругопластических процессов и аппроксимации функционалов пластичности. Формулируется базовый эксперимент и метод идентификации параметров аппроксимации функционалов пластичности. Приводятся результаты верификации варианта теории упругопластических процессов при сложном нагружении по плоским траекториям деформаций.

*Ключевые слова:* пластичность, сложное нагружение, базовый эксперимент, идентификация, верификация.

Развитие теории пластичности и разработка определяющих уравнений описания процессов упругопластического деформирования в настоящее время идет двумя основными направлениями. К первому направлению относятся различные варианты теории упругопластических процессов, базирующиеся на общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина [1, 2]. Ко второму направлению относятся различные варианты теории пластического течения при комбинированном упрочнении, базирующиеся на концепции микронапряжений, выдвинутой В.В. Новожиловым [3].

Рассмотрим достаточно простой вариант второго направления – теорию упругопластического деформирования, являющуюся частным вариантом теории неупругости [4]. Данный вариант теории пластичности прошел обширную верификацию [5] на широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований при сложном нагружении как по плоским, так и по пространственным траекториям деформаций в широком диапазоне значений (от малых до больших) кривизны и крутки. Сравнение результатов расчетов и экспериментов показало надежное соответствие теории и эксперимента: отличие по компонентам напряженно-деформированного состояния, скалярным и векторным свойствам не превысило 10÷20%.

В векторном представлении А.А. Ильюшина [1, 2] уравнения теории упругопластического деформирования будут иметь вид [4, 5]:

$$d\bar{\mathcal{E}} = d\bar{\mathcal{E}}^e + d\bar{\mathcal{E}}^p, \quad d\bar{\mathcal{E}}^e = \frac{d\bar{\mathcal{S}}}{2G}, \quad (1)$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}^p}{ds^p} = \frac{1}{C_B(s^p)}(\bar{S} - \bar{A}), \quad (2)$$

$$d\bar{A} = g_B d\bar{\mathcal{E}}^p + (g_{\mathcal{E}} \bar{\mathcal{E}}^p + g_A \bar{A}) ds^p, \quad (3)$$

где  $\bar{\mathcal{E}}$ ,  $\bar{\mathcal{E}}^e$  и  $\bar{\mathcal{E}}^p$  – векторы соответственно полных, упругих и пластических деформаций;  $\bar{S}$  и  $\bar{A}$  – векторы напряжений и добавочных напряжений (микронапряжений [3]);  $s^p$  – длина дуги траектории пластической деформации;  $G$  – модуль сдвига;  $C_B(s^p)$  – функция изотропного упрочнения [4, 5];  $g_B, g_{\mathcal{E}}, g_A$  – параметры анизотропного упрочнения [4, 5].

Дифференцируя (2) по длине дуги траектории деформаций  $s$  и используя (1)–(3), можно получить следующее уравнение:

$$N_2 \frac{d^2 \bar{S}}{ds^2} + N_1 \frac{d\bar{S}}{ds} + N_0 \bar{S} = D_0 \bar{\mathcal{E}} + D_1 \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{ds} + D_2 \frac{d^2 \bar{\mathcal{E}}}{ds^2}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{M_4}{2G} - M_2, \quad N_1 = \left(1 + \frac{M_1}{2G}\right) \left(\frac{ds^p}{ds}\right)^{-1} - \frac{M_3}{2G} \frac{d^2 s^p}{ds^2} \left(\frac{ds^p}{ds}\right)^{-3}, \\ N_2 &= \frac{M_3}{2G} \left(\frac{ds^p}{ds}\right)^{-2}, \quad D_0 = M_4, \quad D_1 = M_1 \left(\frac{ds^p}{ds}\right)^{-1} - M_3 \frac{d^2 s^p}{ds^2} \left(\frac{ds^p}{ds}\right)^{-3}, \\ D_2 &= M_3 \left(\frac{ds^p}{ds}\right)^{-2}, \quad M_1 = g_B - g_A C_B(s^p) + \frac{dC_B(s^p)}{ds^p}, \\ M_2 &= g_A, \quad M_3 = C_B(s^p), \quad M_4 = g_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Согласно общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина [1, 2] вектор деформаций  $\bar{\mathcal{E}}$ , вектор напряжений  $\bar{S}$  и его производные  $d\bar{S}/ds$  и  $d^2\bar{S}/ds^2$  можно представить в репере Френе  $\{\hat{p}_i\}$  пятимерного девиаторного пространства деформаций в виде

$$\bar{\mathcal{E}} = D_i \hat{p}_i, \quad \bar{S} = P_i \hat{p}_i, \quad \frac{d\bar{S}}{ds} = P_i^* \hat{p}_i, \quad \frac{d^2 \bar{S}}{ds^2} = P_i^{**} \hat{p}_i \quad (i=1, \dots, 5) \quad (5)$$

