УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ ПОРОУПРУГОСТИ[*)]

И.С. Карелин

НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

Продемонстрирована возможность применения гранично-элементной методики при получении решений краевых динамических задач трехмерной пороупругости. Представлены гранично-элементная методика численного решения одномерных задач пороупругости, а также примеры численного моделирования.

Ключевые слова: граничный элемент, пороупругость, граничные интегральные уравнения, численное обращение интегрального преобразования.

Введение

Вопросами распространения волн в пористых насыщенных средах в последние годы занимались Н.С. Городецкая (1998), Н. Дунин, Д. Михайлов, В. Николаевский (2002), R. Ababou и др. (2002), D.F. Aldridg и др. (2005), J. Jocker и D. Smenlders (2005), G. Chao и др. (2005), H.F. Wang (2000) и многие другие. Привлечение метода граничных элементов к решению соответствующих задач находится в стадии становления [1–5]. Для учета пористости используется теория М. Био [6, 7]. В статье приводится гранично-элементная методика моделирования волн трехмерной динамической теории пороупругости. Представлены результаты численных экспериментов.

1. Гранично-элементное моделирование

Детали редукции исходной начально-краевой задачи трехмерной теории пороупругости к эквивалентной системе разрешающих граничных интегральных уравнений (ГИУ) можно найти в [2–4]. Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассмотрим регуляризованные уравнения [4]:

$$\alpha_\Omega \tilde{\upsilon}_k(x,s) + \int_\Gamma (\tilde{T}_{ik}(x,y,s)\tilde{\upsilon}_i(y,s) - \tilde{T}^0_{ik}(x,y,s)\tilde{\upsilon}_i(x,s) - \\ - \tilde{G}_{ik}(x,y,s)\tilde{t}_i(y,s))\,d\Gamma = 0. \qquad (1)$$

$$\alpha_\Omega \tilde{\upsilon}_k(x,t) + \int_0^t \int_\Gamma (\tilde{T}_{ik}(x,y,t-\tau)\tilde{\upsilon}_i(y,\tau) - \tilde{T}^0_{ik}(x,y,t-\tau)\tilde{\upsilon}_i(x,\tau) -$$

*) Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Программы государственной поддержки ведущих научных школ России (проект НШ-4807.2010.8), а также при поддержке РФФИ (проект 10-08-01017-а).

$$-\tilde{G}_{ik}(x,y,t-\tau)\,\tilde{t}_i(y,\tau))\,d\Gamma d\tau = 0, \tag{2}$$

$$x\in\Gamma,\quad \tilde{t}=[t_1,t_2,t_3,q]^{\mathrm{T}},\quad \tilde{\upsilon}=\{u_1,u_2,u_3,p\},\quad s=\alpha+i\omega,$$

где $\tilde{\upsilon}, \tilde{t}$ – обобщенные перемещения и силы; $\tilde{G}$, $\tilde{T}$ – матрицы фундаментальных и сингулярных решений, $\tilde{T}^0$ – особенности сингулярных решений.

Для численного обращения решения ГИУ (1) использован алгоритм, предложенный Дурбином [8]:

$$f(t_j)\approx 2\frac{e^{j\alpha\Delta t}}{T}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\bar{f}(\alpha)\}+\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N}\left(A(n)+iB(n)\right)W^{jn}\right\}\right],$$

$$s_n=\alpha+in\frac{2\pi}{T},\quad W=e^{i2\pi/N},$$

$$A(n)=\sum_{l=0}^{L}\mathrm{Re}\left\{\bar{f}\left(\alpha+i(n+lN)\frac{2\pi}{T}\right)\right\},\quad B(n)=\sum_{l=0}^{L}\mathrm{Im}\left\{\bar{f}\left(\alpha+i(n+lN)\frac{2\pi}{T}\right)\right\},$$

$$n=0,1,\ldots,N,\quad l=0,1,\ldots,L,\quad t_j=j\Delta t=jT/N,\quad j=0,1,\ldots,N-1.$$

Для решения ГИУ (2) применен метод квадратур сверток [9, 10]:

$$y(t)=\int_0^t q(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau,\quad y(n\Delta t)=\sum_{k=0}^{n}\omega_{n-k}(\Delta t)g(k\Delta t),\quad n=0,1,\ldots,N,$$

$$\omega_n(\Delta t)=\frac{R^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\bar{q}(\gamma(Re^{il2\pi L^{-1}})/\Delta t)e^{-inl2\pi L^{-1}},$$

$$\gamma(z)=\frac{3}{2}-2z+\frac{z^2}{2},\quad R^N=\sqrt{\varepsilon},\quad \varepsilon=10^{-6}.$$

Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности Γ на граничные элементы: четырехугольные и треугольные восьмиузловые биквадратичные элементы. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы. Связь локальной и глобальной систем координат $\xi = (\xi_1,\xi_2)$, $y=(y_1(\xi),y_2(\xi),y_3(\xi))$ записывается через функции формы $N^l(\xi)$:

$$y_i(\xi)=\sum_{l=1}^{8}N^l(\xi)y_i^{\beta(k,l)},\quad i=1,2,3,\quad \xi\in\Delta_e,$$

где $\beta(k,l)$ – глобальный номер узла, имеющего в k-м элементе локальный номер l. Далее определяется естественный базис, метрический тензор и единичная нормаль на элементе.

Неизвестные граничные поля $(\tilde{\upsilon}, \tilde{t})$ интерполируются через узловые значения. Рассматриваем случай, называемый согласованным интерполированием, где для аппроксимации граничных перемещений применяем билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил – постоянные элементы.

Для получения дискретного аналога ГИУ применяем метод коллокации. В качестве узлов коллокации y^m выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируется система линейных алгебраических уравнений, решением которой являются искомые граничные поля.

2. Численные результаты

Рассмотрена задача о действии вертикальной силы $t_3(t) = P_0 f(t)$, $P_0 = -1000$ Н/м², $f(t) = H(t)$, на поверхность полупространства со следующими параметрами материала: $E = 2{,}544 \cdot 10^8$ Н/м², $\nu = 0{,}298$, $\rho = 1884$ кг/м³, $\rho_f = 1000$ кг/м³, $\phi = 0{,}48$, $\alpha = 0{,}98$, $R = 1{,}2 \cdot 10^9$ Н/м², $k = 3{,}55 \cdot 10^{-9}$ м⁴/(Н·с). Поверхность полупространства описывается ГЭ-сеткой, состоящей из 1200 элементов (на рис. 1 представлена четверть ГЭ-сетки), радиус ГЭ-сетки 80 м. Нагрузка прилагается к центральному элементу (окрашен).

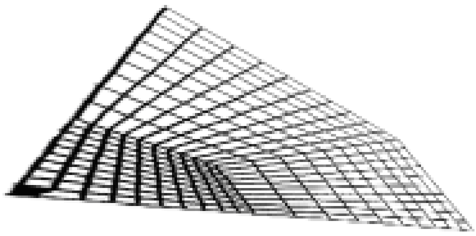

Рис. 1

На рис. 2 приведены спектральные функции в безразмерных величинах для вертикальных перемещений на расстоянии 20 м от области нагружения, на рис. 3 приведены вертикальные перемещения во времени: сплошная линия соответствует ГЭ-решению, штриховая линия соответствует решению из [1].

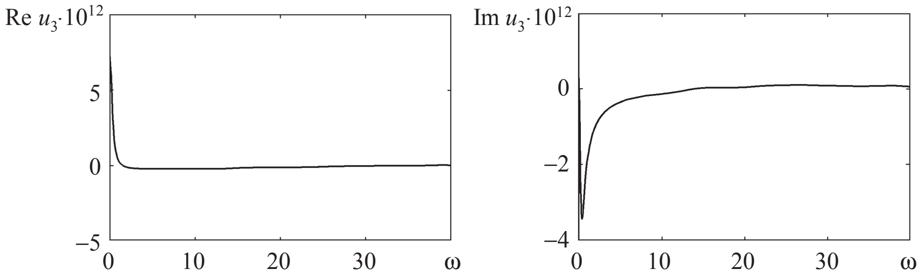

Рис. 2

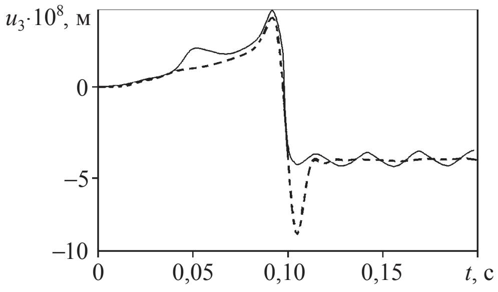

Рис. 3

Решена задача моделирования действия скачка давления $t_2 = 1$ Н/м² на торец пороупругого призматического тела, со следующими параметрами материала: $K = 8 \cdot 10^9$ Н/м²; $G = 6 \cdot 10^9$ Н/м²; $R = 4{,}7 \cdot 10^8$ Н/м²; $k = 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м⁴/(Н·с); $\phi = 1{,}9$; $\alpha = 0{,}867$; $\rho = 2458$ кг/м³; $\rho_f = 1000$ кг/м³, длина призматического тела составляет 3 м.

