

УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОСАДКИ ПОРОУПРУГОЙ КОЛОННЫ^{*)}

А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

С помощью метода граничных элементов анализируется решение задачи динамической осадки пороупругой колонны. Рассматривается модель пористой среды Био. Продемонстрирован эффект перестройки отклика перемещений для полной модели Био на отклик перемещений для несжимаемой модели Био.

Ключевые слова: трехмерная пороупругость, динамика, граничные интегральные уравнения, граничный элемент.

Введение

Математическое моделирование пористых насыщенных жидкостью (газом) сред имеет более чем 90-летнюю историю. Сложности описания эффектов взаимодействия фаз, фазовых переходов, теплообмена и т.п. не позволяют построить для них общепринятую модель. Существенные упрощения: отсутствие фазовых переходов, температурных эффектов и пр. – дают, тем не менее, модель среды, существенно усложненную по сравнению с однородной упругой или вязкоупругой моделью. Это вызвано способностью жидкости втекать или вытекать в любую область, формируемую порами, что является принципиальным отличием пористой среды от упругой. Отмеченное явление особенно важно при рассмотрении волновых процессов. В таких задачах по мере роста частоты колебаний возрастает вклад динамического поведения жидкости, что значительно усложняет модель среды.

Теория Био [1–3] является расширением классической теории упругости на случай двухфазной среды вследствие дополнительных параметров, учитывающих взаимодействие фаз. Теория Био не только качественно, но и количественно правильно предсказывает скорости, амплитуды и частотную зависимость затухания всех трех типов волн в различных насыщенных пористых средах. Наиболее важные волновые эффекты, найденные в рамках теории Био, согласуются с экспериментальными данными.

Статья посвящена применению метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) к распространению волн в пороупругих телах. Метод ГИУ рассматривается в сочетании с методом граничных элементов (МГЭ). Из аналогичных исследований отметим [3–5].

^{*)} Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Программы государственной поддержки ведущих научных школ России (проект НШ-4807.2010.8), а также при поддержке РФФИ (проект 10-08-01017-а).

1. Математическая модель пороупругой среды

Система дифференциальных уравнений в преобразованиях Лапласа (параметр s) для смещения \tilde{u}_i и порового давления \tilde{p} записывается в виде [4]:

$$G\tilde{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G \right) \tilde{u}_{j,ij} - (\alpha - \beta)\tilde{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\tilde{u}_i = -\tilde{F}_i,$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f}\tilde{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{R}\tilde{p} - (\alpha - \beta)s\tilde{u}_{i,i} = -\tilde{a},$$

$$\beta = \frac{k\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 k(\rho_a + \phi\rho_f)},$$

где G, K – константы упругости; ϕ – пористость, k – проницаемость, α – эффективный коэффициент напряжений; ρ, ρ_a, ρ_f – плотности пористого скелета, присоединенной массы и жидкой среды; \tilde{F}_i, \tilde{a} – плотности источников.

2. Граничные интегральные уравнения

Интегральное представление прямого подхода имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_j \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ij}^s & -\tilde{P}_j^s \\ \tilde{U}_i^f & -\tilde{P}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_i \\ \tilde{q} \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{ij}^s & -\tilde{Q}_j^s \\ \tilde{T}_i^f & -\tilde{Q}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{p} \end{bmatrix} d\Gamma.$$

Компоненты матриц – ядер интегрального представления – можно найти в [4, 6].

Ядра интегральных представлений допускают следующее выделение особенностей:

$$\tilde{P}_i^s = O(r^0), \quad \tilde{U}_i^f = O(r^0), \quad \tilde{Q}^f = -\frac{r_{,n}}{4\pi r^2} + O(r^0),$$

$$\tilde{U}_{ij}^s = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)} \{r_{,i}r_{,j} + \delta_{ij}(3-4\nu)\} \frac{1}{r} + O(r^0), \quad \tilde{P}^f = \frac{\rho_f s}{4\pi\beta} \frac{1}{r} + O(r^0),$$