или в пятимерном неортогональном репере  $\{\hat{s}_i\} = d^i \bar{\mathcal{E}}/ds^i$ :

$$\bar{\mathcal{E}} = G_i \frac{d^i \bar{\mathcal{E}}}{ds^i}, \quad \bar{S} = Q_i \frac{d^i \bar{\mathcal{E}}}{ds^i}, \quad \frac{d\bar{S}}{ds} = Q_i^* \frac{d^i \bar{\mathcal{E}}}{ds^i}, \quad \frac{d^2 \bar{S}}{ds^2} = Q_i^{**} \frac{d^i \bar{\mathcal{E}}}{ds^i} \quad (i=1, \dots, 5). \quad (6)$$

Получая из последних трех уравнений (6) выражения для  $d^3 \bar{\mathcal{E}}/ds^3$ ,  $d^4 \bar{\mathcal{E}}/ds^4$ ,  $d^5 \bar{\mathcal{E}}/ds^5$  и подставляя в первое, можно получить уравнение, полностью совпадающее по структуре с уравнением (4) и коэффициентами, являющимися функционалами процесса.

Таким образом, теория упругопластического деформирования (1)–(3) является конкретным вариантом общей математической теории пластичности А.А. Илью-

шина при полном сохранении всей структуры уравнений этой теории.

При развитых пластических деформациях и в условиях пластического деформирования можно принять

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &\approx \bar{\varepsilon}^p, \quad s \approx s^p, \quad \frac{ds^p}{ds} \approx 1, \quad \frac{d^2 s^p}{ds^2} \approx 0, \\ \frac{M_4}{2G M_2} &\ll 1, \quad \frac{M_1}{2G} \ll 1, \quad \frac{M_3}{2G} \ll 1, \\ \left( \frac{M_4}{2G} \approx 0, \quad \frac{M_1}{2G} \approx 0, \quad \frac{M_3}{2G} \approx 0 \right).\end{aligned}\quad (7)$$

Тогда коэффициенты в уравнении (4) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}N_0 &= -g_A, \quad N_1 = 1, \quad N_2 = 0, \\ D_0 &= g_{\varepsilon}, \quad D_1 = g_B - g_A C_B(s) + \frac{dC_B(s)}{ds}, \\ D_2 &= C_B(s),\end{aligned}\quad (8)$$

а уравнение (4) примет вид

$$\frac{d\bar{S}}{ds} = D_1 \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} + D_0 \bar{\varepsilon} - N_0 \bar{S} + D_2 \frac{d^2 \bar{\varepsilon}}{ds^2}.\quad (9)$$

Используя конкретные значения параметров (8) для ряда конструкционных сталей и сплавов [4, 5], можно сделать вывод, что последнее слагаемое в уравнении (9) как минимум на порядок меньше величины остальных слагаемых и им в уравнении (9) можно пренебречь.

Тогда окончательно уравнение (9) примет так называемую «нелокальную форму» [6] теории процессов:

$$\frac{d\bar{S}}{ds} = N \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} + N_S \bar{S} + N_{\varepsilon} \bar{\varepsilon},\quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}N &= g_B - g_A C_B(s) + \frac{dC_B(s)}{ds}, \\ N_S &= g_A, \quad N_{\varepsilon} = g_{\varepsilon}.\end{aligned}\quad (11)$$

Если использовать материальные функции теории упругопластического деформирования, параметры в выражениях (11) примут вид

$$\begin{aligned}g_B &= \frac{2}{3} g = \frac{2}{3} (E_a + \beta \sigma_a), \quad g_A = \sqrt{\frac{2}{3}} g_a = -\sqrt{\frac{2}{3}} \beta, \\ g_{\varepsilon} &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} g_{\varepsilon} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \beta E_a, \quad C_B(s) = \sqrt{\frac{2}{3}} C_p \left( \sqrt{\frac{2}{3}} s \right),\end{aligned}$$

$$\frac{dC_B(s)}{ds} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{dC_p}{d\varepsilon_{u*}^p} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} s \right), \quad (12)$$

где  $\varepsilon_{u*}^p$  – накопленная пластическая деформация.

