

УДК 539.3

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОРОУПРУГОСТИ В ОДНОМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ^{*)}

А.А. Белов, И.С. Карелин

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Рассматриваются решения одномерных задач динамической пороупругости. Представлена методика численного решения и приведены примеры численного моделирования.

Ключевые слова: динамическая пороупругость, одномерные задачи, численное обращение интегрального преобразования, аналитические решения.

Введение

Создание методического и программного обеспечения по гранично-элементному моделированию трехмерных динамических задач пороупругости требует решения проблемы его верификации. Для этой цели, в частности, предлагается использовать одномерные решения. В статье приводится методика моделирования волн в пороупругой постановке для одномерного случая, построенная на основе применения специального метода численного обращения интегрального преобразования Лапласа. Метод опирается на теорему об интегрировании оригинала и не относится ни к одной из известных групп методов численного обращения преобразования Лапласа [1]. Приведены результаты численных экспериментов.

1. Математическая модель и метод численного обращения преобразования Лапласа

Система дифференциальных уравнений в преобразованиях Лапласа (параметр s) для смещения \hat{u}_i и порового давления \hat{p} имеет следующий вид:

$$G\hat{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G \right) \hat{u}_{j,ij} - (\alpha - \beta)\hat{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\hat{u}_i = -\hat{F}_i,$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f}\hat{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{R}\hat{p} - (\alpha - \beta)s\hat{u}_{i,i} = -\hat{a}, \quad i, j = \overline{1, 3},$$

$$\beta = \frac{k\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 k(\rho_a + \phi\rho_f)},$$

^{*)} Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Программы государственной поддержки ведущих научных школ России (проект НШ-4807.2010.8), а также при поддержке РФФИ (проект 10-08-01017-а).

где G, K – константы упругости; ϕ – пористость; k – проницаемость; α – эффективный коэффициент напряжений; ρ, ρ_a, ρ_f – плотности пористого скелета, присоединенной массы и жидкой среды; \hat{F}_i, \hat{a} – плотности источников.

Граничные условия:

$$\begin{aligned} t'_l(x, s) &= g_l(x, s), \quad l = \overline{1, 3}, \quad t'_4 = q, \quad x \in S^\sigma \cap S, \\ u'_l(x, s) &= f_l(x, s), \quad l = \overline{1, 3}, \quad u'_4 = p, \quad x \in S^u \cap S. \end{aligned}$$

Для численного обращения преобразования Лапласа опишем метод, опирающийся на теорему об интегрировании оригинала [2].

Теорема. Пусть для определенной при $t > 0$ функции времени $y(t)$ можно поставить в соответствие функцию $\hat{y}(s)$ по правилу прямого обращения интегрального представления Лапласа, тогда интегрирование $f(t)$ от 0 до t , то есть

$$y(t) = \int_0^t f(t - \tau) d\tau$$

соответствует изображению $\hat{y}(s)$, причем справедливо $s\hat{y}(s) = \hat{f}(s)$.

Интеграл будем считать по следующему соотношению [2]:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y(n\Delta t) &= y((n-1)\Delta t) + \omega_n(\Delta t), \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(s) s e^{-in\varphi} d\varphi, \quad s = \frac{\gamma(R e^{i\varphi})}{\Delta t}.$$

Единственная аппроксимация, которая использовалась при выводе формулы, заключалась в использовании линейного многошагового метода для решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка. Все остальные вычисления проводились непосредственно. Многошаговый метод должен быть порядка точности $p \geq 1$, являясь строго нуль-устойчивым или A -устойчивым, а функция $\bar{f}(s)$ ограничена в правой полуплоскости относительно прямой $(c - i\infty, c + i\infty)$. К соответствующим многошаговым методам относятся, например, методы дифференцирования назад порядка $p \leq 6$: для A -устойчивого метода дифференцирования назад второго порядка ($\alpha = 90^\circ$) можем записать следующую характеристическую функцию:

$$\gamma(z) = 3/2 - 2z + z^2/2.$$

Аппроксимация, которая используется в методе: численное интегрирование при получении значений $\omega_n(\Delta t)$ аппроксимируем с L равными шагами $2\pi/L$:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \bar{f}(s) s e^{-inl2\pi/L}, \quad s = \frac{\gamma(R e^{il2\pi/L})}{\Delta t}.$$

При условии, что функция $\bar{f}(s)$ в уравнении вычисляется с некоторой погрешностью ϵ , выбор $L = 2N$ и $R^N = \sqrt{\epsilon}$ допускает погрешность вычисления ω_n порядка $O(\sqrt{\epsilon})$.

