

УДК 539.3

К ВОПРОСУ ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ ТОЛСТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

П.Ф. Недорезов

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

В пространственной постановке рассматривается задача вибрационного изгиба толстой прямоугольной пластинки из изотропного материала. Предполагается, что два противоположных края свободно оперты при произвольном закреплении остальной части боковой поверхности. Трехмерная краевая дифференциальная задача для определения амплитуд проекций вектора смещения методом разделения переменных сводится к двумерной. Дальнейшее понижение размерности задачи выполняется методом сплайн-коллокации. Одномерная краевая задача решается численно методом дискретной ортогонализации. Приводится пример численного расчета.

Ключевые слова: толстая изотропная пластинка, изгибные колебания, численное решение, сплайны, дискретная ортогонализация.

1. Постановка задачи. Основные уравнения и соотношения

Рассматриваются установившиеся колебания толстой прямоугольной пластинки с толщиной h и размерами в плане $a \times b$ под действием поперечной нагрузки интенсивности $q(x, y, z)$, распределенной по поверхности $z = -h/2$ по закону

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) \exp(i \omega t), \quad q_0(x, y) = p_0(y) \sin m\pi x/a. \quad (1.1)$$

Координатная плоскость Oxy совмещена со срединной плоскостью пластинки, ось z направлена вниз. Материал считается идеально упругим и изотропным, а деформации малы. Края пластинки, перпендикулярные оси x , предполагаются свободно опертыми, два других края могут быть закреплены произвольно.

Напряженно-деформированное состояние (НДС) такой пластинки описывается системой уравнений, состоящей из уравнений движения сплошной среды и уравнений закона Гука в форме Ламе. Из этих уравнений после перехода к безразмерным переменным $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $\zeta = z/h$ ($0 \leq \xi, \eta \leq 1$, $-0,5 \leq \zeta \leq 0,5$) для безразмерных амплитуд проекций вектора смещения $U(\xi, \eta, \zeta)$, $V(\xi, \eta, \zeta)$, $W(\xi, \eta, \zeta)$, которые связаны с проекциями вектора смещения $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ и $w(x, y, z, t)$ зависимостями

$$u(x, y, z, t) = h^{-1} e^{i\omega t} U(\xi, \eta, \zeta), \quad v(x, y, z, t) = h^{-1} e^{i\omega t} V(\xi, \eta, \zeta), \\ w(x, y, z, t) = h^{-1} e^{i\omega t} W(\xi, \eta, \zeta),$$

в работе [1] получена система уравнений

$$h_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \beta \left(h_0^2 c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varsigma^2} \right) + (1 - \beta) h_0 \left(h_0 c \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \varsigma} \right) =$$

$$= -\alpha \rho h^2 \omega^2 U(\xi, \eta, \varsigma) \quad (a\xi \Leftrightarrow b\eta \Leftrightarrow h\varsigma; \quad U \Leftrightarrow V \Leftrightarrow W), \quad (1.2)$$

где $c = a/b$, $h_0 = h/a$ – безразмерная толщина пластинки, $\alpha = (\lambda + 2\mu)^{-1}$; $\beta = \mu\alpha$, λ и μ – постоянные Ламе, ρ – плотность материала пластинки.

Формулы для амплитудных значений $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \dots, \bar{\tau}_{xy}$ напряжений имеют вид [1]:

$$\bar{\sigma}_x = (\lambda + 2\mu) h_0 \frac{\partial U}{\partial \xi} + \lambda \left(h_0 c \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \varsigma} \right), \quad \bar{\tau}_{yz} = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial \varsigma} + h_0 c \frac{\partial W}{\partial \eta} \right),$$

$$\bar{\sigma}_y = \lambda h_0 \frac{\partial U}{\partial \xi} + (\lambda + 2\mu) h_0 c \frac{\partial V}{\partial \eta} + \lambda \frac{\partial W}{\partial \varsigma}, \quad \bar{\tau}_{xz} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial \varsigma} + h_0 \frac{\partial W}{\partial \xi} \right),$$

$$\bar{\sigma}_z = \lambda h_0 \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + c \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial W}{\partial \varsigma}, \quad \bar{\tau}_{xy} = \mu h_0 \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} + c \frac{\partial U}{\partial \eta} \right). \quad (1.3)$$

Граничные условия для функций U , V и W с учетом нагружения поверхности $\varsigma = -0,5$ при свободной поверхности $\varsigma = 0,5$ записываются в виде:

$$\text{при } \varsigma = -0,5 \quad \bar{\sigma}_z = -q_0(\xi, \eta), \quad \bar{\tau}_{xz} = 0, \quad \bar{\tau}_{yz} = 0,$$

$$\text{при } \varsigma = 0,5 \quad \bar{\sigma}_z = 0, \quad \bar{\tau}_{xz} = 0, \quad \bar{\tau}_{yz} = 0, \quad (1.4)$$

где $\bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ определяются соотношениями (1.3).

