

УДК 539.3

**АЛГОРИТМЫ МЕТОДА НАЛОЖЕННЫХ СЕТОК  
ДЛЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ<sup>\*)</sup>****В.Л. Котов, А.Н. Логинова, Е.В. Павленкова***НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского*

Представлены алгоритмы конечно-разностного расчета динамических волновых полей в сопряженных под областях с различающимися шагами по времени на основе предложенного ранее метода наложенных сеток. Рассмотрены варианты с «замораживанием» скорости на линиях сопряжения в течение временного шага и с применением линейной интерполяции по времени. Экономичность и точность предложенных алгоритмов показаны на примере одномерных расчетов по схеме «крест» распространения волновых импульсов в упругой среде.

*Ключевые слова:* метод наложенных сеток, конечно-разностная схема, контактное взаимодействие, волновая задача.

При численном решении нестационарных задач динамики сплошных сред методами конечных разностей часто встречаются случаи, когда расчетная область содержит под области с различающимися размерами ячеек разностной сетки. Сгущение сеток применяют для более точной аппроксимации решения в окрестности концентраторов напряжений, больших градиентов расчетных величин и во многих других случаях. В последних работах на эту тему описываются методы построения сеток с динамической адаптацией к решению [1, 2], использование вложенных сеток [3], многосеточный метод [4]. Применение для расчета подобных задач явных разностных схем приводит к необходимости использовать малый временной шаг и для расчета под областей с большими размерами ячеек, что ведет к увеличению времени счета задачи в целом. В данной работе предлагаются алгоритмы, предполагающие расчет с учетом различающихся шагов по времени. Сопряжение под областей осуществляется предложенным ранее методом наложенных сеток [5, 6].

1. Рассмотрим вариант реализации разношагового алгоритма на примере контактирования одномерных под областей I и IV, размеры ячеек разностной сетки в которых отличаются в  $k$  раз (рис. 1). Физические свойства среды слева и справа от зоны контакта полагаем одинаковыми, временные шаги связаны соотношением  $\tau_1 = k\tau_2$ .

<sup>\*)</sup> Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Программы государственной поддержки ведущих научных школ России (проект НШ-4807.2010.8), а также при поддержке РФФИ (проект 10-08-00376-а).

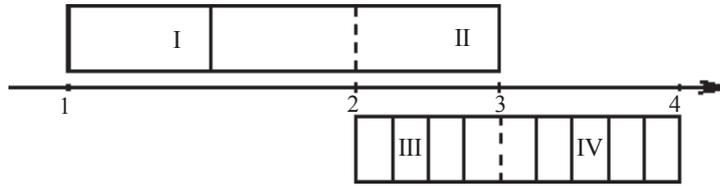


Рис. 1

Для расчета контакта предлагается следующий алгоритм, основанный на работах [5, 6]. Добавляется вспомогательная область II, которая накладывается на выделенную область III. Границы зоны контакта вспомогательных и основных подобластей показаны штриховыми линиями на рис. 1. Полагаем, что скорости и перемещения в подобластях известны на момент времени  $t^j$  (рис. 2).

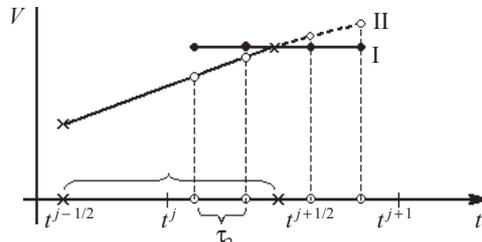


Рис. 2

1) Рассчитывается скорость в точке контакта подобластей I и II на момент времени  $t^{j+1/2}$ . Полученное значение скорости применяется в качестве граничного условия в точке 3 (рис. 1).

2) Подобласти III и IV рассчитываются для  $k$  временных шагов  $\tau_2$ . В качестве граничного условия в точке 2 используется значение скорости, полученное в п. 1) (см. также рис. 2).

3) Проводится расчет подобластей I и II в течение временного шага  $\tau_1$ . В качестве граничного условия в точке 3 используется среднее значение скоростей, полученных при расчете в п. 2).