Уравнение (10) имеет место в случае активного пластического процесса, т.е. когда

$$|\bar{S}| \geq C_B(0) \cap \bar{S} \cdot d\bar{\mathcal{E}} > 0, \quad (13)$$

в противном случае имеет место упругое состояние и связь между векторами напряжений и деформаций задается законом Гука:

$$\frac{d\bar{S}}{ds} = 2G \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{ds}. \quad (14)$$

Следует отметить, что уравнения (10)–(14) не способны описать эффект Баушингера при смене направления деформирования.

Для более корректного описания произвольных процессов деформирования необходимо ввести дополнительное уравнение для внутреннего переменного  $\bar{A}$ :

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = g_B \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{ds} + g_{\mathcal{E}} \bar{\mathcal{E}} + g_A \bar{A}. \quad (15)$$

Это позволит более корректно задать условия упругого

$$|\bar{S} - \bar{A}| < C_B(s) \cup (\bar{S} - \bar{A}) \cdot d\bar{\mathcal{E}} \leq 0 \quad (16)$$

и пластического

$$|\bar{S} - \bar{A}| = C_B(s) \cap (\bar{S} - \bar{A}) \cdot d\bar{\mathcal{E}} > 0 \quad (17)$$

состояний материала. Кроме того, внутреннее переменное  $\bar{A}$  позволяет ввести следующее кинетическое уравнение накопления повреждений:

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{W_0} \frac{\bar{A} \cdot d\bar{\mathcal{E}}}{ds}, \quad (18)$$

где  $\omega$  – мера повреждения,  $W_B = W_0$  – энергия разрушения. Критерием разрушения материала будет достижение повреждением  $\omega$  предельного значения, обычно принимаемого равным единице.

Итак, рассмотренный вариант теории упругопластических процессов замыкают следующие материальные функции теории упругопластического деформирования [4, 5], подлежащие экспериментальному определению:

$E, \nu$  – упругие параметры;

$C_p$  – функция изотропного упрочнения;

$E_a, \beta, \sigma_a$  – параметры анизотропного упрочнения;

$W_0$  – энергия разрушения.

Для определения этих функций достаточно следующего минимального набора данных базового эксперимента: значения упругих параметров, которые определяются традиционными методами; диаграмма растяжения до деформации 0,05÷0,1; диаграмма растяжения до деформации 0,05÷0,1 после предварительного сжатия до

деформации  $0,01 \div 0,02$ ; данные по циклическому нагружению при постоянном размахе деформации: число циклов до разрушения (появления макротрещин) и зависимость максимального по модулю значения напряжения на полцикле от числа полциклов нагружения.

В случае отсутствия диаграммы растяжения после предварительного сжатия эта диаграмма может быть построена на основе принципа Мазинга. А в случае отсутствия экспериментальных данных по малоцикловой усталости эти данные могут быть получены на основе критерия Коффина.

Метод определения материальных функций на основе данных базового эксперимента подробно изложен в работах [4, 5]. Там же приведены материальные функции для ряда конструкционных сталей и сплавов.

Для верификации предложенного варианта теории упругопластических процессов проведены расчеты процессов сложного нагружения по плоским траекториям деформаций и результаты расчетов сопоставлены с результатами экспериментов.

Исследование [6] процессов сложного нагружения и сложной разгрузки проводилось на образцах из стали 45 в условиях  $(P, M)$ -опытов по плоской траектории в виде треугольника с углами излома траектории деформации, равными  $135, 135$  и  $90^\circ$ . Точки, в которых проходили изломы, имели координаты  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3) = (0; 0,015) \rightarrow (0,025; 0,01) \rightarrow (0; 0,01) \rightarrow (0; 0,015)$ . Ответные траектории напряжений показаны на рис. 1, где сплошная кривая – расчет на основе теории упругопластического деформирования [4, 5], пунктирная кривая – расчет на основе предложенного варианта теории упругопластических процессов, а светлые кружки – экспериментальные результаты [6].

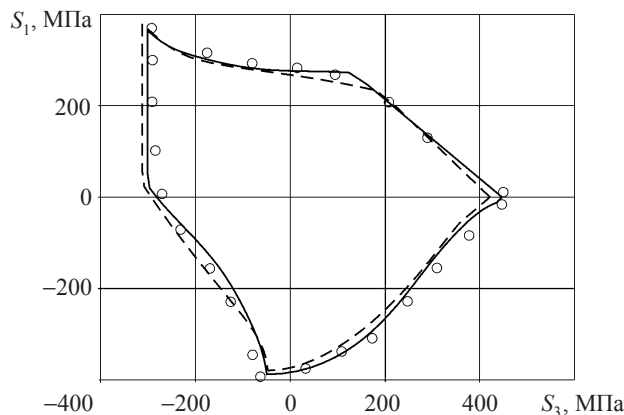


Рис. 1

Скалярные и векторные свойства – изменения модуля вектора напряжений  $\sigma = |\bar{S}|$  и угла сближения  $\vartheta$  по длине дуги траектории деформаций – приведены на рис. 2 и рис. 3 соответственно. На этих рисунках приняты такие же обозначения для результатов расчетов и эксперимента, как и на рис. 1.