На свободно опертых краях должны выполняться условия при $\xi = 0, \xi = 1$

$$v = 0, \quad w = 0, \quad \sigma_x = 0$$

или с учетом выражений (1.3) при $\xi = 0, \xi = 1$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad V = 0, \quad W = 0. \quad (1.5)$$

На краях $\eta = 0, \eta = 1$ граничные условия формулируются в соответствии с условиями их закрепления. При жестком закреплении эти условия имеют вид:

$$\text{при } \eta = 0, \eta = 1 \quad U = V = W = 0, \quad (1.6)$$

или

$$\text{при } \eta = 0 \quad U = \frac{\partial V}{\partial \eta} = W = 0, \quad \text{при } \eta = 1 \quad U = V = W = 0 \quad (1.7)$$

в случае свободно опертого края $\eta = 0$ и жесткой заделки при $\eta = 1$.

2. Методика численного решения

Решение краевой задачи (1.2), (1.4), (1.5), (1.6) или (1.7) ищется в виде

$$U(\xi, \eta, \varsigma) = U_*(\eta, \varsigma) \cos m\pi\xi, \quad V(\xi, \eta, \varsigma) = V_*(\eta, \varsigma) \sin m\pi\xi$$

$$W(\xi, \eta, \varsigma) = W_*(\eta, \varsigma) \sin m\pi\xi. \quad (2.1)$$

Тогда условия (1.5) выполняются автоматически, а из уравнений (1.2) для функций

U_* , V_* и W_* получается система уравнений

$$\begin{aligned}
& \beta \frac{\partial^2 U_*}{\partial \zeta^2} + \beta h_0^2 c^2 \frac{\partial^2 U_*}{\partial \eta^2} - [h_0^2 m^2 \pi^2 - \alpha \rho h^2 \omega^2] U_*(\eta, \zeta) + \\
& \quad + (1 - \beta) h_0 m \pi \left(h_0 c \frac{\partial V_*}{\partial \eta} + \frac{\partial W_*}{\partial \zeta} \right) = 0, \\
& \beta \frac{\partial^2 V_*}{\partial \zeta^2} + h_0^2 c^2 \frac{\partial^2 V_*}{\partial \eta^2} - [\beta h_0^2 m^2 \pi^2 - \alpha \rho h^2 \omega^2] V_*(\eta, \zeta) - \\
& \quad - (1 - \beta) h_0 c \left(h_0 m \pi \frac{\partial V_*}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 W_*}{\partial \eta \partial \zeta} \right) = 0, \\
& \frac{\partial^2 W_*}{\partial \zeta^2} + \beta h_0^2 c^2 \frac{\partial^2 W_*}{\partial \eta^2} - [\beta h_0^2 m^2 \pi^2 - \alpha \rho h^2 \omega^2] W_*(\eta, \zeta) - \\
& \quad - (1 - \beta) h_0 \left(m \pi \frac{\partial U_*}{\partial \zeta} - c \frac{\partial^2 V_*}{\partial \eta \partial \zeta} \right) = 0. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Дальнейшее понижение размерности задачи выполняется методом сплайн-коллокации [2]. Согласно этому методу, приближенное решение системы уравнений (2.2) ищется в виде

$$\begin{aligned}
U_*(\eta, \zeta) &= \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) U_j(\zeta), \quad V_*(\eta, \zeta) = \sum_{j=0}^N \psi_j(\eta) V_j(\zeta), \\
W_*(\eta, \zeta) &= \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) W_j(\zeta), \tag{2.3}
\end{aligned}$$

где функции $\varphi_j(\eta)$ и $\psi_j(\eta)$ ($j = \overline{0, N}$) подобраны так, чтобы тождественно удовлетворялись условия при $\eta = 0, \eta = 1$. В качестве таких функций принимаются линейные комбинации нормализованных кубических B -сплайнов $B_{3,j}(\eta)$ [3], определенных на равномерной сетке $\{\eta_j\}$ ($\eta_j = j h_y, h_y = 1/N, j = \overline{-3, N+3}$). Эти комбинации имеют вид:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(\eta) = \psi_0(\eta) &= -4B_{3,-1}(\eta) + B_{3,0}(\eta), \quad \varphi_1(\eta) = \psi_1(\eta) = -B_{3,-1}(\eta) + B_{3,1}(\eta), \\
\varphi_j(\eta) = \psi_j(\eta) &= B_{3,j}(\eta) \quad (j = \overline{2, N-2}), \\
\varphi_{N-1}(\eta) = \psi_{N-1}(\eta) &= B_{3,N-1}(\eta) - B_{3,N+1}(\eta), \\
\varphi_N(\eta) = \psi_N(\eta) &= B_{3,N}(\eta) + B_{3,N+1}(\eta) \tag{2.4}
\end{aligned}$$