В отличие от более общего алгоритма, описанного в работах [5, 6], в настоящем алгоритме за счет изменения последовательности вычислений удалось избежать пересчета параметров во вспомогательных областях II и III. Действия в п. 2) можно проводить либо с сохранением значения скорости постоянным (алгоритм I на рис. 2), либо с применением линейной функции, построенной по значениям скоростей в моменты времени  $t^{j-1/2}$  и  $t^{j+1/2}$  (алгоритм II на рис. 2). Отметим также, что перемещения в точках контакта, вычисленные с использованием этих двух алгоритмов, совпадают.

2. Сравнение приведенных разношаговых алгоритмов проведем на примере распространения импульса скорости в упругой среде с параметрами:  $K = 2G = 168,48$  ГПа, плотность  $7800$  кг/м<sup>3</sup>, скорость звука  $c = 6000$  м/с. Для расчетов используем численную схему «крест», приняв начальные значения параметров равными нулю. На границе зададим скорость, которая изменяется по закону  $V = V_0 \sin^2(\pi t/T)$ , где  $V_0 = 10^{-4}$  с,  $T = 3 \cdot 10^{-5}$  с, при  $t < T$  и равна нулю при  $t \geq T$ . Пусть размеры подобластей равны  $L = cT$ , количество ячеек в них составляет соответственно 18 и 72, отношение временных шагов равно  $\tau_1/\tau_2 = 4$ .

В первой серии расчетов волновой импульс скорости распространялся из области с крупными ячейками в область с более мелкими ячейками ( $h_1 = 4h_2$ ). На рис. 3,а представлено распределение скорости вдоль пространственной координаты на момент времени  $t = 2T$ . Кривая 1 соответствует расчету с единым шагом по времени ( $\tau_2$ ), что привело к значению числа Куранта во второй подобласти ( $1 < r/(cT) < 2$ ), равному 0,25. Разношаговые алгоритмы позволяют проводить расчеты с числом Куранта, равным 1 в каждой подобласти. Результаты расчетов по алгоритмам I и II с использованием постоянного значения скорости в течение временного шага  $\tau_1$  и линейной интерполяции изображены соответственно кривыми 2 и 3 на рис. 3,а. Видно, что алгоритм с линейной интерполяцией дает решение более близкое к точному. На рис. 3,б кривые 1–3 представляют результаты расчетов по алгоритму I с числом Куранта, равным 1, 0,8 и 0,6 соответственно. Результаты аналогичных расчетов по алгоритму II практически повторяют кривую 3 на рис. 3,а и здесь не показаны. Таким образом, можно отметить сближение результатов, полученных по различным алгоритмам, с уменьшением числа Куранта.

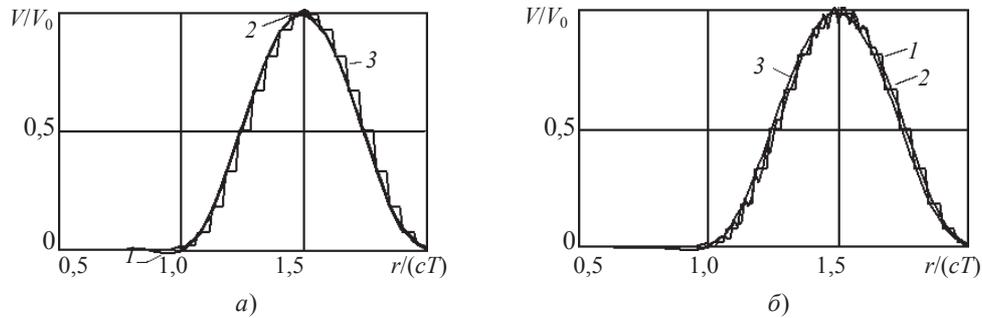


Рис. 3

Во второй серии расчетов волновой импульс скорости распространялся из области с мелкими ячейками в область с крупными ячейками. Подобная конфигурация возникает, например, при расчете распространения волн от взрывного источника, когда ячейки в окрестности взрывной полости сильно сжимаются. Неравномерную сетку также используют для сокращения времени счета при моделировании динамических задач проникания или расчете напряженно-деформированного состояния в окрестности концентратора напряжений в протяженной области (полупространстве), когда границы расчетной области расположены достаточно далеко от контактной поверхности.