Рассмотрена ГЭ-сетка, состоящая из 504 четырехугольных элементов. Результаты расчетов перемещений и давлений приведены на рис. 4, 5 соответственно. Графики, изображенные сплошной линией, соответствуют точному решению. Графики, изображенные штриховой линией, соответствуют решениям, полученным по представленной МГЭ-методике. Пунктирной линией изображены результаты МГЭ-решения, полученного в [1].

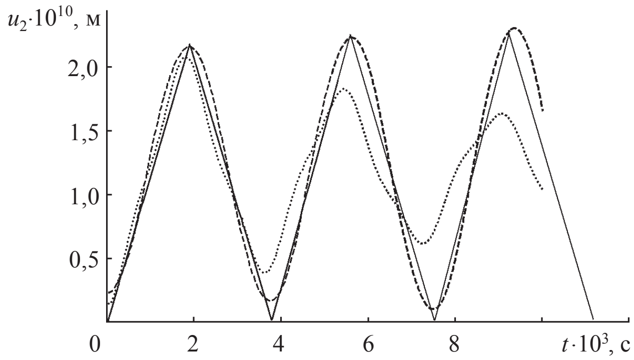

Рис. 4

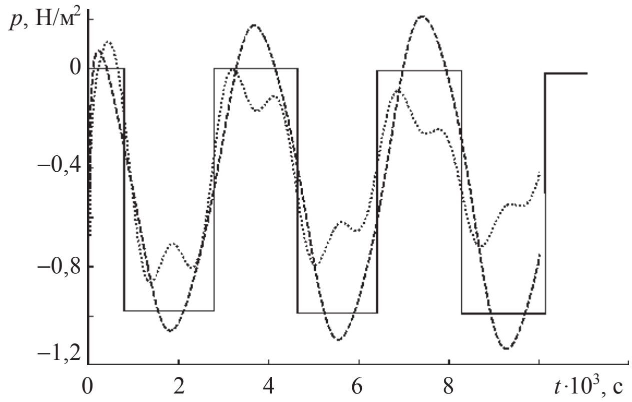

Рис. 5

Литература

1. *Schanz*, *M.* Wave propogation in viscoelastic and poroelastic continua / M. Schanz. – Berlin: Springer, 2001. – 170 p.

2. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости / А.В. Аменицкий [и др.] // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2009. – Вып. 71. – С. 164–171.

3. *Аменицкий*, *А.В.* Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах / А.В. Аменицкий, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2008. – Вып. 70. – С. 71–78.

4. *Баженов*, *В.Г.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.

5. *Jian-Fei*, *Lu* A 2.5-D dynamic model for a saturated porous medium. Part II: Boundary element method / Lu Jian-Fei, Jeng Dong-Sheng, W. Sally // Intern. J. of Solids and Structures. – 2008. – № 45. – P. 359–377.

6. *Biot*, *M.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28. – № 2. – P. 168–178.

7. *Biot*, *M.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, № 2. – P. 179–191.

8. *Durbin*, *F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method / F. Durbin // The Computer Journal. – 1974. – Vol. 17, №4. – P. 371–376.

9. *Lubich*, *C.* Convolution quadrature and discretized operational calculus. I / C. Lubich // Numerische Mathematik. – 1988. – № 52. – P. 129–145.

10. *Lubich*, *C.* Convolution quadrature and discretized operational calculus. II / C. Lubich // Numerische Mathematik. – 1988. – V. 52. – P. 413–425.

[21.09.2010]

BOUNDARY-ELEMENT MODELING OF SPECIAL SOLUTIONS IN 3-D POROELASTICITY

I.S. Karelin

It is demonstrated that BE-methodology can be used for finding solutions of boundary problems of 3-D dynamic poroelasticity. A BE-methodology for numerically analyzing 1-D problems of poroelasticity is presented together with some examples of the numerical modeling.

Key words: boundary element, poroelasticity, boundary integral equations, numerical inversion of integral transformations.