$$\tilde{Q}_j^s = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)} \{ \alpha(1-2\nu)(r_{,n}r_{,j} - n_j) - 2\beta(1-\nu)(r_{,n}r_{,j} + n_j) \} \frac{1}{r} + O(r^0),$$

$$\tilde{T}_i^f = \frac{\rho_f s^2}{8\pi\beta} \left\{ (\alpha - \beta) \frac{1-2\nu}{1-\nu} r_{,i}r_{,j} + n_i \frac{\alpha + \beta(1-2\nu)}{1-\nu} \right\} \frac{1}{r} + O(r^0),$$

$$\tilde{T}_{ij}^s = \frac{-((1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j})r_{,n} + (1-2\nu)(r_{,j}n_i - r_{,i}n_j)}{8\pi(1-\nu)r^2} + O(r^0).$$

Итоговая система ГИУ примет вид:

$$\begin{bmatrix} c_{ij}(y) & 0 \\ 0 & c(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(t, x) \\ p(t, x) \end{bmatrix} + \int_0^t \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{ij}^s(t-\tau, y, x) & Q_j^s(t-\tau, y, x) \\ T_i^f(t-\tau, y, x) & Q^f(t-\tau, y, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(\tau, x) \\ p(\tau, x) \end{bmatrix} d\Gamma d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{ij}^s(t-\tau, y, x) & -P_j^s(t-\tau, y, x) \\ U_i^f(t-\tau, y, x) & -P^f(t-\tau, y, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i(\tau, x) \\ q(\tau, x) \end{bmatrix} d\Gamma d\tau.$$

На основе этой системы строится дискретный аналог, детальное описание которого можно найти в [7].

3. Гранично-элементная дискретизация

Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассматриваем регуляризованное уравнение:

$$\alpha_{\Omega} \tilde{v}_k(x, t) + \iint_{\Gamma} [\tilde{T}_{ik}(x, y, t - \tau) \tilde{v}_i(y, \tau) - \tilde{T}_{ik}^0(x, y, t - \tau) \tilde{v}_i(x, \tau) - \tilde{G}_{ik}(x, y, t - \tau) \tilde{t}_i(y, \tau)] d\Gamma d\tau = 0 \quad (x \in \partial\Gamma), \quad \tilde{t} = [t_1, t_2, t_3, q]^T, \quad \tilde{v} = \{u_1, u_2, u_3, p\}.$$

Матрица – ядро \tilde{T}_{ik}^0 – образована слагаемыми компонент, содержащих особенности. Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности Γ на граничные элементы: четырехугольные и треугольные восьмиузловые биквадратичные элементы. Связь локальной и глобальной систем координат $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (y_1(\xi), y_2(\xi), y_3(\xi))$ записывается через функции формы $N^l(\xi)$:

$$y_i(\xi) = \sum_{l=1}^8 N^l(\xi) y_i^{\beta(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \xi \in \Delta_e,$$

где $\beta(k, l)$ – глобальный номер узла, имеющего в k -м элементе локальный номер l .

Далее определяется естественный базис, метрический тензор и единичная нормаль на элементе. Неизвестные граничные поля (\tilde{v}, \tilde{t}) интерполируются через узловые значения.

Для получения дискретного аналога ГИУ применяем метод коллокации. В качестве узлов коллокации y^m выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируется система линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты дискретных аналогов имеют особенности, что определяет специфику вычислительного процесса. Регулярный интеграл вычисляется на основе квадратурной формулы Гаусса. Для интегралов с особенностью используется прием ее устранения.

Для решения ГИУ по времени использован следующий алгоритм. Пусть имеем интеграл:

$$y = \int_0^t q(\tau) d\tau,$$

тогда можно построить квадратурную формулу:

$$y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \bar{q}(\gamma(R e^{i2\pi k L^{-1}}) / \Delta t) e^{i2\pi k L^{-1}},$$

$$\gamma(z) = \frac{3}{2} - 2z + \frac{z^2}{2},$$

где \bar{q} – изображение по Лапласу функции q .