Результаты численных расчетов показаны на рис. 4 кривыми 1–3, параметры расчетов соответствуют описанным выше.

Можно отметить близкие к точному значения скорости в первой подобласти ( $0 < r/(cT) < 1$ ). В расчетах по алгоритму I с числом Куранта, равным 1, возникают возмущения при  $r/(cT) > 1$ .

Аналогично рассмотренному выше случаю, наблюдается сближение результатов, полученных по различным алгоритмам, с уменьшением числа Куранта (рис. 4,б).

Эффективность предложенных алгоритмов оценивается следующим образом. Обозначим количество узлов в областях с мелкими и крупными ячейками как  $n$  и  $N$ , отношение шагов по времени как  $k$ . В этом случае отношение количества операций на шаге представимо в виде  $k(n + N)/(kn + N)$ . При  $n \approx N$  это отношение близко к 2, а при  $n \ll N$  стремится к  $k$ . Таким образом, предложенные алгоритмы могут

оказаться полезными при расчете в протяженных областях волновых полей от источников, близких к точечным.

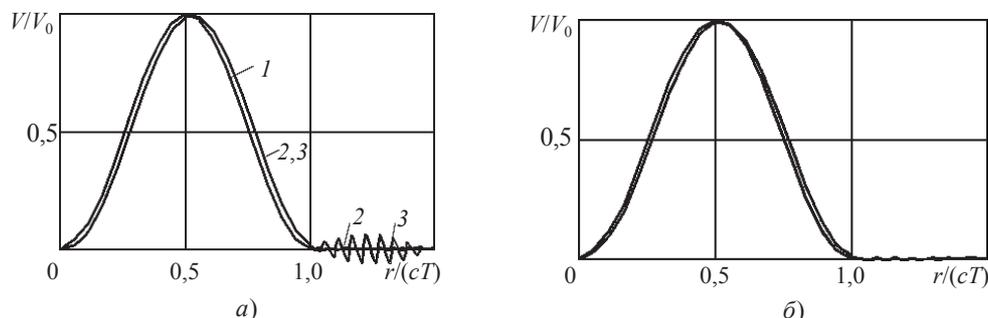


Рис. 4

Авторы благодарят профессора В.Г. Баженова за постановку задачи и внимание к работе.

#### Литература

1. *Liseikin, V.D.* Grid generation methods / V.D. Liseikin. – Springer, 2010.
2. *Сушинов, А.А.* Построение декартовых сеток с динамической адаптацией к решению / А.А. Сушинов // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22, № 1. – С. 86–98.
3. *Белоцерковская, М.С.* Использование вложенных сеток для моделирования процесса фильтрации / М.С. Белоцерковская, А.М. Опарин, Б.Н. Четверушкин // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16, № 12. – С. 3–10.
4. *Лопухин, К.А.* Применение многосеточного метода для решения задачи о шине / К.А. Лопухин, С.В. Шешенин // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 2010. – № 1. – С. 62–66.
5. *Баженов, В.Г.* Алгоритм согласования различных разностных схем при решении нестационарных задач динамики сплошных сред / В.Г. Баженов, В.Л. Котов // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Матер. V Всероссийск. семинара. – Казань, 2004. – С. 25–29.
6. *Баженов, В.Г.* Согласование различных разностных схем в нестационарных задачах динамики сплошных сред методом наложенных сеток / В.Г. Баженов, В.Л. Котов, С.В. Зефилов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Механика. – 2006. – Вып. 1 (7). – С. 134–140.

[24.09.2010]

### THE ALGORITHMS OF THE METHOD OF SUPERIMPOSED MESHES FOR THE FINITE-DIFFERENCE ANALYSIS OF NONSTATIONARY WAVE PROBLEMS

**V.L. Kotov, A.N. Loginova, E.V. Pavlenkova**

Algorithms for the finite-difference analysis of dynamic wave fields in coupled subregions with different time-steps are developed based on the earlier presented method of superimposed meshes. Formulations with «freezing» the velocity along the lines of conjugation during a time-step and with using linear time interpolation are considered. High efficiency and accuracy of the presented algorithms is illustrated using the example of «cross-type» analysis of wave pulse propagation in elastic medium.

*Key words:* method of superimposed meshes, finite-difference scheme, contact interaction, wave problem.