

УДК 539.3

**РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ
МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ^{*)}****Л.Ф. Спевак***Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург*

Представлен метод определения области нелинейной деформации и расчета напряженно-деформированного состояния при упругопластическом деформировании на основе метода граничных элементов. Использование аналитического вычисления всех граничных интегралов обеспечивает высокую эффективность предложенного подхода. Алгоритм решения проиллюстрирован на примере задачи нагружения квадратной пластины с отверстием.

Ключевые слова: граничный элемент, аналитическое интегрирование, упругость, пластичность.

Решение задач упругого деформирования твердых тел методом граничных элементов позволяет снизить размерность задачи на единицу и получить решение внутри исследуемой области в непрерывном виде с точностью до аппроксимации на границе. Применение аналитических формул для точного вычисления граничных интегралов позволяет повысить скорость и точность расчетов [1–8]. В работах [1–4] получены формулы для вычисления всех необходимых при решении интегралов для двумерных задач теории упругости, когда граничные элементы являются прямолинейными или дугами окружностей. Универсальность этих формул позволяет включить их в базовый алгоритм решения, единый в рамках постановки и не зависящий от свойств конкретного материала и геометрии деформируемого объекта. Последнее является существенным при создании расчетных программ. Кроме этого, полученные с использованием аналитического интегрирования поля напряжений и деформаций не только являются непрерывными в смысле вычисления их значений во внутренних точках области, но и представимы в виде аналитических выражений, что дает возможность корректно вычислять их производные. Решение методом граничных элементов задач упругопластического деформирования значительно сложнее, однако и здесь применение аналитического интегрирования приводит к существенному прогрессу.

Поставим задачу определения вектора перемещений u_i , тензора деформаций ϵ_{ij} и тензора напряжений σ_{ij} , которые удовлетворяют в плоской области Ω системе уравнений:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1)$$

^{*)} Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН № 14 «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация». Направление 3. Вычислительные технологии и системы.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, & T < \tau_s, \\ 2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \sigma_{ij}^a = \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij}^a, & T \geq \tau_s, \end{cases} \quad (3)$$

и заданным граничным условиям:

$$\begin{aligned} & \text{– на поверхности } S_f \quad \sigma_{ij}n_j = f_i = f_i^*, \\ & \text{– на поверхности } S_u \quad u_i = u_i^*. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\sigma_{ij,j} = \partial\sigma_{ij}/\partial x_j$, по повторяющемуся индексу везде производится суммирование от 1 до 2; $u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j$; μ – модуль упругости при сдвиге, ν – коэффициент Пуассона, δ_{ij} – единичный тензор, $S = S_u \cup S_f$ – поверхность области Ω ; n_i – вектор внешней нормали к поверхности; f_i^* и u_i^* – известные граничные значения поверхностных напряжений и перемещений, T – интенсивность касательных напряжений, $T = \sqrt{1/2 s_{ij}s_{ij}}$; s_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений, $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk}\delta_{ij}$; τ_s – предел текучести; σ_{ij}^a – «начальные» напряжения [9], нелинейно зависящие от деформации.

Обобщенную формулировку уравнения равновесия

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} w_i d\Omega = 0, \quad (5)$$

используя интегрирование по частям, формулу Гаусса–Остроградского и закон взаимности Бетти, можно привести к следующему виду [3, 9]:

$$\int_{\Omega} u_i \sigma_{ij,j}(w) d\Omega + \int_S [f_i(u) w_i - u_i f_i(w)] dS + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^a w_{i,j} d\Omega = 0. \quad (6)$$

Здесь w_i – весовые функции,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(w) &= \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \\ \sigma_{ij}(w) &= 2\mu\varepsilon_{ij}(w) + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}(w)\delta_{ij}, \\ f_i(w) &= \sigma_{ij}(w)n_j. \end{aligned} \quad (7)$$