2. Фундаментальные решения

Систему уравнений пороупругости запишем в символической матричной форме

$$L(\partial) \hat{u} = 0, \quad \hat{u} = [\hat{u}, \hat{p}]^T.$$

Фундаментальное решение для этой системы построено в [3]:

$$L(\partial)G + I\delta(x-y) = 0.$$

Матрица G определяется соответствующим ГИУ. Продемонстрируем применение метода численного обращения преобразования Лапласа для построения интеграла по времени от матрицы фундаментальных решений:

$$U_{ij} = \int_0^t G_{ij}(x, t-\tau) d\tau.$$

В статье [4] на основе метода квадратур сверток получен подобный результат для U_{11} . На рис. 1 приведены полученные нами результаты, причем на рис. 1,а результат из [4] представлен штриховой линией. Рассматривался водонасыщенный грунт, характеризующийся параметрами: $E = 2,544 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$; $\nu = 0,298$; $\rho = 1884 \text{ кг/м}^3$; $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$; $\phi = 0,48$; $R = 1,2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$; $\alpha = 0,98$; $k = 3,55 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4/(\text{Н}\cdot\text{с})$. Точка пространства, для которой проводились вычисления, выбрана со следующими координатами: $(0,1, 0,15, 0,2)$.

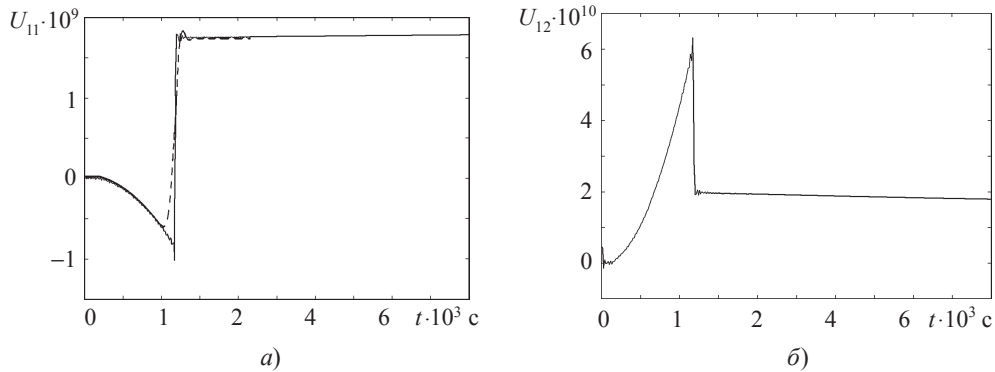


Рис. 1

Сравнение результата из [4] с проведенными нами численными экспериментами показывает, что примененный метод численного обращения дает более точный и устойчивый результат по сравнению с методом квадратур сверток, описанным в [3].

3. Решение одномерных задач

Система дифференциальных уравнений одномерного распространения волн в пороупругой постановке в изображениях выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} E\hat{u}_{2,22} - (\alpha - \beta)\hat{p}_{,2} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\hat{u}_2 = 0, \\ \frac{\beta}{s\rho_f}\hat{p}_{,22} - \frac{\phi^2 s}{R}\hat{p} - (\alpha - \beta)s\hat{u}_{2,2} = 0, \end{cases} \quad \beta = \frac{k\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 k(\rho_a + \phi\rho_f)}, \quad (1)$$

$$x_2 \in [0, l],$$

$$\begin{cases} E\hat{u}_{2,22} - (1-\beta)\hat{p}_{,2} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\hat{u}_2 = 0, \\ \frac{\beta}{s\rho_f}\hat{p}_{,22} - (1-\beta)s\hat{u}_{2,2} = 0, \end{cases}$$

$$\beta = \frac{\rho_f\phi^2}{\rho_a + \phi\rho_f}, \quad x_2 \in [0, l]. \quad (2)$$

Граничные условия в области Лапласа имеют вид:

$$\hat{u}_2(0) = 0, \quad \hat{q}_2(0) = 0, \quad \hat{\sigma}_2(l) = -F_0, \quad \hat{p}(l) = 0.$$