Исследование [6] влияния расположения траектории деформаций относительно начала координат, а также кривизны траектории на скалярные и векторные свойства проводилось на траектории деформаций в виде окружностей, проходящих через начало координат. Переход с одной окружности на другую осуществлялся в точке начала координат, было реализовано пять витков траектории с радиусами

кривизны 0,0025; 0,005; 0,0075; 0,01. Четвертый и пятый виток выполнялись при одном и том же радиусе кривизны 0,01. Материалом, на котором проводились исследования, являлась сталь 9Х2.

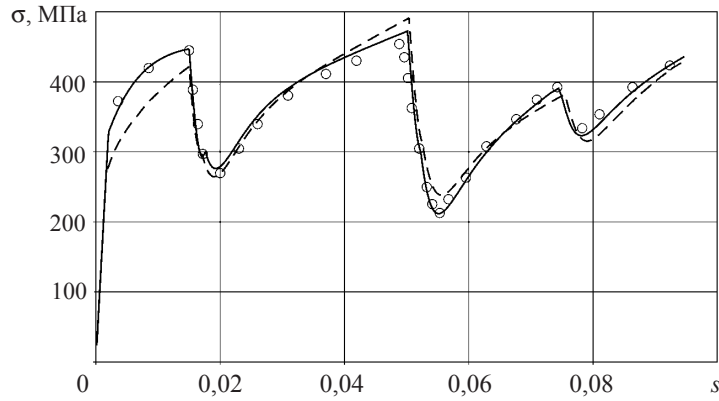


Рис. 2

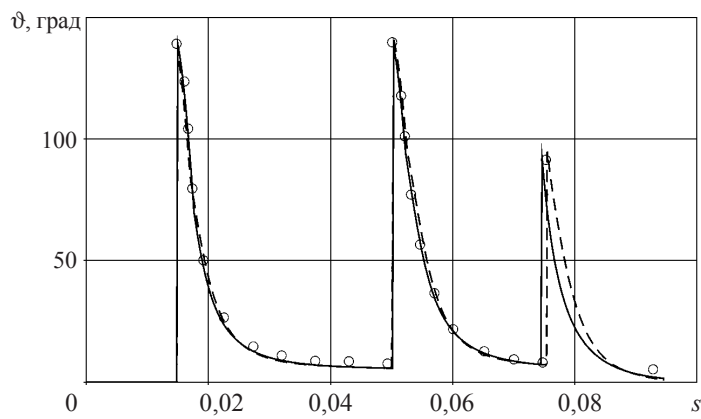


Рис. 3

Изменения компонент вектора напряжений по длине дуги траектории деформаций, полученные в результате расчетов и эксперимента [6], показаны на рис. 4, 5.