Если в качестве весовых функций принять компоненты фундаментального решения задачи теории упругости

$$\sigma_{ij,j}(w) + \delta(\xi, x) e_i = 0, \quad (8)$$

где $\delta(\xi, x)$ – дельта-функция Дирака, ξ – особая точка, $x \in \Omega$ – точка пространства, e_i – орты прямоугольной системы координат, уравнение (6) приведет к соотношению, справедливому для любой внутренней точки ξ области Ω :

$$u_i(\xi) = \int_S [f_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) - u_j(x) f_{ij}^*(\xi, x)] dS(x) + \int_{\Omega} \sigma_{kj}^a u_{ik,j}^*(\xi, x) d\Omega(x). \quad (9)$$

Здесь функции влияния $u_{ij}^*(\xi, x)$ и $f_{ij}^*(\xi, x)$ определяются решением Кельвина урав-

нения (8). Для двумерных задач теории упругости они имеют следующий вид [9]:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu}[(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} - r_i r_j], \quad (10)$$

$$f_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i), \quad (11)$$

где $r = r(\xi, x)$ – расстояние между точками x и ξ ,

$$r = \sqrt{r_i r_i}, \quad r_i = x_i - \xi_i, \quad r_{,i} = \frac{r_i}{r}. \quad (12)$$

Устремив точку ξ к границе, получим граничные интегральные уравнения

$$\begin{aligned} c_{ij}(x_0)u_j(x_0) &= \int_{S_f} [f_j^*(x)u_{ij}^*(x_0, x) - u_j(x)f_{ij}^*(x_0, x)]dS(x) + \\ &+ \int_{S_u} [f_j(x)u_{ij}^*(x_0, x) - u_j^*(x)f_{ij}^*(x_0, x)]dS(x) + \int_{\Omega} \sigma_{kj}^a u_{ik,j}^*(x_0, x)d\Omega(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $x_0 \in S$,

$$\begin{aligned} c_{ij}(x_0) &= \delta_{ij} + \alpha_{ij}(x_0), \quad \alpha_{11}(x_0) = -1 - c_3 \left(\omega(c_4 + 1) + \frac{\sin 2\omega}{2} \right), \\ \alpha_{22}(x_0) &= -1 - c_3 \left(\omega(c_4 + 1) - \frac{\sin 2\omega}{2} \right), \quad \alpha_{12}(x_0) = \alpha_{21}(x_0) = -c_3 \sin^2 \omega, \end{aligned} \quad (14)$$

ω – величина угла внутри деформируемой области, образованного в граничной точке x_0 [3, 10]. В случае когда точка x_0 лежит на гладкой поверхности, $c_{ij}(x_0) = \delta_{ij}/2$.

Для расчета напряженно-деформированного состояния при упругопластическом деформировании построена следующая пошаговая процедура:

(1) На первом шаге решаем задачу теории упругости для области Ω : при $\sigma_{kj}^a = 0$ для некоторого разбиения границы S на граничные элементы уравнение (13) сводится к системе линейных уравнений, решение которой дает недостающие значения перемещений и поверхностных напряжений на S . По найденным граничным значениям $u_i^{(1)}$ и $f_i^{(1)}$ определяются перемещения $u_i^{(1)}$, деформации $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ и упругие напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ внутри области:

$$u_i^{(1)}(\xi) = \int_S [f_j^{(1)}(x)u_{ij}^*(\xi, x) - u_j^{(1)}(x)f_{ij}^*(\xi, x)]dS(x), \quad (15)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)}(\xi) = \int_S [f_s^{(1)}(x)w_{sij}^*(\xi, x) - u_s^{(1)}(x)g_{sij}^*(\xi, x)]dS(x), \quad (16)$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} = 2\mu\varepsilon_{ij}^{(1)} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}^{(1)}\delta_{ij}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} w_{ijk}^*(\xi, x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{ik}^*(\xi, x)}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_{jk}^*(\xi, x)}{\partial \xi_i} \right), \\ g_{ijk}^*(\xi, x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_{ik}^*(\xi, x)}{\partial \xi_j} + \frac{\partial f_{jk}^*(\xi, x)}{\partial \xi_i} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Далее, используя условие текучести $T = \tau_s$, определяем границу $S_{\text{пл}}$ пластической зоны $\Omega_{\text{пл}}$. Внутри пластической зоны в соответствии с определяющим уравнением (3) находим $\sigma_{ij}^a(\epsilon^{(1)})$.