Решение в области Лапласа получено в [3,5]. К примеру, формула для порового давления для системы (1) имеет вид:

$$\hat{p}(x_2) = \frac{F_0 d_1 d_2}{E(d_1 \lambda_2 - d_2 \lambda_1)} \left[\frac{e^{-\lambda_1 s(l-x_2)} + e^{-\lambda_1 s(l+x_2)}}{1 + e^{-2\lambda_1 s l}} - \frac{e^{-\lambda_2 s(l-x_2)} + e^{-\lambda_2 s(l+x_2)}}{1 + e^{-2\lambda_2 s l}} \right], \quad (3)$$

формула для перемещений для системы (2) имеет вид

$$\hat{u}_2(x_2) = \frac{F_0 \lambda_1 \beta}{s(\rho_f - 2\beta\rho_f + \beta\rho)} \frac{e^{-\lambda_1 s(l+x_2)} - e^{-\lambda_1 s(l-x_2)}}{1 + e^{-2\lambda_1 s l}}. \quad (4)$$

Аналитическое решение может использоваться для верификации разрабатываемого математического и программного обеспечения, но для этого опять необходимо решить задачу построения оригинала искомого решения.

4. Численные результаты

На основе численного обращения преобразования Лапласа найдем оригиналы функций \hat{u}_2 и \hat{p} . Будем рассматривать задачу со следующими параметрами: $K = 2,1 \cdot 10^8$ Н/м²; $G = 9,8 \cdot 10^7$ Н/м²; $\rho = 1884$ кг/м³; $\phi = 0,19$; $K_s = 1,1 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\rho_f = 1000$ кг/м³; $K_f = 3,3 \cdot 10^9$ Н/м²; $k = 3,55 \cdot 10^{-9}$ м⁴/(Н·с), $l = 10$ м.

На рис. 2,а представлены перемещения в точке $x_2 = l$, на рис. 2,б – давления в точке $x_2 = 0$ для модели, описываемой системой (1). На рис. 3,а, б – то же для модели, описываемой системой (2).

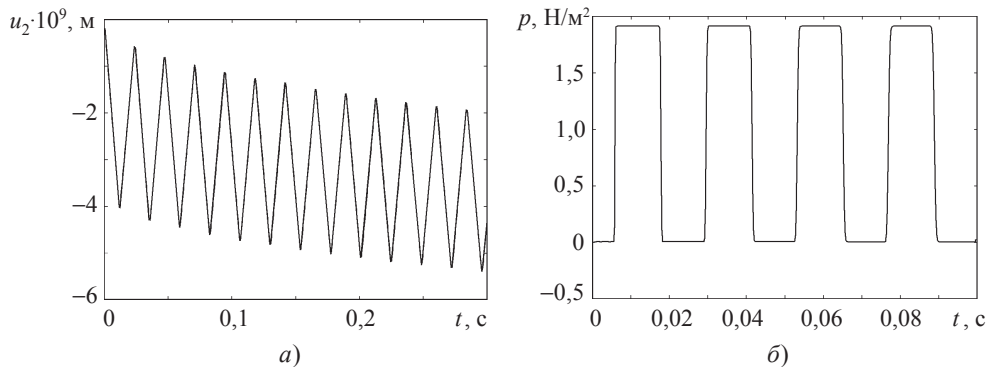


Рис. 2

Приведенные решения позволяют продемонстрировать влияние коэффициента проницаемости на амплитуду и форму отклика порового давления.