Спецификой алгоритма является то, что оригинал искомой функции $y(t)$ строится на основе теоремы об интегрировании оригинала для $g(t)$.

4. Численные результаты

Решена задача моделирования действия скачка давления $t_2 = 1$ Н/м² на торец поропругого призматического тела со следующими параметрами материала: $K = 2,1 \cdot 10^8$ Н/м², $G = 9,8 \cdot 10^7$ Н/м², $\rho = 1884$ кг/м³, $\phi = 0,19$, $K_s = 1,1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho_f = 1000$ кг/м³, $K_f = 3,3 \cdot 10^9$ Н/м², $k = 3,55 \cdot 10^{-9}$ м⁴/(Н·с).

Гранично-элементная сетка состоит из 504 элементов. Результаты расчетов перемещений и давлений приведены соответственно на рис. 1, 2.

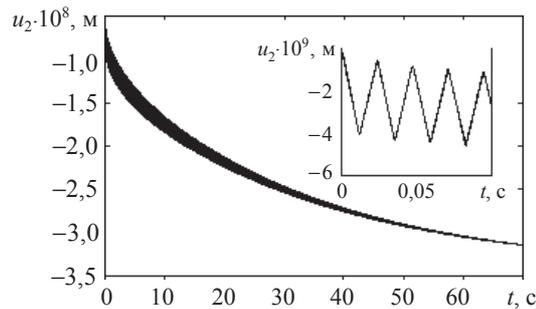


Рис. 1

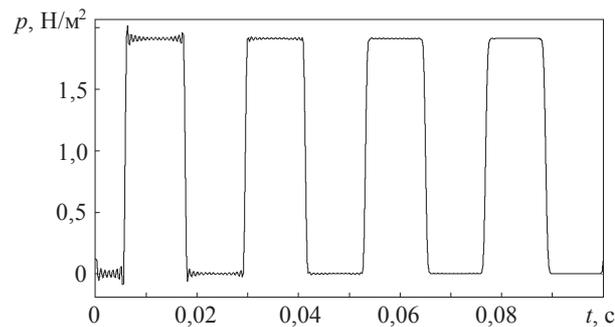


Рис. 2

Расчеты, приведенные на рис. 1, показывают, что со временем отклик перемещений выходит на значение, соответствующее перемещению несжимаемой модели Био [8]: $\beta \approx \phi^2 \rho_f / (\rho_\alpha + \phi \rho_f)$ при $k \rightarrow \infty$. Колебания соответственно происходят около этого значения, равного $2,93 \cdot 10^{-8}$ м.

Литература

1. Френкель, Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве / Я.И. Френкель // Изв. АН СССР. Серия Географ. и геофиз. – 1944. – Т. 8, № 4. – С. 65–78.
2. Biot, M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, № 2. – P. 168–178.
3. Biot, M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, № 2. – P. 179–191.
4. Schanz, M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua / M. Schanz. – Berlin: Springer, 2001. – 170 p.
5. Manolis, G.D. Integral formulation and fundamental solutions of dynamic poroelasticity and thermoelasticity / G.D. Manolis, D.E. Beskos // Acta Mechanica. – 1989. – № 76. – P. 89–104.
6. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории поропругости / А.В. Аменицкий [и др.] // Проблемы прочности и пластичности:

Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2009. – Вып. 71. – С. 164–171.

7. *Баженов, В.Г.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.

8. *Schanz, M.* A comparative study of Biot's theory and the linear theory of porous media for wave propagation problems / M. Schanz, S. Diebels // Acta Mechanica. – 2003. – №161. – P. 213–235.

[21.09.2010]

THE BOUNDARY-ELEMENT ANALYSIS OF THE DYNAMIC SETTling OF A POROELASTIC COLUMN

A.V. Amenitsky, A.A. Belov, L.A. Igumnov

The problem of dynamic settling of a poroelastic column is analyzed using BEM. Biot's model of a porous medium is considered. The effect of the changes in the displacement response in complete Biot's model on the displacement response in simplified Biot's model is demonstrated.

Key words: 3-D poroelasticity, dynamics, boundary integral equations, boundary element.