(2) На втором шаге решаем граничное интегральное уравнение (13) с учетом начальных напряжений $\sigma_{ij}^a(\epsilon^{(1)})$:

$$c_{ij}(x_0)u_j(x_0) = \int_{S_f} [f_j^*(x)u_{ij}^*(x_0, x) - u_j(x)f_{ij}^*(x_0, x)]dS(x) + \int_{S_u} [f_j(x)u_{ij}^*(x_0, x) - u_j^*(x)f_{ij}^*(x_0, x)]dS(x) + \int_{\Omega_{\text{пл}}} \sigma_{kj}^a(\epsilon^{(1)})u_{ik,j}^*(x_0, x)d\Omega(x). \quad (19)$$

Для вычисления последнего интеграла в (19) область $\Omega_{\text{пл}}$ разбивается на конечные элементы. Полагая значения σ_{ij}^a постоянными на каждом элементе, интеграл по пластической области можно вычислить следующим образом:

$$\int_{\Omega_{\text{пл}}} \sigma_{ij}^a(\epsilon^{(1)})u_{ik,j}^*(x_0, x)d\Omega(x) = \sum_{m=1}^{N_{\text{пл}}} \sigma_{ij}^{a(m)} \int_{e_m} u_{ik,j}^*(x_0, x)d\Omega(x) = \sum_{m=1}^{N_{\text{пл}}} \sigma_{kj}^{a(m)} \int_{S_m} u_{ik}^*(x_0, x)n_j dS(x), \quad (20)$$

где $N_{\text{пл}}$ – число конечных элементов в области $\Omega_{\text{пл}}$; $\sigma_{ij}^{a(m)}$ – значения компонент начального напряжения на элементе e_m ; S_m – граница элемента e_m ; n_j – компоненты внешней нормали к границе S_m . Если границы конечных элементов являются прямолинейными отрезками или дугами окружностей, интегралы в правой части соотношения (20) вычисляются аналитически по формулам, полученным для задач теории упругости [1–4]. Таким образом, разрешающая система уравнений может быть полностью составлена с помощью аналитических формул.

Решение системы уравнений (19) дает второе приближение граничных значений $u_i^{(2)}$ и $f_i^{(2)}$. Перемещения $u_i^{(2)}$ внутри области Ω вычисляются в соответствии с уравнением (9):

$$u_i^{(2)}(\xi) = \int_S [f_j^{(2)}(x)u_{ij}^*(\xi, x) - u_j^{(2)}(x)f_{ij}^*(\xi, x)]dS(x) + \int_{\Omega_{\text{пл}}} \sigma_{kj}^a(\epsilon^{(1)})u_{ik,j}^*(\xi, x)d\Omega(x). \quad (21)$$

Последний интеграл в выражении (21) вычисляется аналогично (20). Деформации $\epsilon_{ij}^{(2)}$ внутри области Ω вычисляются следующим образом:

$$\epsilon_{ij}^{(2)}(\xi) = \int_S [f_s^{(2)}(x)w_{sij}^*(\xi, x) - u_s^{(2)}(x)g_{sij}^*(\xi, x)]dS(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\int_{\Omega_{\text{пл}}} \sigma_{rs}^a(\epsilon^{(1)})u_{ir,s}^*(\xi, x)d\Omega(x) \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\int_{\Omega_{\text{пл}}} \sigma_{rs}^a(\epsilon^{(1)})u_{jr,s}^*(\xi, x)d\Omega(x) \right) \right). \quad (22)$$

Напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ внутри области вычисляются в соответствии с определяющими соотношениями (3). Далее, по условию текучести пересчитывается пластическая область $\Omega_{\text{пл}}$ и внутри нее определяется $\sigma_{ij}^a(\epsilon^{(2)})$.