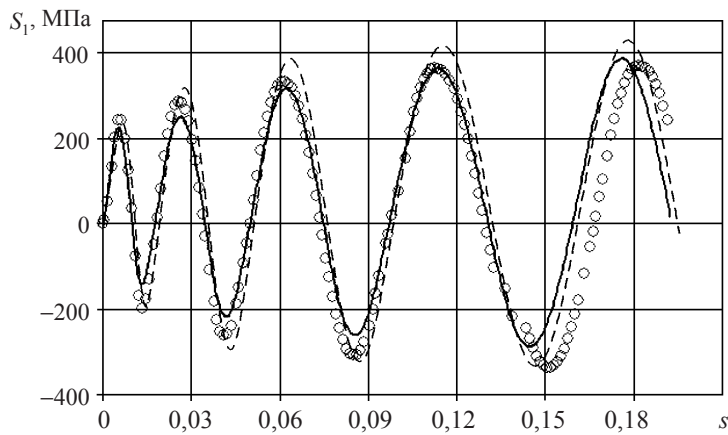


Рис. 4

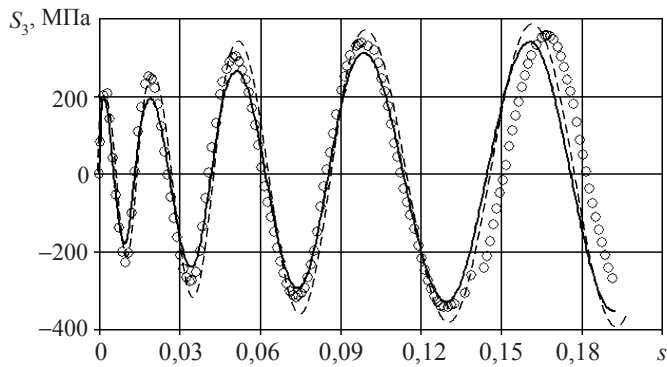


Рис. 5

Скалярные и векторные свойства приведены на рис. 6, 7. Обозначения результатов расчетов и эксперимента на рис. 4–7 аналогичны использованным ранее для рис. 1–3.

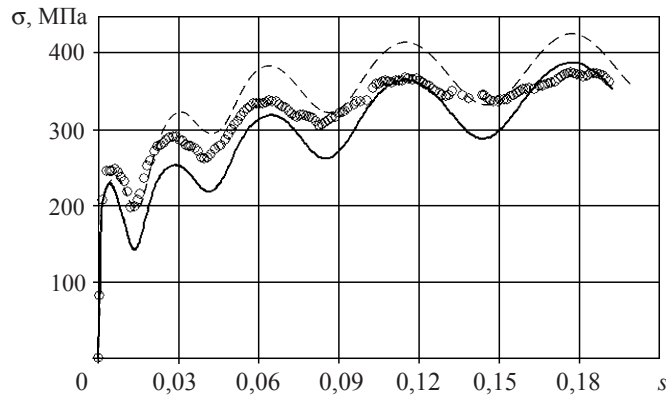


Рис. 6

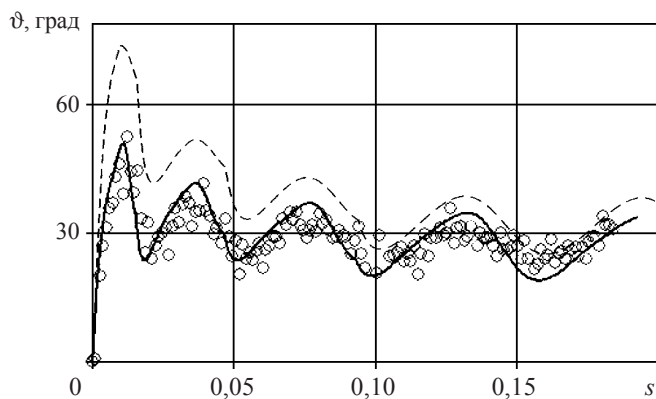


Рис. 7

Представленные в настоящей работе первые результаты верификации предложенного варианта теории упругопластических процессов говорят о надежном соответствии расчетных и экспериментальных результатов.

Рассмотренный вариант теории упругопластических процессов может быть развит по аналогии с теорией упругопластического деформирования [4, 5] и теорией неупругости [4] на неизотермические процессы, процессы, развивающиеся в реальном времени (ползучесть, длительную прочность), и может быть также распространен на описание эффектов дополнительного изотропного упрочнения и процессов вышагивания (ratcheting).

#### *Литература*

1. *Ильюшин, А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин. – М.: Изд. АН СССР, 1963. – 271 с.
2. *Ильюшин, А.А.* Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
3. *Новожилов, В.В.* Микронапряжения в конструкционных материалах / В.В. Новожилов, Ю.И. Кадашевич. – Л.: Машиностроение, 1990. – 224 с.
4. *Бондарь, В.С.* Неупругость. Варианты теории / В.С. Бондарь. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.
5. *Бондарь, В.С.* Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения / В.С. Бондарь, В.В. Даншин. – М.: Физматлит, 2008. – 176 с.
6. *Зубчанинов, В.Г.* Механика процессов пластических сред / В.Г. Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.

[12.07.2011]

### **A VERSION OF THE THEORY OF ELASTIC-PLASTIC PROCESSES AND APPROXIMATION OF PLASTICITY FUNCTIONALS**

**V.S. Bondar', V.V. Danshin, P.V. Semenov**

A version of the theory of elastic-plastic processes and approximation of plasticity functionals is obtained on the basis of equations of the theory of elastic-plastic deformation related to the class of flow theories with combined hardening. The basic experiment and identification method for approximation parameters of plasticity functionals are formulated. Verification results of the version of the theory of elastic-plastic processes under complex loading by the flat trajectories of deformation are presented.

*Keywords:* plasticity, complex loading, basic experiment, identification, verification.