при условиях (1.6), или в случае условий (1.7)

$$\varphi_0(\eta) = B_{3,0}(\eta), \quad \psi_1(\eta) = B_{3,-1}(\eta) + B_{3,1}(\eta), \tag{2.5}$$

все функции $\varphi_j(\eta)$ и функции $\psi_k(\eta)$ ($k = \overline{2, N}$) по-прежнему определяются по формулам (2.4).

Выражения (2.3) подставляются в уравнения (2.2) и требуется, чтобы полученные соотношения выполнялись в точках коллокации $\eta = \eta_i^*$ ($i = \overline{0, N}$), которые определяются по правилу

$$\begin{aligned}\eta_i^* &= \eta_i + \tau h_y \quad (i = \overline{0, N/2 - 1}), \quad \eta_{N/2}^* = \eta_{N/2}, \\ \eta_i^* &= \eta_{i+1} - \tau h_y \quad (i = \overline{N/2 + 1, N}; \quad 0 < \tau < 1).\end{aligned}$$

В результате получается система уравнений относительно линейных комбинаций вторых производных от функций $U_j(\zeta)$, $V_j(\zeta)$ и $W_j(\zeta)$, коэффициентами этих комбинаций являются значения $\varphi_j(\eta_i^*)$ и $\psi_j(\eta_i^*)$. Эта система разрешается относительно величин $d^2 U_j / d\zeta^2$, $d^2 V_j / d\zeta^2$ и $d^2 W_j / d\zeta^2$, что всегда возможно при соответствующем выборе точек коллокации, и затем преобразуется в записанную в нормальной форме Коши систему уравнений первого порядка

$$\frac{d\bar{Z}}{d\zeta} = C\bar{Z}(\zeta). \quad (2.6)$$

Здесь $C = \{c_{r,s}\}$ – известная квадратная матрица размерности $(6N + 6) \times (6N + 6)$, $\bar{Z}(\zeta) = \{z_r(\zeta)\}$ ($r = \overline{0, 6N + 5}$) – вектор неизвестных, компоненты которого связаны с функциями $U_j(\zeta)$, $V_j(\zeta)$ и $W_j(\zeta)$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}z_i(\zeta) &= U_i(\zeta), \quad z_{i+N+1}(\zeta) = V_i(\zeta), \quad z_{i+2N+2}(\zeta) = W_i(\zeta), \\ z_{i+3N+3}(\zeta) &= \frac{dU_i}{d\zeta}, \quad z_{i+4N+4}(\zeta) = \frac{dV_i}{d\zeta}, \quad z_{i+5N+5}(\zeta) = \frac{dW_i}{d\zeta} \quad (i = \overline{0, N}).\end{aligned} \quad (2.7)$$

Для амплитуд проекций вектора смещения выражения через компоненты вектора $\bar{Z}(\zeta)$ получаются из (2.1), (2.3) и (2.5) и имеют вид

$$\begin{aligned}U(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) z_j(\zeta) \cos m\pi\xi, \quad V(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=0}^N \psi_j(\eta) z_{j+N+1}(\zeta) \sin m\pi\xi, \\ W(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) z_{j+2N+2}(\zeta) \sin m\pi\xi.\end{aligned} \quad (2.8)$$

Соответствующие формулы для амплитуд напряжений следуют из (1.3) и (2.7):