Производные от интегралов по пластической области, входящие в соотношение (22), вычисляются в соответствии с [9]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\int_{\Omega_{\text{пл}}} \sigma_{rs}^a(x) u_{ir,s}^*(\xi, x) d\Omega(x) \right) = \int_{\Omega_{\text{пл}}} \sigma_{rs}^a(x) \frac{\partial u_{ir,s}^*(\xi, x)}{\partial \xi_j} d\Omega(x) - \sigma_{rs}^a(\xi) \int_{S_1} u_{ir,s}^*(\xi, x) r_{,j} dS(x). \quad (23)$$

Здесь S_1 – окружность единичного радиуса с центром в точке ξ . Отметим, что

$$u_{ir,s}^*(\xi, x) = \frac{\partial u_{ir}^*(\xi, x)}{\partial x_s}, \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x_j}.$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (23) можно вычислить аналогично (20):

$$\int_{\Omega_{\text{пл}}} \sigma_{rs}^a(x) \frac{\partial u_{ir,s}^*(\xi, x)}{\partial \xi_j} d\Omega(x) = \sum_{m=1}^{N_{\text{пл}}} \sigma_{rs}^{a(m)} \int_{S_m} \frac{\partial u_{ir}^*(\xi, x)}{\partial \xi_j} n_s dS(x). \quad (24)$$

Интегралы во втором слагаемом правой части уравнения (23) вычисляются аналитически. Следующие из них имеют ненулевые значения:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} u_{11,1}^*(\xi, x) r_{,1} dS(x) &= \int_{S_1} u_{22,2}^*(\xi, x) r_{,2} dS(x) = c_1 \pi \left(c_2 - \frac{1}{2} \right), \\ \int_{S_1} u_{11,2}^*(\xi, x) r_{,2} dS(x) &= \int_{S_1} u_{22,1}^*(\xi, x) r_{,1} dS(x) = c_1 \pi \left(c_2 + \frac{1}{2} \right), \\ \int_{S_1} u_{12,2}^*(\xi, x) r_{,1} dS(x) &= \int_{S_1} u_{12,1}^*(\xi, x) r_{,2} dS(x) = -\frac{c_1 \pi}{2}. \end{aligned} \quad (25)$$

(n + 1) На (n + 1)-м шаге решается система уравнений

$$\begin{aligned} c_{ij}(x_0) u_j(x_0) &= \int_{S_f} [f_j^*(x) u_{ij}^*(x_0, x) - u_j(x) f_{ij}^*(x_0, x)] dS(x) + \\ &+ \int_{S_u} [f_j(x) u_{ij}^*(x_0, x) - u_j(x) f_{ij}^*(x_0, x)] dS(x) + \\ &+ \int_{\Omega_{\text{пл}}} \sigma_{kj}^a(\epsilon^{(n)}) u_{ik,j}^*(x_0, x) d\Omega(x). \end{aligned} \quad (26)$$

По найденным значениям перемещений $u_i^{(n+1)}$ и поверхностных напряжений $f_i^{(n+1)}$ на границе, аналогично второму шагу, определяются перемещения $u_i^{(n+1)}$, деформации $\epsilon_{ij}^{(n+1)}$ и напряжения $\sigma_{ij}^{(n+1)}$ внутри области.

Таким образом, на каждом шаге построение разрешающей системы уравнений и вычисление параметров напряженно-деформированного состояния внутри области производится на основе формул аналитического интегрирования.

Предложенный алгоритм решения был опробован на задаче однородного нагружения квадратной пластины с круговым отверстием. Ввиду симметрии задачи расчеты были произведены для четверти пластины (рис. 1).

Предполагаем, что деформация протекает в условиях плоского напряженного состояния, длина стороны пластины $a = 20$ м, радиус отверстия $R = 1$ м. Параметры упругости были приняты следующими: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,33$. Свойства материала в пластической области определяются уравнениями

$$s_{ij} = \frac{2\Gamma}{\Gamma} e_{ij}, \quad T = n + m\Gamma. \quad (27)$$

Здесь Γ – интенсивность деформаций сдвига, $\Gamma = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}$, e_{ij} – компоненты девиатора тензора деформаций, $e_{ij} = \epsilon_{ij} - 1/3 \epsilon_{kk} \delta_{ij}$. Из соотношений (27) следует, что