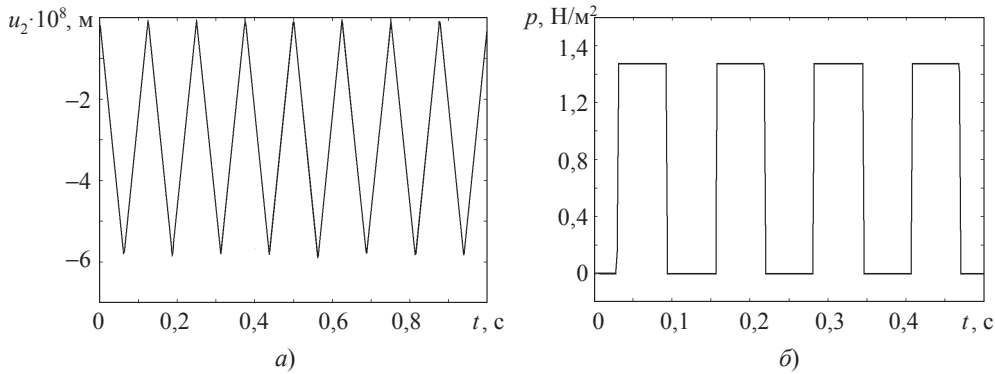


Рис. 3

Вслед за [3], рассмотрен отклик порового давления в пороупругой колонне на расстоянии 5 м от торца нагружения со следующими параметрами материала: $E = 2,544 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$; $\nu = 0,298$; $k = 3,55 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4/(\text{Н}\cdot\text{с})$; $R = 1,2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$; $\rho = 1884 \text{ кг/м}^3$; $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$; $\phi = 0,48$; $\alpha = 0,98$. Длина колонны составляет 1000 м. На рис. 4, а, б приведены соответственно действительная и мнимая части типичной спектральной функции, построенной для параметра $k = 3,55 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4/(\text{Н}\cdot\text{с})$. Результаты численного обращения преобразования Лапласа в такой постановке задачи приведены на рис. 4, в. Отклик по времени полностью совпал с результатами из [3].

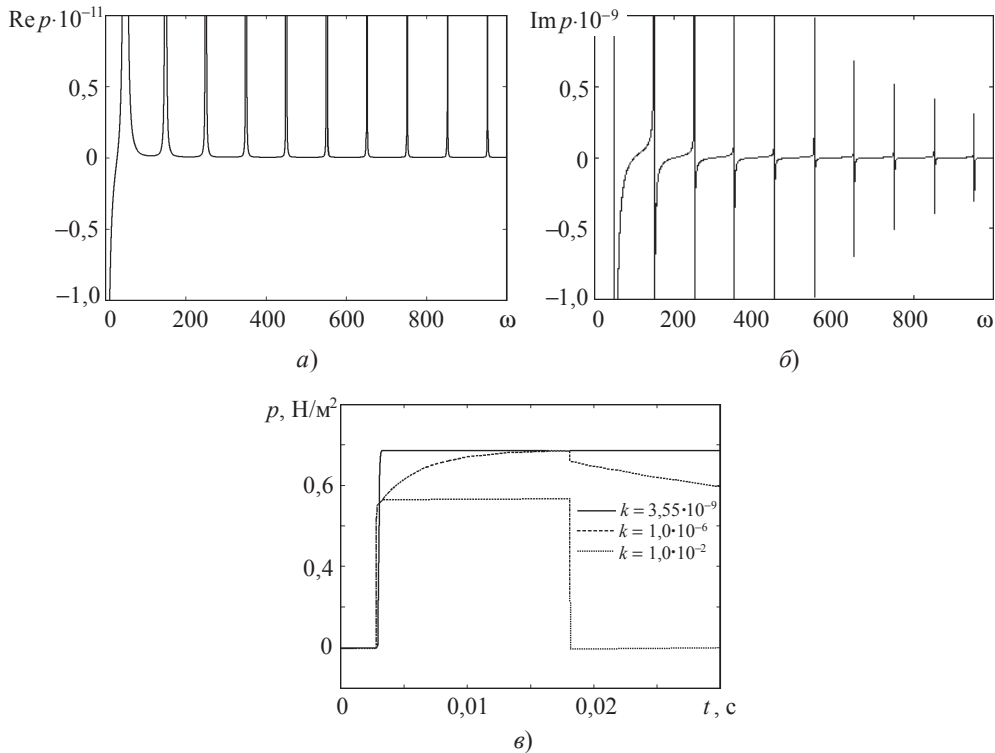


Рис. 4

Литература

1. *Баженов, В.Г.* Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций: Учеб. пособие / В.Г. Баженов, А.А. Белов, Л.А. Игумнов. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. – 180 с.
2. *Деч, Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М.: Мир, 1971. – 288 с.
3. *Schanz, M.* Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua / M. Schanz. – Berlin: Springer, 2001. – 170 p.
4. *Schanz, M.* Wave propagation in a simplified modelled poroelastic continuum: Fundamental solutions and a time domain boundary element formulation / M. Schanz, V. Struckmeier // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 2005. – №64. – P. 1816–1839.
5. *Schanz, M.* A comparative study of Biot's theory and the linear theory of porous media for wave propagation problems / M. Schanz, S. Diebels // Acta Mechanica. – 2003. – №161. – P. 213–235.

[21.09.2010]

SPECIAL SOLUTIONS FOR DYNAMIC POROELASTICITY IN 1-D FORMULATION

A.A. Belov, I.S. Karelin

The solutions of one-dimensional problems of dynamic poroelasticity are considered. Methodology for the numerical analysis and examples of numerically modeling the problems are given.

Key words: dynamic poroelasticity, 1-D problems, numerical inversion of integral transformations, analytical solutions.