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \left[-(\lambda + 2\mu)h_0 m\pi \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) z_j(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda h_0 c \sum_{j=0}^N \psi'_j(\eta) z_{j+N+1}(\zeta) + \lambda \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) z_{j+5N+5}(\zeta) \right] \sin m\pi\xi, \\ \bar{\sigma}_y &= \left[-\lambda h_0 m\pi \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) z_j(\zeta) + (\lambda + 2\mu)h_0 c \sum_{j=0}^N \psi'_j(\eta) z_{j+N+1}(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) z_{j+5N+5}(\zeta) \right] \sin m\pi\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_z &= \left[-\lambda h_0 m \pi \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) z_j(\zeta) + \lambda h_0 c \sum_{j=0}^N \psi'_j(\eta) z_{j+N+1}(\zeta) + \right. \\
&\quad \left. + (\lambda + 2\mu) \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) z_{j+5N+5}(\zeta) \right] \sin m\pi\xi, \\
\bar{\tau}_{yz} &= \mu \left[\sum_{j=0}^N \psi_j(\eta) z_{j+4N+4}(\zeta) + h_0 c \sum_{j=0}^N \varphi'_j(\eta) z_{j+2N+2}(\zeta) \right] \sin m\pi\xi, \\
\bar{\tau}_{xz} &= \mu \left[\sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) z_{j+3N+3}(\zeta) + h_0 m \pi \sum_{j=0}^N \varphi'_j(\eta) z_{j+2N+2}(\zeta) \right] \cos m\pi\xi, \\
\bar{\tau}_{xy} &= \mu h_0 \left[\sum_{j=0}^N \varphi'_j(\eta) z_j(\zeta) + m \pi \sum_{j=0}^N \psi_j(\eta) z_{j+N+1}(\zeta) \right] \cos m\pi\xi. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Из условий (1.4), выполнение которых требуется в конечных точках отрезков $\eta = \eta_i^*$ ($i = \overline{0, N}$), получаются граничные условия для вектор-функции $\bar{Z}(\zeta)$:

$$H_1 \bar{Z}(-0,5) = \bar{g}, \quad H_2 \bar{Z}(0,5) = 0. \quad (2.10)$$

Компоненты матриц $H_1 = \{h_{r,s}\}$, $H_2 = \{h_{r+3N+3,s}\}$ ($r = \overline{0, 3N+2}$, $s = \overline{0, 6N+5}$) и вектора $\bar{g} = \{g_r\}$ ($r = \overline{0, 3N+2}$) легко определяются в соответствии с выражениями $\bar{\sigma}_z$, $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ из (2.9).

В случае условий жесткого закрепления краев $\eta = 0$ и $\eta = 1$ все формулы несколько упрощаются в силу равенств $\psi_j(\eta) = \varphi_j(\eta)$ ($j = \overline{0, N}$).

Краевая задача (2.6), (2.10) решается численно методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Отметим, что при свободных от закрепления краях $\eta = 0$ и $\eta = 1$ понижение размерности уравнений (2.2) может быть выполнено модифицированным методом сплайн-коллокации [4].

3. Пример числовых расчетов

Изложенный подход был реализован при численном исследовании колебаний стальных квадратных пластинок ($a = b = 1,0$ м; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0,3$) при $m = 1$ и значении $p_0 = 1,57$ Н/м², которому соответствует равнодействующая нагрузки при $\zeta = -0,5$, равная 1,0 Н. Края $\eta = 0$ и $\eta = 1$ предполагались жестко защемленными.

В процессе вычислений определялись первые три резонансные частоты $\omega_{\text{рез}}^{(k)} = \omega_k + \delta$ изгибных (или изгибно-планарных в направлениях ξ и η) колебаний и два значения $\tilde{\omega}_k = \Omega_k + \delta$ ($\delta < 1 \text{ с}^{-1}$), которым соответствует планарная в направлении ξ форма колебаний с практически постоянными для каждого $\eta = \text{const}$ значениями $U_*(\eta, \zeta)$ и $V_*(\eta, \zeta)$. Эти значения ω_k ($k = 1, 2, 3$) и Ω_k ($k = 1, 2$) указаны в таблице; значения во второй строке для каждого ω_k ($k = 1, 2, 3$) соответствуют классической теории.

Таблица

h_0	0,025	0,050	0,075	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	0,225	0,250
ω_1, c^{-1}	1104	2169	3178	4105	4942	5687	6346	6927	7439	7890
	1109	2218	3327	4436	5545	6654	7763	8872	9981	11090
ω_2, c^{-1}	4796	9191	12814	15673	17891	19611	20962	22033	22909	23640
	4945	9890	14836	19781	24727	29672	34618	39563	44509	49454
ω_3, c^{-1}	11160	20385	26592	31493	34680	36987	38709	40026	41044	41769
	11772	23545	35318	47091	58864	70637	82409	94182	105955	117728
Ω_1, c^{-1}	18553	18556	18557	18557	18555	18553	18550	18544	18537	18529
Ω_2, c^{-1}	29877	29878	29878	29875	29871	29865	29856	29845	29831	29814

Из результатов, приведенных в таблице, следует, что классическая теория завышает значения резонансных частот, причем погрешность, малая при $k=1$ в тонких пластинках, быстро растет с увеличением k и h_0 .