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 2\mu\epsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij}, & T < \tau_s, \\ 2\mu\epsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} - 2\left(\mu - m - \frac{n}{\Gamma}\right) \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij}\right), & T \geq \tau_s. \end{cases} \quad (28)$$

Это означает, что для принятого вида определяющих уравнений можно считать, что в уравнении (3)

$$\sigma_{ij}^a = 2\left(\mu - m - \frac{n}{\Gamma}\right) \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij}\right). \quad (29)$$

Итерационная процедура расчета была проведена при $f = 2 \cdot 10^8$ Н/м², $\tau_s = 2 \cdot 10^8$ Н/м², $m = 2 \cdot 10^8$ Н/м², значение параметра n определяется из условия непрерывности соотношения (29) при $T = \tau_s$. Результаты решения сравнивались с расчетами в пакете ANSYS. На рис. 2 приведены значения σ_{22} вдоль оси x_1 . Близость полученного решения к результатам расчетов в ANSYS дает основания считать построенный пошаговый алгоритм эффективным.

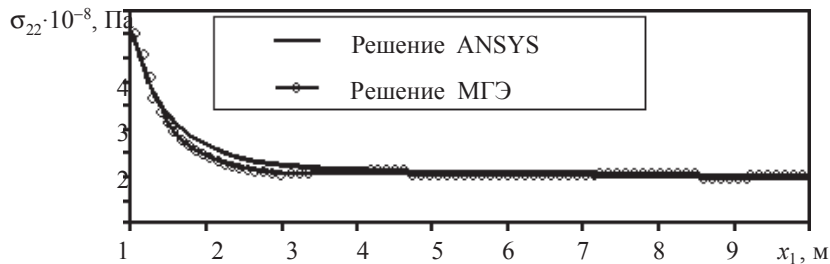


Рис. 2

Литература

1. Федотов, В.П. Исследование сходимости численно-аналитического метода решения задач упругости, теплопроводности и диффузии / В.П. Федотов [и др.] // Вестник СамГТУ, сер. Физико-математические науки. – 2004. – Вып. 30. – С. 24–32.
2. Федотов, В.П. Аналитическое интегрирование функций влияния для решения задач упругости и теории потенциала методом граничных элементов / В.П. Федотов, Л.Ф. Спевак // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19, №2. – С. 87–104.
3. Федотов, В.П. Решение связанных диффузионно-деформационных задач на основе

алгоритмов параллельного действия / В.П. Федотов, Л.Ф. Спевак. – Екатеринбург: УрО РАН, 2007. – 172 с.

4. *Fedotov, V.P.* One approach to the derivation of exact integration formulae in the boundary element method / V.P. Fedotov, L.F. Spevak // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2008. – V. 32, No 10. – P. 883–888.

5. *Padhi, G.S.* Analytic integration of kernel shape function product integrals in the boundary element method / G.S. Padhi [et al.] // *Computers & Structures*. – 2001. – V. 79, No 14. – P. 1325–1333.

6. *Salvadori, A.* Analytical integrations of hypersingular kernel in 3D BEM problems / A. Salvadori // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2001. – V. 190. – P. 3957–3975.

7. *Zhang Xiaosong.* Exact integration in the boundary element method for two-dimensional elastostatic problems / Xiaosong Zhang, Xiaoxian Zhang // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2003. – V. 27, No 10. – P. 987–997.

8. *Zhang Xiaosong.* Exact integration for stress evaluation in the boundary element analysis of two-dimensional elastostatics/ Xiaosong Zhang, Xiaoxian Zhang // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2004. – V. 28, No 9. – P. 997–1004.

9. *Бреббия, К.* Метод граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.

10. *Бенерджи, П.* Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

[25.02.2010]

BOUNDARY-ELEMENT ANALYSIS OF THE STRESSED-STRAINED STATE FOR ELASTOPLASTIC DEFORMATION

L.F. Spevak

A method of evaluating the nonlinear deformation region and analyzing the stressed-strained state for elastoplastic deformation using BEM is presented. Analytical computation of all the boundary integrals results in high efficiency of the present method. The solution algorithm is illustrated by analyzing the problem of loading a square plate with a perforation.

Key words: boundary element, analytical integration, elasticity, plasticity.