Числовые расчеты показывают, что характер колебаний пластинки существенно зависит от ее толщины и частоты внешнего воздействия. В тонких пластинках ($h_0 \leq 0,05$) при $\omega \leq \omega_3$ колебания остаются чисто изгибными с постоянными или мало меняющимися по толщине составляющими прогиба при линейном изменении по ζ составляющих тангенциальных смещений. Однако уже при $h_0 = 0,075$ для $\omega = \omega_3$ в отдельных сечениях наряду с чисто изгибными появляются планарные колебания в направлении ξ .

Одновременно становится заметным изменение составляющих прогиба по толщине пластинки, причем в одном и том же сечении $\eta = \text{const}$ при разных значениях ω закон изменения $W_*(\eta, \zeta)$ по толщине может быть качественно различным. Это видно на рис. 1, где для значения $h_0 = 0,1$ изображены графики изменения по толщине функции $\tilde{W}_*(\zeta) = 10^{12} W_*$ ($\eta = 0,2; \zeta$): кривая 1 ($\omega = 11540 \text{ c}^{-1}$) и кривая 2 ($\omega = 11550 \text{ c}^{-1}$) соответствуют «подтягиванию», кривая 3 ($\omega = 11600 \text{ c}^{-1}$) – «разбухание», кривая 4 – $\omega = 11700 \text{ c}^{-1}$.

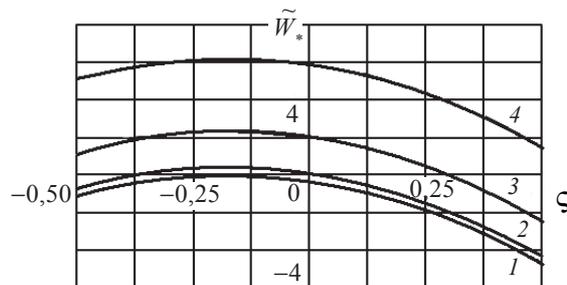


Рис. 1

Отметим, что при указанных значениях ω в сечении $\eta = 0,2$ знак тангенциального смещения $U_*(\eta = 0,2; \zeta)$ не меняется, что свидетельствует о наличии в колебаниях этого сечения большой планарной составляющей в направлении ξ , тогда как в сечениях $\eta \geq 0,3$ функция $U_*(\eta, \zeta)$ по толщине меняется практически по линейному закону, а $W_*(\eta, \zeta)$ принимает постоянные значения, т.е. колебания в этих сечениях остаются чисто изгибными.

Приведенные результаты подтверждают сделанные в [1] выводы о том, что:

– для тонких пластинок ($h_0 \leq 0,025$) классическая теория Кирхгофа с высокой точностью определяет первые три резонансные частоты и форму изогнутой срединной поверхности колеблющейся пластинки, однако с увеличением частоты ω и толщины h_0 погрешность этих значений быстро растет;

– нелинейные эффекты, в том числе «разбухание» и «подтягивание», при высокочастотных колебаниях прямоугольных пластинок являются следствием интерференции волн и наблюдаются независимо от физических свойств материала, из которого пластинки изготовлены.

Литература

1. Недорезов, П.Ф. О некоторых нелинейных эффектах при установившихся колебаниях толстой прямоугольной пластинки из изотропного материала / П.Ф. Недорезов // Математическая физика и нанотехнологии: Тр. Методолог. школы-конф. / Самарск. гос. ун-т. – Самара, 2010. – С. 75–84.

2. Григоренко, Я.М. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) / Я.М. Григоренко, Н.Н. Крюков // Прикл. механика. – 1995. – **31**, №6. – С. 3–26.

3. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов., Ю.И. Квасов, И.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

4. Недорезов, П.Ф. Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба прямоугольных пластинок / П.Ф. Недорезов, Ю.В. Шевцова, О.М. Ромакина // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Второй Всерос. науч. конф. – Самара: СамГТУ, 2005. – Ч. 1. – С. 203–209.

[09.07.2010]

ON THE STEADY-STATE VIBRATIONS OF A THICK RECTANGULAR PLATE MADE OF AN ISOTROPIC MATERIAL

P.F. Nedorezov

The problem of vibration bending of a thick rectangular plate made of an isotropic material in 3-D formulation is studied. The two opposite edges are assumed to be freely supported, the rest of the side surface being randomly fixed. The 3-D resulting boundary value differential problem of determining the amplitude of the displacement vector projections is reduced to a 2-D one using the method of variable splitting. Further reduction of the dimension of the problem is done with the help of the spline-collocation method. The 1-D problem is solved using the discrete orthogonalization method. An example of numerical computation is presented.

Key words: a thick isotropic plate, bending vibrations, numerical analysis, splines, discrete orthogonalization.